

# Calcul numérique des plaques et des parois minces

Autor(en): **Dubas, Pierre**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **79 (1961)**

Heft 17

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-65513>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Tabelle 3

	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$	$\mathfrak{M}_3$	$\mathfrak{M}_m$	Bel. gl.
1	2,37830	-0,96217			—
2	-0,96217	2,37830	-0,96217		—
		-0,38958			
3		1,98872	-0,96217		—
		-0,96217	2,37830	-0,96217	—
m			-0,46551		—
			1,91279	-0,96217	—
			-1,92434	2,37830	51,8915
				-0,96798	
				1,41032	51,8915
$\mathfrak{M} =$	3,623	8,954	18,508	36,794	$\frac{M_d}{h}$

Aus den Flanschbiegungsmomenten  $\mathfrak{M} = -EJ_{Fl} \cdot \eta''$  ergeben sich die Flanschausbiegungen  $\eta$  als Seilpolygon, während nun

## Calcul numérique des plaques et des parois minces

Par Pierre Dubas, professeur assistant, EPF, Zurich \*)

DK 624.073:518.12

### Introduction

Le présent article traitera le calcul numérique des corps plans minces, c'est-à-dire des corps dont l'épaisseur est faible par rapport aux dimensions du feuillet moyen, équidistant des faces. Selon le mode de sollicitation (fig. 1), on parle de *plaques minces fléchies*, lorsque les forces extérieures s'exercent normalement aux faces, ou de *parois minces*, lorsque les lignes d'action sont situées dans le feuillet moyen et que la distribution est uniforme sur l'épaisseur <sup>1)</sup>.

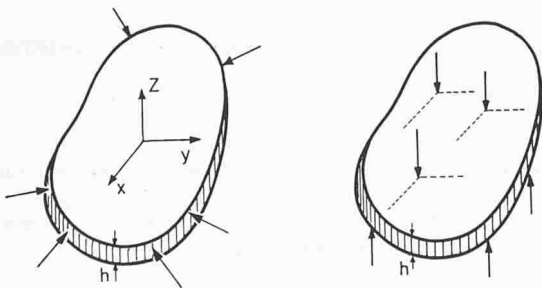


Fig. 1. Parois mince      Plaque mince fléchie

Nous nous proposons de montrer, dans les grandes lignes, comment on peut appliquer à ces problèmes à deux dimensions la *méthode du polygone funiculaire*. Dans son article qui précède, le professeur F. Stüssi, le créateur de cette méthode, en a exposé les principes; nous les supposerons donc connus.

### Théorie générale des plaques et des parois minces

Il n'est certes pas nécessaire de rappeler les hypothèses simplificatrices et les conditions d'équilibre et de compatibilité qui permettent d'établir les équations différentielles

\*) Conférence faite le 11 novembre 1960 à l'occasion de la réunion du groupe professionnel des ingénieurs S. I. A. des ponts et charpentiers.

1) Il s'agit donc d'un problème d'élasticité plane; on dit parfois tranche mince ou disque, ce qui est la traduction littérale du terme allemand *Scheibe*.

2) F. Stüssi: Numerische Methoden der Baustatik, Schweizerische Bauzeitung, page 275 du présent numéro.

die Torsionsanteile  $t = GJ_d \cdot \varphi' = GJ_d \cdot 2/h \cdot \eta'$  durch Differentiation mit den Gleichungen (6) bestimmt werden können, wenn man nicht vorzieht, diese durch numerische Lösung der Timoshenko-Gleichung (10a) mit  $t_A' = t_B' = 0$  direkt zu lösen.

Hätten wir mit  $\Delta x = l/4 = 100$  cm,  $\gamma = 0,151321$ , gerechnet, so hätten wir  $\mathfrak{M}_m = 37,101 M_d/h$ , also um 0,83% grösser erhalten, während mit  $\Delta x = l/2 = 200$  cm sich aus einer einzigen Gleichung  $\mathfrak{M}_m = 39,869 M_d/h$  oder um 8,36% grösser ergeben hätte. Wir können daraus schliessen, dass für die gewählte Teilung  $\Delta x = 50$  cm der Fehler von  $\mathfrak{M}_m$  kleiner als 0,1% sein wird. Diese praktisch mehr als genügende Genauigkeit wird dann eingehalten, wenn durch entsprechende Intervallteilung  $\gamma \leq 0,05$  gehalten wird.

8. Durch Kombination lassen sich die skizzierten Grundlagen erweitern, so dass auch höhere Differentialgleichungen numerisch gelöst und auch Membranen, Platten und Scheiben berechnet werden können. Immer aber muss das Ziel einer numerischen Methode sein, das gewünschte Ergebnis in genügender Genauigkeit mit einer möglichst kleinen Zahl von Bestimmungsgleichungen zu erhalten; an diesem Grundsatz ändern auch die neuesten Hilfsmittel, die elektronischen Rechenmaschinen, nichts.

régissant les problèmes bidimensionnels. Nous nous contenterons ici d'écrire ces équations bien connues <sup>3)</sup>.

Dans le cas des *plaques fléchies isotropes*, il s'agit de l'équation de *Lagrange*:

$$(1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}$$

où  $w$  représente l'ordonnée de la surface élastique,  $p$  désigne la charge appliquée et  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  est une constante dépendant de l'épaisseur  $h$  de la plaque et de l'élasticité de la matière.

Lorsque la plaque est anisotrope, ou plus spécialement orthogonalement anisotrope (en abrégé *orthotrope*), c'est-à-dire lorsqu'elle présente, par rapport à ses propriétés élastiques, deux directions privilégiées parallèles aux axes de coordonnées, on obtient l'équation de *Boussinesq*:

$$(2) \quad D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

Les constantes  $D_x, D_{xy}, D_y$  sont fonctions des rigidités à la flexion et à la torsion de la plaque orthotrope.

Ces équations différentielles permettent en principe de déterminer, en tenant compte des conditions au contour dont nous allons parler, les ordonnées  $w$  de la surface élastique. Les sollicitations intérieures sont alors données par les relations bien connues, reproduites ci-dessous pour les plaques isotropes:

$$(3a) \quad \text{Moments de flexion: } M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$(3b) \quad \text{Moment de torsion: } M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$(3c) \quad \text{Efforts tranchants: } Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$(3d) \quad \text{Réactions d'appui: } V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$M_y, Q_y, V_y$  par permutation de  $x$  et  $y$ .

3) On consultera par exemple, pour les plaques minces, S. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2ème édition, McGraw-Hill, 1959; pour les parois minces, S. Timoshenko et J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2ème édition, McGraw-Hill, 1951.

Les conditions au contour, qui caractérisent et individualisent le problème posé, doivent également être exprimées en fonction des ordonnées  $w$ . Si l'on considère, pour fixer les idées, un bord rectiligne parallèle à l'axe des  $y$ , d'équation  $x = a$ , on peut distinguer les cas principaux suivants:

*bord simplement appuyé*

$$(w)_{x=a} = 0$$

$$(M_x)_{x=a} = 0, \text{ soit } \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0, \text{ d'après l'équation (3a)}$$

puisque  $w$  et ses dérivées par rapport à  $y$  sont identiquement nulles tout le long du bord considéré.

*bord totalement encastré*

$$(w)_{x=a} = 0$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$$

*bord libre*

$$(M_x)_{x=a} = (V_x)_{x=a} = 0$$

On peut naturellement envisager d'autres conditions, par exemple un appui ou un encastrement élastique.

