

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung

**Band:** 72 (1954)

**Heft:** 47

**Artikel:** Berechnung gekrümmter Blattfedern für elastische Kupplungen

**Autor:** Zwahlen, R.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61296>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Berechnung gekrümmter Blattfedern für elastische Kupplungen

Von Dipl. Math. R. Zwahlen, Zürich

DK 621.825.7:539.413

### Einleitung

Um zwei Kolbenmaschinen elastisch miteinander zu kupeln, wurde eine Konstruktion mit Hilfe von Stahlfedern nach Bild 1 entwickelt. Die Stahlfedern sind in einer der Drehmassen eingespannt, während ihr anderes Ende von der zweiten Masse frei drehbar geführt wird. Um das Schwingungsverhalten dieser Konstruktion zu finden, muss die Federkennlinie ermittelt werden. Zu diesem Zwecke ist die Feder als krummer Balken zu berechnen. Die Ueberlegungen, welche zur Lösung der Aufgabe führten, werden nachfolgend beschrieben.

Im ersten Teil werden die mathematischen Grundlagen geschaffen, die das Festigkeitsverhalten des Balkens betreffen. Man gibt sich leicht darüber Rechenschaft, dass die aus der klassischen Biegelehre des geraden Balkens bekannten Begriffe (Trägheitsmoment, Lage der Neutralaxe) für den krummen Balken auf ihre Brauchbarkeit überprüft werden müssen. Es zeigt sich, dass die Lage der Neutralaxe anders als beim geraden Balken zu bestimmen ist. Auch für das Trägheitsmoment erhält man einen passenden Ersatz, den wir als Krümmungs-Widerstandsmoment bezeichnen. Der Zusammenhang zwischen den bekannten Formeln, die für den geraden Balken abgeleitet werden, und den für den krummen Balken üblichen lässt sich mit Hilfe von Reihenentwicklungen gewinnen.

Im zweiten Teil werden die Differentialgleichung aufgestellt, die Anfangsbedingungen ermittelt und Lösungsmethoden beschrieben. Wir nehmen in der Folge an, die Feder werde auf Druck beansprucht. Unsere Ueberlegungen lassen sich auch auf den Fall anwenden, bei dem die Feder auf Zug arbeitet.

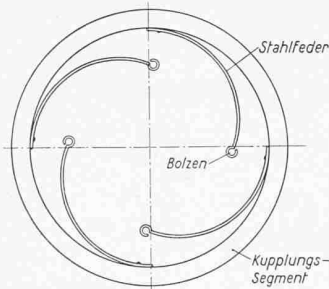


Bild 1. Elastische Kupplung

### I. Teil: Ersatz des Trägheitsmomentes beim krummen Balken

#### 1. Ebene Biegung gekrümmter Stäbe

In der einschlägigen Literatur der Statik<sup>1)</sup> findet man folgende Berechnungsgrundlagen des krummen Balkens. Es sei in Bild 2 ein Element eines krummen Balkens dargestellt, der sowohl einer Normalkraft  $N$  als auch einem Moment  $M$  unterworfen ist. Ein Faserteilchen des Balkens sei klein, doch immerhin endlich und seine Länge mit  $ds$  bezeichnet. Der Krümmungsmittelpunkt des betrachteten Balkenteils sei der Punkt  $O$ . Die beiden Strahlen mit dem Scheitel  $O$ , welche das Element  $ds$  aus dem Balken herausschneiden, schliessen miteinander den Winkel  $d\varphi$  ein;  $d\varphi$  ist entsprechend  $ds$  klein aber ebenfalls endlich.  $y$  sei der Abstand der betrachteten Faser von der Neutralaxe  $z$ , in der, wie im geraden Balken die Normalspannungen bei reiner Biegung 0 sind. Neutralaxe  $z$  und Schweraxe  $z_s$  sind im Gegensatz zum geraden Balken hier nicht identisch. Um  $z$  zu ermitteln, sind einige zusätzliche Ueberlegungen erforderlich. Zunächst ist unter Beibehaltung der Navier-Bernoullischen Hypothesen

$$ds = (r - y)d\varphi$$

Die Formänderung  $\Delta ds$  wird durch die Normalkraft  $N$ ,  $\Delta d\varphi$  durch das Moment  $M$  hervorgerufen. Daraus folgt für die Dehnung  $\epsilon$  im Abstand  $y$  von der Neutralaxe

<sup>1)</sup> Wir folgen ein Stück weit dem Buche von Prof. Dr. F. Stüssi, «Vorlesungen über Baustatik», Basel 1945, Birkhäuser.

$$\epsilon(y) = \frac{\Delta ds + \Delta d\varphi \cdot y}{(r - y) d\varphi}$$

Man erkennt an dieser Gleichung, dass sich die Dehnung  $\epsilon$  auch bei rein zentrischer Normalkraft  $N$  mit dem Abstand  $y$  verändert.