Quant aux *problèmes de l'élasticité plane* (parois minces), ils obéissent à l'équation différentielle suivante, lorsque la matière est *isotrope*:

$$(4) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

$F$  est la fonction de tension d'*Airy*, définie par les relations suivantes entre ses dérivées et les contraintes de l'état bidimensionnel étudié:

$$(5) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Ces relations qui satisfont directement aux conditions d'équilibre du parallépipède élémentaire, restent donc valables lorsque la matière est *orthotrope*, mais l'équation différentielle se généralise et devient:

$$(6) \quad E_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 E_{xy} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

Quant aux conditions au contour, elles peuvent être de deux sortes. On parle de *problèmes aux tensions* lorsque la répartition des contraintes tout le long du contour est connue (ou imposée). En considérant comme précédemment un bord parallèle à l'axe des  $y$ , on aura alors, d'une part [équation (5)]:

$$\text{pour } x = a: \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \text{ donné}$$

Par une double intégration ou, pour parler statique, à l'aide d'un polygone funiculaire, on remonte sans difficultés aux valeurs de la fonction  $F$  tout le long du bord<sup>4)</sup>.

La condition relative aux cisaillements, d'autre part, s'exprime par la relation:

$$\text{pour } x = a: \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \text{ donné}$$

$$\text{d'où } \frac{\partial F}{\partial x} = - \int \tau_{xy} dy + C$$

par une simple intégration le long du bord; la constante  $C$  est fixée par les conditions aux coins du contour.

<sup>4)</sup> Remarquons ici que le plan de référence de la fonction d'*Airy* peut être choisi de façon arbitraire; en effet, toute fonction  $F^*$  de la forme  $F^* = F + Ax + By + C$ , où  $A, B$  et  $C$  sont des constantes quelconques, satisfait à l'équation différentielle et conduit au même état de contraintes que la fonction  $F$ . Sur deux bords du contour, la ligne de fermeture du funiculaire peut donc être choisie de façon arbitraire; il suffit que les deux lignes se coupent, définissant ainsi le plan de référence.

Quant aux *problèmes aux déformations*, ils concernent les connexions ou coactions entre des éléments en contact; les conditions au contour expriment alors la compatibilité des déformations des éléments jointifs. Il s'agit donc de problèmes hyperstatiques au plus haut degré. Nous mentionnerons simplement ici le cas élémentaire d'une paroi mince liée, le long de l'un de ses bords parallèle à l'axe des  $y$ , à une nervure supposée indéformable longitudinalement mais sans rigidité transversale appréciable (perpendiculairement au bord envisagé). La condition à remplir s'écrit:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 0$$

La comparaison des équations différentielles (1) et (2) des plaques minces et des équations (4) et (6) des parois minces montre une analogie frappante. Il en est de même pour les conditions au contour; dans le problème aux tensions, par exemple, les valeurs de la fonction et de sa dérivée première sont imposées le long du contour, ce qui correspond à une plaque totalement encastrée. On peut donc se représenter la fonction d'*Airy* comme la surface élastique d'une plaque fléchie, qui ne serait soumise à l'action d'aucune force extérieure ( $p = 0$ ), mais dont le pourtour devrait suivre des déformations imposées. Comme le montrent les relations (5), les contraintes correspondent aux courbures de la plaque le long de la fibre perpendiculaire à la direction de la contrainte considérée. La contrainte de cisaillement se déduit de la torsion géodésique de la surface élastique.

### Résolution des équations différentielles des plaques et des parois minces par la méthode du polygone funiculaire

Comme nous venons de le rappeler, les problèmes de plaques fléchies ou de parois minces se ramènent à la résolution d'une équation aux dérivées partielles du type:

$$(2) \quad D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

si l'on désigne en général par  $w$  la fonction inconnue.

Les coefficients  $D_x, D_{xy}, D_y$  sont constants sur toute la surface considérée, tandis que la fonction de charge  $p$  peut varier d'une façon quelconque. Il faut de plus tenir compte des conditions au contour, souvent exprimées par des relations ne contenant que les ordonnées  $w$  (ou  $F$ ) inconnues et leurs dérivées premières ou secondes.

Des solutions mathématiques simples n'existent que pour des problèmes élémentaires, souvent sans intérêt pratique. Dans la plupart des cas, on doit recourir à des développements analytiques compliqués, qui ne sont guère du ressort du praticien. On comprend dès lors l'intérêt des méthodes numériques, plus accessibles.

Rappelons ici la *méthode aux différences finies*, introduite par exemple par *Marcus* dans l'étude des plaques fléchies. Cette méthode pêche malheureusement par son manque de précision; il semblait donc intéressant d'étendre aux problèmes bidimensionnels, régis par l'équation (2), la *méthode du polygone funiculaire* dont le professeur *F. Stüssi* montre dans son article précité<sup>2)</sup> la précision étonnante. Ceci est d'autant plus indiqué que l'équation (2) représente au fond une généralisation de l'équation bien connue de la poutre fléchie<sup>5)</sup>  $d^4 w/dx^4 = p/EJ$  correspondant à un double funiculaire.

Comment allons-nous résoudre l'équation différentielle (2) qui nous intéresse? Au lieu de chercher à connaître les valeurs de la fonction  $w$  (ou  $F$ ) en chaque point du domaine considéré, nous nous contenterons de déterminer ces valeurs en un nombre fini de points; pour ce faire, nous décrirons le domaine par un réseau rectangulaire. Toutes les mailles, parallèlement à l'axe des  $x$ , auront la même longueur  $\Delta x$ ;

<sup>5)</sup> Chaque terme de l'équation (2) peut d'ailleurs être considéré comme une charge  $p_x, p_{xy}, p_y$ , ce qui permet de résoudre le problème en conservant tout au long des calculs l'analogie avec la poutre fléchie; voir à ce sujet *Ch. Dubas*: Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies, Publ. no 23 de l'Institut de statique appliquée à l'EPF, Leemann, Zurich 1948, p. 34.

dans la direction  $y$ , on aura  $\Delta y$  (fig. 2). Il est bien évident que ce réseau convient spécialement aux surfaces rectangulaires, mais on peut également traiter des trapèzes ou des parallélogrammes.

C'est aux nœuds du réseau que l'on va remplir l'équation différentielle (2). A cet effet, on élimine les dérivées partielles en  $y$  substituant des relations liant les valeurs de la fonction inconnue ( $w$  ou  $F$ ) aux nœuds; ces valeurs nodales deviennent ainsi les inconnues du problème. Comme on peut écrire en chaque nœud l'équation différentielle transformée, en tenant compte sur les bords des conditions au contour, on obtiendra autant d'équations que d'inconnues. Ces équations algébriques sont linéaires et leur résolution n'offre pas de difficultés majeures, bien qu'elle soit fastidieuse si le nombre d'inconnues est élevé<sup>6)</sup>.

L'élimination des dérivées s'opère naturellement à l'aide de la relation du polygone funiculaire. On peut utiliser à cet effet divers procédés; nous n'examinerons ici que le procédé dit explicite ou formel parce qu'il conduit à des schémas fixes pour l'établissement des équations linéaires, schémas semblables en principe à ceux de la méthode aux différences finies<sup>7)</sup>.

Nous allons montrer maintenant comment on établit ces schémas. Donnons d'abord les formules de base utilisées.

Il s'agit bien entendu avant tout de la relation du polygone funiculaire. Dans notre cas, c'est-à-dire pour des dérivées partielles secondes et quatrièmes, la relation (3) de l'article précité<sup>2)</sup> du professeur F. Stüssi s'écrit:

relation entre ordonnées  $w$  et dérivées secondes

$$(7) \quad w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1} = \Delta x K_m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

relation entre dérivées secondes et dérivées quatrièmes

$$(8) \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m-1} - 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} = \Delta x K_m \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)$$

On pourrait bien entendu écrire des relations semblables pour les dérivées par rapport à  $y$ , le long des lignes verticales du réseau.

Les relations (7) et (8) sont exactes, puisque l'on n'a fait aucune hypothèse sur la forme de la charge nodale  $K$ . Si l'on admet des charges nodales paraboliques, la relation (7) devient, par analogie avec la relation (5a) de l'article précité<sup>2)</sup>:

$$(9) \quad w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 10 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right]$$

Cette formule est approchée et sa précision dépendra de la plus ou moins bonne concordance de la courbe réelle des  $\partial^2 w / \partial x^2$  avec la parabole déterminée par les trois valeurs considérées.

<sup>6)</sup> Dans ce cas, l'utilisation de machines à calculer électroniques sera intéressante. Remarquons ici en passant que la capacité de ces machines est malgré tout limitée; la méthode du polygone funiculaire qui conduit, pour la même précision, à un nombre d'inconnues bien inférieur à celui de la méthode aux différences finies, conserve donc ses avantages.

<sup>7)</sup> Pour certaines conditions au contour, par exemple le bord libre d'une plaque fléchie, ce procédé n'est pas applicable, parce que les relations au bord contiennent des dérivées troisièmes des ordonnées inconnues; l'élimination s'opère alors directement, à partir du réseau particulier considéré. Voir à ce sujet P. Dubas: Calcul numérique des plaques et des parois minces, Publ. no 27 de l'Institut de statique appliquée à l'EPF, Leemann, Zurich, 1955.

Pour simplifier l'écriture dans les éliminations, nous introduisons la notion de charge nodale généralisée  $\bar{K}$ . De la charge nodale le long d'une ligne, on passe en effet facilement à la charge nodale  $\bar{K}$  d'une surcharge  $p$  répartie sur une surface. Si l'on admet par exemple une distribution parabolique dans les deux sens, l'équation (4b) du professeur F. Stüssi se généralise en (fig. 2):

$$(10) \quad \bar{K}_{m,n}(p) = \frac{\Delta y}{12} \begin{vmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{vmatrix} K_m(p) = \frac{\Delta x}{12} \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{vmatrix} K_n(p) = \frac{\Delta x \Delta y}{144} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} p$$

Revenons maintenant à l'équation différentielle (2); elle doit être bien entendu satisfaite en chaque point du domaine et en particulier en tous les nœuds du réseau choisi. Rien ne nous empêche donc de multiplier, en un nœud déterminé, tous les termes de l'équation (2) par un même coefficient; de procéder de même, en un autre nœud du réseau, avec un autre coefficient; de sommer enfin les équations, écrites aux divers nœuds, ainsi multipliées. Si les coefficients choisis correspondent à ceux donnant les charges nodales généralisées  $\bar{K}$ , on pourra donc écrire, sous une forme symbolique condensée:

$$(11) \quad D_x \bar{K} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + 2 D_{xy} \bar{K} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + D_y \bar{K} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \bar{K}(p)$$

Examinons le premier terme de gauche. En explicitant le symbole comme indiqué dans la formule (10) et en tenant compte de la relation du polygone funiculaire (8), ce terme s'écrit:

$$(12) \quad \bar{K} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \frac{\Delta y}{12} \begin{vmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{vmatrix} K_m \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \frac{\Delta y}{12 \Delta x} \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ +10 & -20 & +10 \\ +1 & -2 & +1 \end{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Quant à la relation (9), rien ne nous empêche de l'écrire 1 fois sur la ligne supérieure et inférieure et 10 fois sur la ligne médiane. En passant tous les termes à droite on obtient, après multiplication par  $-\frac{\Delta y}{\Delta x^3}$

$$(13) \quad 0 = \frac{\Delta y}{12 \Delta x} \begin{vmatrix} -1 & -10 & -1 \\ -10 & -100 & -10 \\ -1 & -10 & -1 \end{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\Delta y}{\Delta x^3} \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ +10 & -20 & +10 \\ +1 & -2 & +1 \end{vmatrix} w$$

Par addition nœud à nœud de (12) et (13) il vient:

$$\bar{K} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{vmatrix} -1 \\ -10 \\ -1 \end{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\Delta y}{\Delta x^3} \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ +10 & -20 & +10 \\ +1 & -2 & +1 \end{vmatrix} w$$

Le second terme de l'équation (11) devient de la même façon:

$$\bar{K} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = \frac{\Delta y}{12} \begin{vmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{vmatrix} K_m \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = \frac{\Delta y}{12 \Delta x} \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ +10 & -20 & +10 \\ +1 & -2 & +1 \end{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

En considérant les relations semblables à (9), écrites pour les dérivées par rapport à  $y$  le long des lignes verticales, on obtient directement:

$$\bar{K} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ -2 & +4 & -2 \\ +1 & -2 & +1 \end{vmatrix} w$$

Quant au troisième terme, il se transforme comme le premier, avec simple permutation de  $x$  et de  $y$  ainsi que des lignes horizontales et verticales. On peut donc écrire la relation intermédiaire suivante, après multiplication par  $\frac{1}{\Delta x \Delta y}$  :

$$(14) \quad \frac{D_x}{\Delta x^2} \begin{vmatrix} -1 & & \\ -10 & & \\ -1 & & \end{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D_x}{\Delta x^4} \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ +10 & -20 & +10 \\ +1 & -2 & +1 \end{vmatrix} w +$$

$$+ 2 \frac{D_{xy}}{\Delta x^2 \Delta y^2} \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ -2 & +4 & -2 \\ +1 & -2 & +1 \end{vmatrix} w +$$

$$+ \frac{D_y}{\Delta y^2} \begin{vmatrix} -1 & -10 & -1 \end{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{D_y}{\Delta y^4} \begin{vmatrix} +1 & +10 & +1 \\ -2 & -20 & -2 \\ +1 & +10 & +1 \end{vmatrix} w = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \bar{K}(p)$$

Pour éliminer les dérivées partielles du deuxième ordre restantes, il suffit d'écrire la relation intermédiaire (14), elle aussi valable en chaque point du réseau, un certain nombre de fois au nœud considéré et dans les points voisins du réseau.

Pour un nœud intérieur, c'est-à-dire situé au moins à deux mailles du contour, il s'avère que l'élimination des dérivées secondes est possible si l'on écrit la relation (14) selon le schéma même des charges nodales [formule (10)]. On obtient en effet ainsi des groupes ternaires de dérivées secondes, de la forme 1-10-1, qui s'éliminent grâce à la relation (9).

Sans donner le détail des opérations, nous pouvons donc écrire le schéma général (A).