Für die Spannung  $\sigma$  findet man

$$(1) \quad \sigma(y) = \epsilon E = E \frac{\Delta ds + \Delta d\varphi \cdot y}{(r - y) \cdot d\varphi}$$

und es muss gelten

$$N = \int \sigma(y) dF = E \frac{\Delta ds}{d\varphi} \int \frac{dF}{r - y} + E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{y dF}{r - y}$$

$$M = \int \sigma(y) y dF = E \frac{\Delta ds}{d\varphi} \int \frac{y dF}{r - y} + E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{y^2 dF}{r - y}$$

Wenn  $r \rightarrow \infty$  strebt, der Balken also gerade ist, muss man die entsprechenden Gleichungen für den geraden Balken erhalten. Das lässt sich aus den beiden Gleichungen noch nicht herauslesen. Dagegen lässt sich damit die Lage der Neutralaxe bestimmen: Setzt man  $M = 0$ , so muss  $\Delta d\varphi = 0$  sein. Die Lage der Neutralaxe ist damit charakterisiert.

$$0 = E \cdot \frac{\Delta ds}{d\varphi} \int \frac{y dF}{r - y}$$

Nun sind aber  $E \neq 0$  und  $\frac{\Delta ds}{d\varphi} \neq 0$  (weil  $N \neq 0$ ). Somit folgt

$$(1^*) \quad \int \frac{y dF}{r - y} = 0$$

Zum gleichen Ergebnis führt folgende Ueberlegung:

Setzt man  $M \neq 0$ ,  $N \neq 0$ , so ist  $\Delta ds = 0$ , denn  $\Delta ds$  wird von der Normalkraft  $N$  hervorgerufen. Deshalb ist

$$0 = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{y dF}{r - y}$$

Weil  $E \neq 0$  und  $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \neq 0$  folgt erneut Gl. (1\*). Diese Gleichung lässt sich auswerten, um die Lage der Neutralaxe zu berechnen, d. h.  $r$  zu bestimmen:

$$\int \frac{y dF}{r - y} = \int \frac{-r + y}{r - y} dF + \int \frac{r dF}{r - y} = 0$$

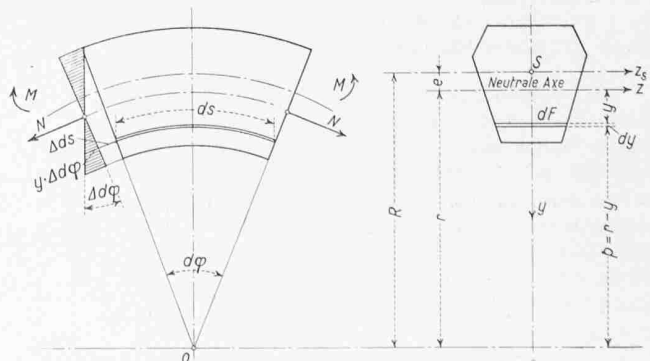


Bild 2. Element eines krummen Balkens



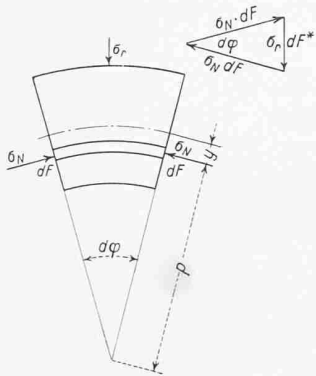


Bild 4. Radialspannungen

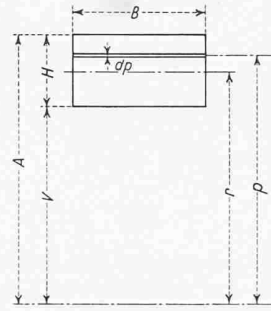


Bild 5. Rechteckquerschnitt

$$\sigma_r \cdot b \cdot (p \cdot d\varphi) = d\varphi \int \sigma_N \cdot dF$$

Hieraus folgt

$$\sigma_r = \frac{1}{b p} \cdot \int \sigma_N dF$$

Bei Vollquerschnitten wird die Querschnittsform durch die Radialspannungen  $\sigma_r$  kaum beeinflusst. Bei Profilträgern dagegen sind diese Beanspruchungen speziell zu untersuchen.