Schéma (A)

Indépendant des conditions au contour

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ +20 & -80 & +120 & -80 & +20 \\ +102 & -408 & +612 & -408 & +102 \\ +20 & -80 & +120 & -80 & +20 \\ +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \end{vmatrix} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{vmatrix} +1 & +8 & -18 & +8 & +1 \\ +8 & +64 & -144 & +64 & +8 \\ -18 & -144 & +324 & -144 & -18 \\ +8 & +64 & -144 & +64 & +8 \\ +1 & +8 & -18 & +8 & +1 \end{vmatrix} \cdot w$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} +1 & +20 & +102 & +20 & +1 \\ -4 & -80 & -408 & -80 & -4 \\ +6 & +120 & +612 & +120 & +6 \\ -4 & -80 & -408 & -80 & -4 \\ +1 & +20 & +102 & +20 & +1 \end{vmatrix} \cdot w = \begin{vmatrix} +1 & +10 & +1 \\ +10 & +100 & +10 \\ +1 & +10 & +1 \end{vmatrix} \cdot \Delta x \Delta y \bar{K}(p)$$

Schéma (B)

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$  donnée

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & +5 & -4 & +1 \\ -40 & +100 & -80 & +20 \\ -204 & +510 & -408 & +102 \\ -40 & +100 & -80 & +20 \\ -2 & +5 & -4 & +1 \end{vmatrix} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{vmatrix} +10 & -19 & +8 & +1 \\ +80 & -152 & +64 & +8 \\ -180 & +342 & -144 & -18 \\ +80 & -152 & +64 & +8 \\ +10 & -19 & +8 & +1 \end{vmatrix} \cdot w$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} +10 & +101 & +20 & +1 \\ -40 & -404 & -80 & -4 \\ +60 & +606 & +120 & +6 \\ -40 & -404 & -80 & -4 \\ +10 & +101 & +20 & +1 \end{vmatrix} \cdot w = D_x \Delta y^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ -20 \\ -102 \\ -20 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \begin{vmatrix} +10 & +1 \\ +100 & +10 \\ +10 & +1 \end{vmatrix} \cdot \Delta x \Delta y \bar{K}(p)$$

Schéma (B')

Sur la ligne  $n + 1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}$  donnée

Tourner le schéma (B) de  $\pi/2$  et permuter  $x$  et  $y$

Rappelons que ce schéma donne, pour les points intérieurs, les coefficients des équations linéaires en  $w$  remplaçant l'équation différentielle (2). Dans le terme de droite,  $\bar{K}(p)$  est la charge nodale généralisée, donnée par exemple par la relation (10) pour une répartition parabolique.

Pour les premières lignes du réseau, à 1 maille du bord, il faut tenir compte des conditions au contour imposées. Nous n'examinerons ici que des bords parallèles aux axes de coordonnées, avec des conditions au contour de la forme (bord parallèle à l'axe des  $y$ , par exemple):

pour  $x = a$

$$w \text{ donné et } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ donné}$$

$$\text{ou } w \text{ donné et } \frac{\partial w}{\partial x} \text{ donné}$$

La condition relative aux ordonnées  $w$  sur le contour est facile à satisfaire: il suffit de multiplier les valeurs données par les coefficients des schémas, correspondant aux points sur les bords; on obtient ainsi des termes connus des équations.

Quant à la condition  $\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a}$  donné, elle ne pose guère de problème puisque la relation intermédiaire (14) contient aussi des dérivées secondes. L'élimination s'opère comme pour les points intérieurs, mais en écrivant la relation intermédiaire (14) sous la forme

$$\begin{matrix} +10 & +1 & \text{le long d'un bord} \\ +100 & +10 & \\ +10 & +1 & \\ \text{et} & & \text{en un coin} \\ +100 & +10 & \\ +10 & +1 & \end{matrix}$$

Schéma (C)

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial x}$  donnée

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -11 & +18 & -9 & +2 \\ \hline -220 & +360 & -180 & +40 \\ \hline -1122 & +1836 & -918 & +204 \\ \hline -220 & +360 & -180 & +40 \\ \hline -11 & +18 & -9 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +16 & -30 & +12 & +2 \\ \hline +128 & -240 & +96 & +16 \\ \hline -288 & +540 & -216 & -36 \\ \hline +128 & -240 & +96 & +16 \\ \hline +16 & -30 & +12 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline -64 & -648 & -144 & -8 \\ \hline +96 & +972 & +216 & +12 \\ \hline -64 & -648 & -144 & -8 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w = D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline +6 \\ \hline +120 \\ \hline +612 \\ \hline +120 \\ \hline +6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial w^0}{\partial x} \Delta x + \begin{array}{|c|c|} \hline +16 & +2 \\ \hline +160 & +20 \\ \hline +16 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y \bar{K}(p)$$

Schéma (C C')

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial x}$  donnée

Sur la ligne  $n + 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial y}$  donnée

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -88 & +144 & -72 & +16 \\ \hline -891 & +1458 & -729 & +162 \\ \hline -198 & +324 & -162 & +36 \\ \hline -11 & +18 & -9 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +128 & -240 & +96 & +16 \\ \hline -240 & +450 & -180 & -30 \\ \hline +96 & -180 & +72 & +12 \\ \hline +16 & -30 & +12 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -88 & -891 & -198 & -11 \\ \hline +144 & +1458 & +324 & +18 \\ \hline -72 & -729 & -162 & -9 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w = D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline +48 \\ \hline +486 \\ \hline +108 \\ \hline +6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial w^0}{\partial x} \Delta x$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +48 & +486 & +108 & +6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial w^0}{\partial y} \Delta y + \begin{array}{|c|c|} \hline +128 & +16 \\ \hline +16 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y \bar{K}(p)$$

Schéma (C')

Sur la ligne  $n + 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial y}$  donnée

Tourner le schéma (C) de  $\pi/2$  et permuter  $x$  et  $y$

La condition  $\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a}$  donné est un peu plus délicate. Il faut d'abord établir une relation entre la dérivée première  $\partial w/\partial x$  et les ordonnées  $w$  et leurs dérivées secondes  $\partial^2 w/\partial x^2$ , seules à intervenir dans (14). Cette relation se déduit de l'analogie entre l'effort tranchant et la dérivée première du moment de flexion. Il s'agit donc de la relation (6a) de l'article précité<sup>2)</sup> du professeur F. Stüssi, relation qui devient:

$$(15) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{m-1} \Delta x = w_m - w_{m-1} - \frac{\Delta x^2}{12} \left[ 3,5 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m - 0,5 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right]$$

En écrivant la relation intermédiaire sous la forme

$$\begin{array}{l} + 16 + 2 \\ + 160 + 20 \\ + 16 + 2 \end{array}$$

on élimine facilement les dérivées secondes à l'aide de la formule (9), si l'on prend soin d'ajouter sur chaque ligne la relation (15) multipliée par un coefficient approprié. Pour les coins, on procède de façon analogue. Sans entrer dans les

détails, nous nous contenterons de reproduire ici les schémas<sup>8)</sup> obtenus (pour les dénominations, voir fig. 2).

En résolvant les équations linéaires, établies à l'aide des schémas reproduits ci-dessus, on obtient les valeurs des ordonnées inconnues  $w$  aux divers nœuds du réseau.

Pour déterminer les sollicitations intérieures ( $M, Q, V$ ) dans les plaques fléchies, ou les contraintes de l'état d'élasticité plane, on a besoin des dérivées de la fonction  $w$  (ou  $F$ ), comme le montrent les relations (3) et (5), en particulier des dérivées secondes.

A cet effet, on utilise de nouveau la relation du polygone funiculaire (9), qui donne justement une relation entre les valeurs des ordonnées  $w$  en certains points et celles des dérivées secondes aux mêmes points. En écrivant cette relation aux divers points d'une ligne du réseau choisi et en tenant compte des conditions aux

bords<sup>9)</sup> (c'est-à-dire aux extrémités des lignes considérées), on obtient autant d'équations linéaires qu'il y a de dérivées inconnues.

Pour une ligne comportant un nombre de mailles déterminé, on établira une fois pour toutes des tableaux permettant de passer, par multiplication et sommation, des ordonnées  $w$  aux dérivées secondes  $w''$ . Nous donnons à titre d'exemple les deux tableaux<sup>10)</sup> ci-dessous:

Tableau (14). Quatre mailles, dérivée seconde  $w''$  donnée au bord

Cas symétrique			
	$w_1 = w_{1*} = 1$	$w_2 = w_{2*} = 1$	$w_3 = 1$
	$w_1'' = w_{1*}'' = 1/l^2$		
	$w = 0$ partout		
	$w_1'' = w_{1*}'' = 0$		
$w_2''$	+ 19,591837	- 43,102041	+ 23,510204
$w_3''$	- 3,918367	+ 47,020408	- 43,102041
			+ 0,02040816

8) Ces schémas sont tirés de l'ouvrage cité à la note 7). Comme cette publication est épuisée, nous avons pensé utile de reproduire les schémas in extenso dans le présent article.

9) Ces conditions, pour les cas usuels que nous avons seuls considérés ici, s'expriment toutes en fonction des inconnues  $w$  et des dérivées secondes; pour  $\partial w/\partial y$  donné, on tiendra bien entendu compte de la formule (15).

10) Rappelons que dans la méthode aux différences, la dérivée seconde en un point s'exprime par  $(1/\Delta x^2)(w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1})$ , c'est-à-dire uniquement par l'ordonnée au point considéré et aux deux points voisins. La différentiation est donc plus facile à effectuer, mais elle est beaucoup moins précise.

Tableau (II<sub>s</sub>). Huit mailles, dérivée première  $w'$  donnée au bord

Cas symétrique						
	$w_1 = w_{1^*} = 1$	$w_2 = w_{2^*} = 1$	$w_3 = w_{3^*} = 1$	$w_4 = w_{4^*} = 1$	$w_5 = 1$	$w_1' \Delta x =$ $= w_{1^*}' \Delta x = 1$ $w = 0$ partout
	$w_1 = w_{1^*} = 0$					
$w_1''$	-314,76273	+408,55756	-115,44558	+24,05638	-2,40564	-240,61394
$w_2''$	+109,38136	-204,27878	+105,72279	-12,02819	+1,20282	+24,30697
$w_3''$	-11,05090	+98,23023	-173,78230	+96,22553	-9,62255	-2,45576
$w_4''$	+1,12764	-10,02349	+96,10023	-182,22709	+95,02271	+0,25059
$w_5''$	-0,22553	+2,00470	-19,22005	+190,04542	-172,60454	-0,05012

Schéma (B B')

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$  donnée

Sur la ligne  $n + 1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}$  donnée

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -20 & +50 & -40 & +10 \\ \hline -202 & +505 & -404 & +101 \\ \hline -40 & +100 & -80 & +20 \\ \hline -2 & +5 & -4 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +100 & -190 & +80 & +10 \\ \hline -190 & +361 & -152 & -19 \\ \hline +80 & -152 & +64 & +8 \\ \hline +10 & -19 & +8 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -20 & -202 & -40 & -2 \\ \hline +50 & +505 & +100 & +5 \\ \hline -40 & -404 & -80 & -4 \\ \hline +10 & +101 & +20 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w = D_x \Delta y^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline -10 \\ \hline -101 \\ \hline -20 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$$

$$+ D_y \cdot \Delta x^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -10 & -101 & -20 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + \begin{array}{|c|c|} \hline +100 & +10 \\ \hline +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y \bar{K}(p)$$

Schéma (C B')

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial x}$  donnée

Sur la ligne  $n + 1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}$  donnée

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -110 & +180 & -90 & +20 \\ \hline -1111 & +1818 & -909 & +202 \\ \hline -220 & +360 & -180 & +40 \\ \hline -11 & +18 & -9 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +160 & -300 & +120 & +20 \\ \hline -304 & +570 & -228 & -38 \\ \hline +128 & -240 & +96 & +16 \\ \hline +16 & -30 & +12 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -32 & -324 & -72 & -4 \\ \hline +80 & +810 & +180 & +10 \\ \hline -64 & -648 & -144 & -8 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w = D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline +60 \\ \hline +606 \\ \hline +120 \\ \hline +6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial w^0}{\partial x} \Delta x$$

$$+ D_y \Delta x^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -16 & -162 & -36 & -2 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + \begin{array}{|c|c|} \hline +160 & +20 \\ \hline +16 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y \bar{K}(p)$$

Schéma (B C')

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$  donnée

Sur la ligne  $n + 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial y}$  donnée

Tourner le schéma (C B') de  $\pi/2$  et permuter  $x$  et  $y$ .

11) Le point 1 désigne le point sur un bord, le point 1\* sur l'autre bord, et ainsi de suite.

Ces tableaux s'appliquent à des courbes  $w$  symétriques par rapport au milieu de la ligne<sup>11)</sup>. On peut établir des tableaux analogues pour le cas antisymétrique par rapport au centre. La lettre  $l$  désigne la longueur totale de la ligne considérée.

Exemple numérique

Nous pensons utile de donner ici un exemple complet. Il s'agit d'un cas de plaque fléchie, ce qui permettra une comparaison avec les résultats donnés par la méthode analytique.

Les données du problème ressortent de la figure 3: la plaque, admise isotrope, est rectangulaire, avec les deux bords étroits encastés et les autres simplement appuyés. Avec les notations de la figure, les conditions au contour sont donc les suivantes:

$$(16) \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

pour  $x = \pm \frac{a}{2}$

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

pour  $y = \pm \frac{b}{2}$

Pour écrire le système d'équations linéaires en  $w$ , on utilisera donc le schéma (A) pour les nœuds intérieurs, le schéma (B) pour les nœuds sur la première ligne parallèle au bord appuyé, le schéma (C') pour les nœuds sur la première ligne parallèle au bord encasté et le schéma (BC') pour le nœud au coin. Comme les éléments parallèles à l'axe des  $y$  sont encastés, tandis que ceux parallèles à l'axe des  $x$  sont appuyés, on a choisi un réseau à 8 mailles dans le sens  $y$  et à 4 mailles dans le sens  $x$ . On obtient ainsi une précision du même ordre dans les deux directions.

On a donc  $\Delta x = a/4$  et  $\Delta y = b/8 = 1,6a/8$ ; les coefficients multipliant les termes des schémas valent ainsi:  $(\Delta y/\Delta x)^2 = (0,2/0,25)^2 = 0,64$  pour le premier terme; 2 pour le second et  $(\Delta x/\Delta y)^2 = (0,25/0,2) = 1,5625$  pour le troisième. Comme  $D_x = D_{xy} = D_y = D$ , on peut passer ces coefficients constants à droite, dans le terme de charge [voir équation (1)]. Pour faciliter le travail d'établissement des équations, nous groupons en un seul les trois termes en  $w$  de chaque schéma, après multiplication par les coefficients respectifs que nous venons de déterminer, ce qui donne, dans notre cas particulier, les schémas spéciaux suivants, que nous distinguerons par un astérisque\*:

Schéma (A)\* Indépendant des conditions au contour

+ 4,2025	+ 44,69	+ 127,215	+ 44,69	+ 4,2025
+ 22,55	- 48,2	- 848,7	- 48,2	+ 22,55
+ 38,655	-361,62	+1995,93	-361,62	+ 38,655
+ 22,55	- 48,2	- 848,7	- 48,2	+ 22,55
+ 4,2025	+ 44,69	+ 127,215	+ 44,69	+ 4,2025