Im nächsten Abschnitt möge der Fall untersucht werden, bei dem die Querschnittshöhe  $H$  verhältnismässig klein ist gegenüber dem Krümmungsradius  $R$ . Es lässt sich abschätzen, welchen Fehler man begeht, wenn man an Stelle des eben aufgestellten Wertes  $I$  mit dem klassischen Trägheitsmoment  $J$  rechnet. Um ein Mass dafür zu haben, welchen Einfluss die Stabkrümmung auf die Randspannungen ausübt, setze man in Bild 3  $r = 10 H$ ,  $r - H/2 = 9,5 H$ ; für  $N = 0$  folgt für den Querschnitt, Bild 3, nach Gl. (3 und 4')

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{M}{b H^3} \cdot \frac{H/2}{9,5 H} = \frac{12 r}{b r H^3} M \frac{1/2}{9,5} = \\ &= \frac{6 \cdot 10 H}{b r H^3} M \cdot \frac{1}{9,5} = \\ &= 1,05 \cdot \frac{6}{b r H^2} \cdot M = 1,05 \frac{M}{W} \quad W = \text{Widerstandsmoment} \end{aligned}$$

Die Spannungserhöhung gegenüber dem geraden Balken beträgt somit 5%. Entsprechend findet man

$$\sigma_o \approx 0,95 \frac{M}{W}$$

**2. Ermittlung der Neutralaxe eines krummen Balkens mit Rechteckquerschnitt**

Gemäss Gl. (2) berechnet sich der Abstand der Neutralaxe beim krummen Balken nach

$$r = \frac{F}{\int \frac{dF}{r-y}}$$

Wir legen als Querschnitt ein Rechteck von der Breite  $B$  gemäss Bild 5 zu Grunde. Dann ist  $dF = B \cdot dp$ , und man hat

$$\begin{aligned} \int \frac{dF}{r-y} &= B \int \frac{dp}{r-y} = B \left[ \ln A - \ln (A-H) \right] = \\ &= -B \ln \frac{A-H}{A} = -B \ln \left( 1 - \frac{H}{A} \right) \end{aligned}$$

Für jene Werte  $H/A$ , welche kleiner als 1 sind, kann man  $\ln (1 - H/A)$  in eine Potenzreihe entwickeln. Für  $x < 1$  ist bekanntlich

$$-\ln (1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + \dots$$

Ersetzt man  $x$  durch  $H/A$ , so erhält man leicht

$$r = A \frac{1}{1 + \frac{H}{2A} + \frac{H^2}{3A^2} + \frac{H^3}{4A^3} + \dots}$$

Weil der Nenner wegen  $H/A \geq 0$  nicht verschwindet, kann man  $r$  in eine Potenzreihe von  $H/A$  entwickeln.

Wir suchen also die Koeffizienten  $a_0 a_1 a_2 \dots$  usw. zu bestimmen aus

$$(6) \quad \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Es liegt nahe, die Gleichung (6) beidseitig mit

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} \dots$$

zu multiplizieren.

Ordnet man nach der Multiplikation der rechten Seite nach fallenden Potenzen von  $x$ , so folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 + \frac{a_0}{2} &= 0 \\ a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{3} &= 0 \\ a_3 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{4} &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gestatten eine rekursive Berechnung der Koeffizienten, d. h. aus der ersten Gleichung findet man  $a_0$ , aus der zweiten  $a_1$ , aus der dritten  $a_2$  usw.

Die praktische Durchführung wird leider rasch mühsam und man weiss nicht, ob bei unbegrenztem, wachsenden Index  $n$  die Koeffizienten  $a_n$  endlich bleiben.

Um die Konvergenz abzuklären, setzt man

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots} \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \equiv f(x)$$

und berechnet  $f(x)$  als Mac Laurinsche Reihe

$$f(x) \equiv f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + R_n$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad 0 \leq \xi \leq x$$

wobei bekanntlich die Konvergenz der Potenzreihe für  $f(x)$  bewiesen werden muss, indem man zeigt, dass  $R_n$  mit unbegrenzt wachsendem Index  $n$  kleiner als jede noch so kleine, willkürlich wählbare, positive Zahl  $\epsilon$  ausfällt.