Schéma (B)\* Bord appuyé, parallèle à l'axe des  $y$

	+ 123,0125	+ 44,69	+ 4,2025	
	- 871,25	- 48,2	+ 22,55	
	+ 1957,275	- 361,62	+ 38,655	$\cdot w$
	- 871,25	- 48,2	+ 22,55	
	+ 123,0125	+ 44,69	+ 4,2025	

Schéma (C')\* Bord encastré, parallèle à l'axe des  $x$

+71,805	-332,22	+4570,83	-332,22	+71,805	
+32,9775	-81,41	-1728,135	-181,41	+32,9775	$\cdot w$
+ 8,405	+ 89,38	+ 254,43	+ 89,38	+ 8,405	

Schéma (BC')\* Coin: bord appuyé parallèle à l'axe des  $y$   
bord encastré parallèle à l'axe des  $x$

	+4499,025	-332,2	+71,805	
	-1761,1125	-181,41	+32,9775	$\cdot w$
	+ 246,05	+ 89,38	+ 8,405	

La charge  $p$  sera admise uniformément répartie sur toute la surface. Comme la plaque est symétrique par rapport aux 2 axes de coordonnées et qu'elle est symétriquement chargée, la surface élastique présentera les mêmes symétries et l'on n'a que 8 ordonnées  $w$  inconnues, comme cela ressort de la numérotation adoptée dans la figure 3.

Il est maintenant aisé d'écrire les 8 équations linéaires qui permettront de déterminer les ordonnées  $w$ . On tiendra bien entendu compte des nœuds intervenant plusieurs fois dans un même schéma par raison de symétrie. Pour la première équation, par exemple, écrite en  $a$  à l'aide du schéma (A)\*, le coefficient de  $b$  vaudra  $2 \cdot (-361,62)$ , celui de  $c$   $2 \cdot (-848,7)$ , celui de  $d$   $4 \cdot (-48,2)$  etc. Pour obtenir une matrice en grande partie symétrique par rapport à la diagonale principale, il faut dès lors multiplier par 2 les équations écrites en  $b$  et  $c$ , par 4 celle écrite en  $d$  etc. Ces coefficients sont indiqués dans la première colonne du système d'équations, reproduit plus loin, tandis que la seconde colonne désigne le schéma employé et la troisième le nœud où est écrite l'équation.

Quant à la dernière colonne, elle contient les termes de charge, donnés ici uniquement par les termes en  $\bar{K}$  des schémas généraux puisque ordonnées  $w^0$ , dérivées premières  $\partial w^0 / \partial y$  et dérivées secondes  $\partial^2 w^0 / \partial x^2$  sont nulles au contour selon les conditions (16). La charge nodale d'une surcharge uniformément répartie sur une surface vaut évidemment  $\bar{K}(p) = p \Delta x \Delta y$ , comme cela ressort d'ailleurs également de la relation (10). Le produit  $\Delta x \Delta y \bar{K}(p)$  vaut donc  $p \Delta x^2 \Delta y^2$  soit  $0,0025 a^4 p$  avec  $\Delta x = 0,25 a$  et  $\Delta y = 0,2 a$ .

Le terme de charge du schéma (A) s'élève ainsi à:

$$144 \cdot 0,0025 a^4 p = 0,36 a^4 p.$$

On obtient de même  $0,33 a^4 p$  pour (B),  $0,54 a^4 p$  pour (C') et  $0,495 a^4 p$  pour (BC').

La résolution du système se fait aisément, par exemple grâce à l'algorithme de Gauss. Les solutions trouvées sont indiquées sous le tableau III.

Pour déterminer les moments de flexion, il faut connaître les dérivées secondes [voir équation (3a)]. On utilise à cet effet le tableau (I<sub>4</sub>) pour les lignes parallèles à l'axe des  $x$ , avec les conditions aux bords  $w_1 = w_1' = 0$  et  $w_1'' = w_1''' = 0$ . Au point  $a$  on obtient ainsi

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_a = w_3'' = \frac{1}{a^2} (+ 47,020408 \cdot 4,34510 - 43,102041 \cdot 6,04682) \cdot 10^{-3} \frac{p a^4}{D} = - \frac{p a^2}{D} 0,05632$$

Pour les dérivées  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ , on a recours au tableau (II<sub>8</sub>), avec  $w_1 = w_1' = 0$  et  $w_1'' = w_1''' = 0$ , tandis que, sur la ligne centrale,  $w_2 = w_9$ ,  $w_3 = w_6$ ,  $w_4 = w_7$  et  $w_5 = w_8$ .

$$\text{On trouve facilement } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_m = w_1'' = + \frac{p a^2}{D} 0,10824$$

$$\text{et } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_a = w_3'' = - \frac{p a^2}{D} 0,03004$$

Si l'on admet un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ , les moments de flexion valent donc, d'après les relations (3):

$$\text{Point } a: M_x = p a^2 (0,05632 + 0,3 \cdot 0,03004) = + 0,06533 p a^2$$

$$M_y = p a^2 (0,03004 + 0,3 \cdot 0,05632) = + 0,04694 p a^2$$

$$\text{Bord } m: M_y = - 0,1082 p a^2$$

Rappelons encore que l'ordonnée maximale vaut  $w_{\max} = 0,006047 p a^4 / D$ . Les valeurs données par Timoshenko dans son ouvrage précité<sup>3)</sup> (page 187) sont de

$$+ 0,0650 \text{ pour } (M_x)_a$$

$$+ 0,0469 \text{ pour } (M_y)_a$$

$$- 0,1090 \text{ pour } (M_y)_m$$

$$+ 0,00603 \text{ pour } w_{\max}$$

Ces valeurs, que l'on peut considérer comme exactes, donnent des différences de

$$+ 0,5 \%$$

$$+ 0,1 \%$$

$$- 0,7 \%$$

$$\text{et } + 0,3 \%$$

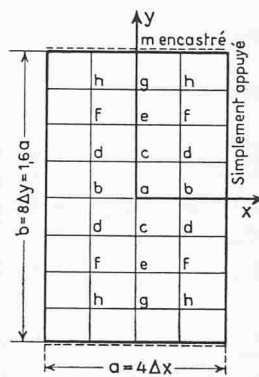


Fig. 3

La précision est donc remarquable, bien que la trame soit assez lâche. En poussant plus loin la différentiation, on déterminerait sans difficultés, à l'aide de relations analogues à (15), les moments de torsion, efforts tranchants etc.

#### Autres exemples d'application

L'exemple numérique précédent n'a qu'une valeur didactique, puisque la solution exacte en est connue. Dans la pratique, on utilisera bien entendu la méthode du polygone funiculaire dans des cas plus difficiles. Citons le calcul des platelages métalliques des grands ponts modernes, souvent idéalisés comme dalles orthotropes (fig. 4). Par rapport à notre exemple, l'orthotropie n'apporterait aucune complication: il suffirait, dans l'établissement des schémas (\*), de tenir compte des valeurs de  $D_x, D_{xy}, D_y$ .