Wir dispensieren uns hier vom Konvergenzbeweis und teilen nur das Resultat mit. Für  $x \leq 0,02$  darf man setzen  $R_3 < 0,000 019$ ; damit wird

$$\begin{aligned} f(x) &\approx 1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} x^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{H}{A} - \frac{1}{12} \left( \frac{H}{A} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{1 + \frac{1}{2} \frac{H}{A} + \frac{1}{3} \left( \frac{H}{A} \right)^2 + \dots} = \\ &= A - \frac{H}{2} - \frac{1}{12} \frac{H^2}{A} \quad \text{Fehler} < 0,000 019 A \end{aligned}$$

Für  $A = 1000$  mm machen wir also einen Fehler von  $2/100$  mm, wenn wir mit

$$r = A - \frac{H}{2} - \frac{1}{12} \frac{H^2}{A}$$

rechnen. Dieser Fehler darf vernachlässigt werden.

Die klassische Theorie führt zu

$$r = A - \frac{H}{2}$$

und der Unterschied gegenüber der vorliegenden Theorie wird durch  $H^2/12A$  gemessen.

**3. Krümmungs-Widerstandsmoment**

An Stelle des Trägheitsmomentes tritt beim gekrümmten Balken gemäss Gl. (4) der Ausdruck

$$I = \int \frac{y^2 dF}{p} = \int \frac{y^2 dF}{r-y} = \frac{1}{r} \int \frac{y^2 dF}{1-y/r}$$

den wir als *Krümmungs-Widerstandsmoment* bezeichnen. Gemäss Bild 2 ist  $\left|\frac{y}{r}\right| < 1$ , womit die Entwicklung in eine geometrische Reihe möglich ist.

$$\frac{1}{1-\frac{y}{r}} = 1 + \frac{y}{r} + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \dots$$

Demnach ist für den Rechteckquerschnitt Bild 5

$$I = \frac{1}{r} \int y^2 \left(1 + \frac{y}{r} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{y^3}{r^3} + \dots\right) dF$$

$$(7) \quad I = \frac{B}{r} \left[ \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4r} + \frac{y^5}{5r^2} + \dots \right]$$

Nun sind die Integrationsgrenzen festzulegen. Wir rechnen zuvor mit  $H/A = 0,02$ ,  $A = 1000$ , also  $H = 20$  mm. Somit ist  $H^2/12A = 0,034$  mm. Die Berücksichtigung dieses Fehlers bei Verwendung des Rechenschiebers ist bereits zweifelhaft. Die Grenzen sind  $\frac{1}{2}H + 0,034$  und  $\frac{1}{2}H - 0,034 = 10,034$  bzw.  $9,966$ .

Schon der erste Summand 
$$\frac{By^3}{3r} \left[ \frac{H}{2} + \frac{1}{12} \frac{H^2}{A} - \left( \frac{H}{2} - \frac{1}{12} \frac{H^2}{A} \right) \right]$$

zeigt, dass  $H^2/12A$  nicht berücksichtigt werden muss:

$$\left(\frac{H}{2} + \frac{1}{12} \frac{H^2}{A}\right)^3 + \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{12} \frac{H^2}{A}\right)^3 = \frac{H^3}{4} + 3H \cdot \left(\frac{1}{12} \frac{H^2}{A}\right)^2$$

In Zahlen — wenn wir  $H = 2$  cm,  $A = 100$  cm einsetzen —

$$y^3 \left[ \frac{H}{2} + \frac{1}{12} \frac{H^2}{A} - \left( \frac{H}{2} - \frac{1}{12} \frac{H^2}{A} \right) \right] = 2 + 3 \cdot 2 \left( \frac{1}{12} \cdot 0,04 \right)^2 = 2,00007$$

Der entstehende Fehler darf vernachlässigt werden. Wir rechnen mit den Grenzen  $+\frac{1}{2}H$  und  $-\frac{1}{2}H$  und erhalten nach Gleichung (7)

$$\frac{y^3}{3} \left[ \frac{H}{2} - \frac{H}{2} \right] = \frac{H^3}{12} \quad \frac{y^4}{4r} \left[ \frac{H}{2} - \frac{H}{2} \right] = 0 \quad \frac{y^5}{5r^2} \left[ \frac{H}{2} - \frac{H}{2} \right] = \frac{H^5}{80r^2}$$

usw. Wir finden so

$$I = \frac{B}{r} \left( \frac{H^3}{12} + 0 + \frac{H^5}{80r^2} + 0 + \dots \right) = \frac{1}{r} \frac{BH^3}{12} \left( 1 + \frac{12}{80} \frac{H^2}{r^2} + \dots \right)$$