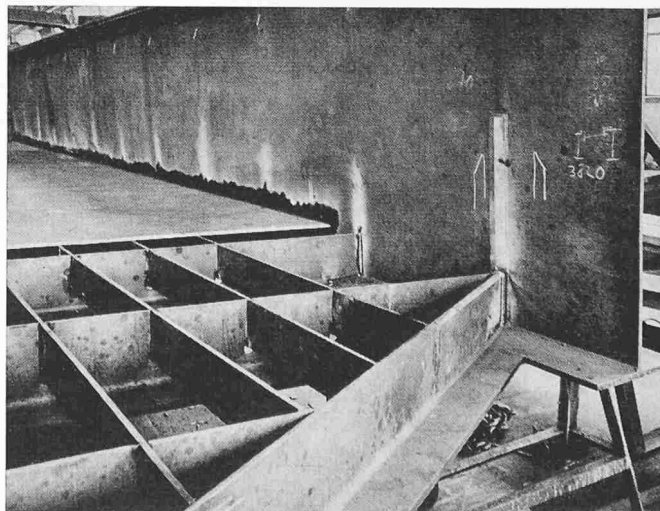


Fig. 4. Détail du platelage du pont-rail de Farbhof, à Zurich



Tableau III

Système d'équations											
			$w_a$	$w_b$	$w_c$	$w_d$	$w_e$	$w_f$	$w_g$	$w_h$	T. charge
1 ×	(A)*	a	+1995,93	-723,24	-1697,4	-192,8	+254,43	+178,76			0,36
2 ×	(B)*	b	-723,24	+3991,86	-192,8	-3394,8	+178,76	+508,86			0,66
2 ×	(A)*	c	-1697,4	-192,8	+4246,29	-1267,72	-1697,4	-192,8	+254,43	+178,76	0,72
4 ×	(B)*	d	-192,8	-3394,8	-1267,72	+8492,58	-192,8	-3394,8	+178,76	+508,86	1,32
2 ×	(A)*	e	+254,43	+178,76	-1697,4	-192,8	+3991,86	-1446,48	-1697,4	-192,8	0,72
4 ×	(B)*	f <sub>i</sub>	+178,76	+508,86	-192,8	-3394,8	-1446,48	+7983,72	-192,8	-3394,8	1,32
1 ×	(C)*	g			+254,43	+178,76	-1728,13	-362,82	+4570,83	-664,44	0,54
2 ×	(BC)*	h			+178,76	+508,86	-362,82	-3456,27	-664,44	+9141,66	0,99
Solutions		$10^{-3} \frac{pa^4}{D}$	6,046 82	4,345 10	5,452 90	3,923 90	3,767 53	2,725 62	1,457 35	1,069 20	$\times \frac{pa^4}{D}$

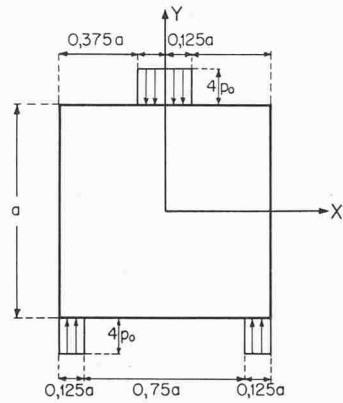


Fig. 5.

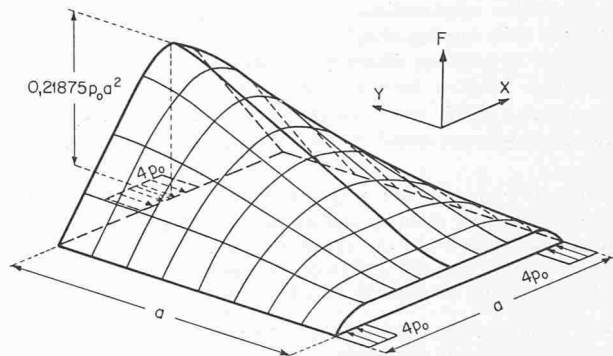


Fig. 6. Poutre simple, fonction de tension d'Airy

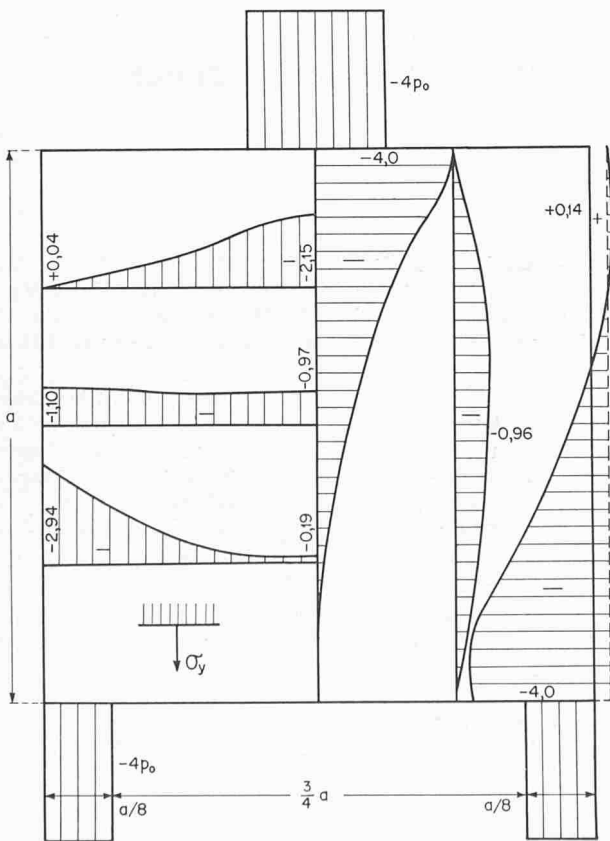


Fig. 7. Poutre simple, contraintes  $\sigma_y$  (en fonction de  $p_0$ )

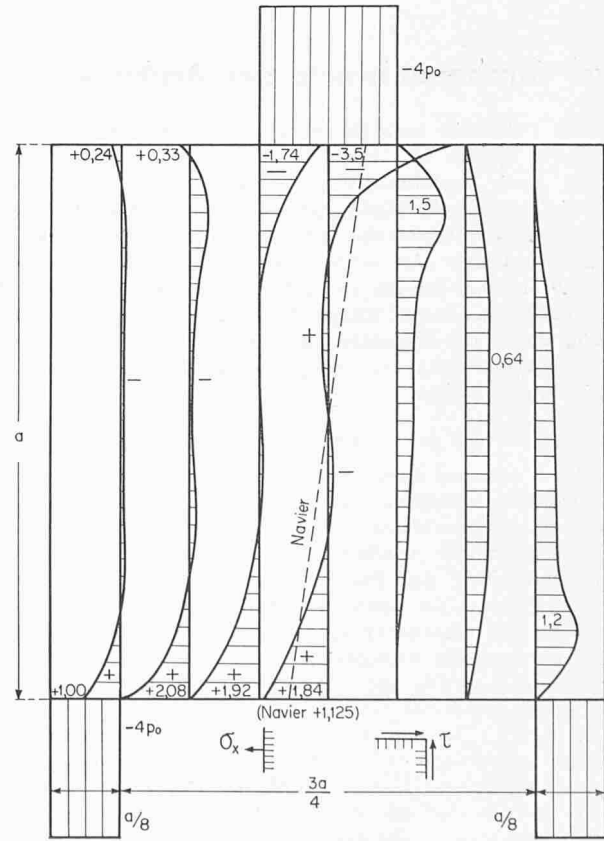


Fig. 8. Poutre simple, contraintes  $\sigma_x$  et  $\tau$  (en fonction de  $p_0$ )

Les parois minces sont encore peu étudiées mathématiquement. Nous donnerons ici un exemple apparemment simple, celui d'une paroi carrée, sollicitée par des efforts uniformément répartis sur une partie des côtés (fig. 5); il s'agit donc d'une poutre simple de grande hauteur, poutre à laquelle la théorie classique de la résistance des matériaux n'est évidemment plus applicable.

Sans donner de calculs numériques, nous reproduisons<sup>12)</sup> la forme de la fonction d'Airy<sup>13)</sup> (fig. 6) et les contraintes qu'on peut en déduire (fig. 7 et 8).