Also

$$(8) \quad I = \frac{J}{r} \left( 1 + \frac{12}{80} \frac{H^2}{r^2} \right)$$

Nach unseren Annahmen ist  $H = 2$  cm,  $r = A - \frac{1}{2}H = 99$  cm

$$\frac{12}{80} \left( \frac{2}{99} \right)^2 = 0,15 \cdot 0,00041 = 0,00007$$

Diese Abweichung ist so gering, dass wir stets mit genügender Genauigkeit

$$(9) \quad I = \frac{J}{r}$$

setzen werden.

Schluss folgt

**Der Ausbau des Kantonsspitals Winterthur**

Mitgeteilt vom Hochbauamt des Kantons Zürich

DK 725.51

Schluss von Seite 675

**III. Einzelheiten zu den in Betrieb genommenen Neubauten**

**Schwesternhaus**

Da in alten Gebäuden für das Personal auch weiterhin genug grössere Zimmer vorhanden sein werden, sind im neuen Schwesternhaus ausschliesslich Zimmer zu einem Bett erstellt worden. Ihre Bodenfläche beträgt einschliesslich eingebautem Schrank und Nische für das Waschbecken 10,2 m<sup>2</sup>, in den Eckzimmern etwas mehr. Mit einer Läutsignalanlage kann die Hausmutter den Schwestern Zeichen von bestimmter Bedeutung geben. Sie kann sie z. B. wecken, in die Halle oder an das in jedem Stockwerk in einer Kabine installierte Telephon rufen. In 13 Zimmern für Schwestern mit vermehrter Verantwortung sind Telephonapparate installiert. Die Hausmutter überblickt von ihrem Büro aus Hauseingang und Halle. In der Teeküche und im Schuhputzraum steht jeder Schwester ein kleines abschliessbares Fach zur Verfügung, im Handwaschraum ein Sack für Schmutzwäsche, im Keller ein grösserer Schrank.

Die Aussenmauern sind in Backstein, die Zwischenwände tragend in Zementsteinen hochgeführt. In den Zimmern ist über den 16 cm starken Massivdecken und dem Unterlagsboden nach guter Austrocknung Filzkarton lose aufgelegt und darauf Linoleum geklebt worden. An Installationen sind zu erwähnen je ein Abwurfschacht für schmutzige Wäsche und Kehricht, überall Radiatorenheizung, künstliche Lüftung in den Badezimmern, Duschen- und Abortanlagen sowie im Schmutzwäschesammelraum im Keller. Rauminhalt nach den Normen des S.I.A. berechnet: 12 160 m<sup>3</sup>. Kosten des Hoch-

baues Fr. 1 755 000.— oder rund Fr. 145.— pro Kubikmeter und Fr. 13 100.— pro Bett. Kosten des Mobiliars Franken 270 000.—.

Einteilung, Einrichtungen und Konstruktionen haben sich bewährt.

**Betriebsgebäude**

Mit der Stadt Winterthur ist vereinbart worden, dass der Kanton den Kranken- und Leichentransportdienst weiterführt. Da dies eine Angelegenheit der Gemeinden wäre, leistet die Stadt Winterthur an Bau und Betrieb eine angemessene Entschädigung. Die Garage ist dementsprechend ausgebaut und mit Benzintankstelle, Wagenwäscherei und Oelmagazin versehen. Die Verbindung von Wagenwäscherei und Schlosserei erleichtert die Vornahme kleiner Reparaturen.

Die Wäscherei wird nach dem Ausbau des Spitals innert fünf Tagen zu je siebeneinhalb Stunden etwa 13 600 kg oder stündlich 360 kg Trockenwäsche zu verarbeiten haben. Die schmutzige Wäsche wird von den Sammelstellen der verschiedenen Bautrakts über unterirdische Korridore in das Betriebsgebäude gebracht und mit dem Lift in den Sortierraum gefördert. Besonders schmutzige Wäsche wird über jene Tage, da nicht gewaschen wird, in fahrbaren Bottichen eingeweicht oder mit Chemikalien vorbehandelt. Der nach der Wäschehalle offene Sortierraum ist künstlich derart belüftet, dass keine Gerüche in den Waschraum dringen. Gleichartige