#### Précision de la méthode

De nombreux calculs comparatifs sur des plaques, soumises à diverses conditions au contour, nous ont permis de formuler le critère de précision suivant:

Si l'intervalle entre deux points d'inflexion consécutifs correspond à

	2	3	4	6	8 mailles
la précision sera de l'ordre de	6 %	2 %	0,7 %	0,15 %	0,05 %

pour les valeurs des ordonnées  $w$  (ou  $F$ ) et des courbures ( $M$ ,  $\sigma$ ). Pour les dérivées d'ordre impair, multiplier par  $1,5 \div 2$ .

Dans les applications, il est presque toujours possible d'estimer très approximativement la position des lignes d'inflexion de la surface élastique ou de la fonction d'Airy et de déterminer ainsi à combien de mailles correspond la partie de la courbe située entre deux points d'inflexion. Ainsi, dans notre exemple, on avait 8 mailles pour les lignes encadrées

<sup>12)</sup> Voir l'ouvrage cité à la note 7), page 142. Cette publication contient également d'autres cas de parois minces. Le problème du coin de cadre est traité de façon analogue dans l'article intitulé: Deux problèmes relatifs à l'étude des portiques étagés multiples, Publ. prélim. du 6<sup>e</sup> congrès de l'A.I.P.C., Stockholm 1960, page 438.

<sup>13)</sup> Comme indiqué plus haut, la variation de la fonction d'Airy, sur les bords soumis aux contraintes  $\sigma_y$ , est égale à celle du moment provoqué par ces «charges»  $\sigma_y$ . Quant aux bords verticaux, ils ne sont pas sollicités et la fonction d'Airy est constante ainsi que sa dérivée  $\partial F/\partial x$ , égale à la tangente initiale au coin.

et 4 pour les lignes articulées. Comme la surface élastique présente certainement deux points d'inflexion le long de l'axe des  $y$ , à cause de l'encastrement, on peut admettre 4 mailles entre points d'inflexion, dans les deux directions. L'erreur maximale trouvée était bien de 0,7 % comme indiqué par le critère.

Remarquons pour terminer que la méthode aux différences finies conduit à une précision de beaucoup inférieure. Les erreurs sur les courbures (moments des plaques, contraintes des parois) sont de 5 à 20 fois plus grandes<sup>14)</sup>.

Quand on utilise la méthode du polygone funiculaire, on pourra donc, si l'on désire obtenir une certaine précision fixée, employer un réseau beaucoup plus lâche que dans la méthode aux différences; on *diminue ainsi très fortement le travail à effectuer*, ce qui est toujours appréciable, même si l'on dispose d'une calculatrice électronique.

#### Conclusions

L'analogie du polygone funiculaire permet de résoudre, sans connaissances mathématiques spéciales, des problèmes bidimensionnels compliqués. Puisque cette méthode provient de la statique appliquée, elle convient spécialement bien à l'ingénieur, car elle ne recourt qu'à des notions qui lui sont familières.

Divers procédés d'application sont possibles; nous n'en avons développé ici qu'un seul, celui qui conduit à des schémas fixes et, de ce fait, est particulièrement facile à utiliser. Dans certains cas, d'autres procédés, plus proches de l'origine statique, seront mieux adaptés.

Nous espérons que notre article, forcément très incomplet du fait de son étendue limitée, saura inciter le lecteur à approfondir de par lui-même l'ensemble du problème et à trouver par là de nouvelles applications.

<sup>14)</sup> Cette variation entre 5 et 20 vient de ce que la méthode du polygone funiculaire converge beaucoup mieux; l'erreur  $y$  est en gros inversement proportionnelle à la quatrième puissance du nombre de mailles, tandis que c'est le carré qui intervient dans la méthode aux différences finies.

Adresse de l'auteur: Prof. Dr. Pierre Dubas, Seestrasse 467, Meilen/ZH.

## Zwei Kirchenentwürfe der Architekten A. und W. Moser, Baden und Zürich

DK 726.5

Um Pläne für eine Kirche zu erlangen, erteilte im vergangenen Winter die katholische Kirchgemeinde Wangen an der Aare Projektaufträge an sechs Architekten, während die katholische Kirchgemeinde Heiden AR gleichzeitig einen Projektwettbewerb mit sechs eingeladenen Teilnehmern durchführte. An beiden Orten gingen die Architekten A. & W. Moser, Zürich und Baden, als Sieger hervor. Wir veröffentlichen deren Entwürfe, begleitet von der Beurteilung durch die Experten bzw. das Preisgericht, und lassen eine Würdigung der beiden Entwürfe durch einen jungen Kollegen folgen.

#### Aus dem Bericht der Expertenkommission Wangen a. A.

Der Verfasser dieses Projektes verstand es als einziger, das gegebene Gelände optimal auszunützen. Er hat die Kirche zurückgeschoben und ihr dadurch einen grosszügig leicht ansteigenden, schönen Vorhof vorgelagert. Es war ihm dadurch möglich, das Pfarrhaus am Eingang des Vorhofes anzuschliessen. Die seitliche Abschrankung des Vorhofes verstärkt den Charakter eines eigenen Kirchenbezirks und trennt dadurch die Anlage von den benachbarten, zufälligen Gebäulichkeiten. Die Stellung des Turmes bezüglich des benachbarten Gebäudes ist zu überprüfen. Der Kirchenraum ist in der liturgischen Anordnung und der räumlichen Gestaltung ausserordentlich charaktervoll und schön. Zu bemängeln ist der zu kleine Taufraum. Es ist zu empfehlen, den Taufraum und die Werktagkapelle zusammenzulegen. Zu Gunsten einer eindeutigen Lichtführung von Osten sollten die Fenster der Südwand weggelassen werden.

Besonders hervorzuheben ist die Anordnung der Empore, unter welcher die Sakristei liegt, die ebenfalls sehr praktisch angeordnet ist. Der im Untergeschoss angeordnete Pfarrsaal und seine Nebenräume sind zweckmässig angeordnet. Die halbrunde Einbuchtung beengt jedoch den Saal. Dadurch, dass der Kirchenboden über das Gelände gehoben wird, kommt der Pfarrsaal verhältnismässig wenig unter das gewachsene Niveau. Der Verfasser macht den Vorschlag eines amphitheatralischen Aussenraumes, für den jedoch kein Bedürfnis vorliegt.

Es handelt sich hier um ein ausserordentlich ideenreiches, sorgfältig durchgestaltetes, formal einheitliches Projekt, das den gestellten liturgischen und baukünstlerischen Ansprüchen gerecht wird. — Kirche 5160 m<sup>3</sup>, Pfarrsaal 717 m<sup>3</sup>, Pfarrhaus 1215 m<sup>3</sup>, Turm 315 m<sup>3</sup>.

Das Projekt ist mit Abstand das beste unter den eingereichten. Es bedeutet einen wertvollen Beitrag zur Weiterentwicklung des heutigen Sakralbaues.

*Die Experten:* K. Higi, Arch., Prof. A. Roth, Arch., W. Studer sen., Arch., Jos. Eggenschwieler, Domherr, W. Portmann, Pfr., Dr. Schenker, Domherr.

#### Aus dem Bericht des Preisgerichts Heiden

Dieses Projekt stellt die Kirche auf die sehr gut präsentierende Höhe des bisherigen Kirchplatzes. Der Zugang zur Kirche führt über eine Treppenanlage zu einem reizvollen Vorhof und von dort ins Heiligtum. Dieser Vorhof, als sinnvolle Vorbereitung zum Gottesdienst, ist mit Turm