

Zugkraftmessung in Drahtseilen mit Transversalwellen: Fragen der Biegesteifigkeit und der grossen Spannweite

Autor(en): **Zweifel, Otto**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **79 (1961)**

Heft 21

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-65526>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zugkraftmessung in Drahtseilen mit Transversalwellen

Fragen der Biegesteifigkeit und der grossen Spannweite

DK 669 — 427.4.001.4

Von Prof. O. Zweifel, ETH, Zürich

Einleitung

Überall, wo Drahtseile nicht durch Gewichte gespannt sind, besteht ein Bedürfnis, den Seilzug messen zu können. Dazu ist immerhin zu bemerken, dass auch bei Gewichtsspannung oft die Grösse des Spannungsgewichts nur mit ungenügender Genauigkeit bekannt ist und die Reibung auf den Seilschuhen zusätzlich eine ebenfalls schwer erfassbare Rolle spielt.

Eine besonders einfache Messmethode ist die bekannte Zugkraftbestimmung mit Transversalwellen¹⁾. Dabei lässt man eine schlagartig erzeugte Welle (Schlagwelle) von einer Stütze bis zur nächsten laufen, wo sie reflektiert wird und nach der totalen Laufzeit t_L wieder an den Ausgangsort zurückkommt. Aus dieser Laufzeit schliesst man nach der Theorie der Saitenschwingung auf den Seilzug. Dazu werden allerdings noch die Feldabmessungen und das Längeneinheitsgewicht q des Seiles benötigt. Komplizierte Messapparaturen erübrigen sich, weil einzig Zeitmessungen (Stoppuhr) gemacht werden müssen. Für kürzere Felder wird hier vorgeschlagen, die Laufzeit indirekt durch Eigenschwingungsmessungen zu bestimmen.

Im Rahmen dieses Aufsatzes werden zwei, u. W. bisher in diesem Zusammenhang nicht bearbeitete Fragen gestellt, nämlich die der Biegesteifigkeit und die der grossen Spannweite.

Was zunächst den Einfluss der Biegesteifigkeit anbetrifft, so ergeben sich sehr interessante Zusammenhänge, weil die Wellengeschwindigkeit, wie beispielsweise bei den Wasserwellen, von der Wellenlänge abhängig ist. Da diese Wellenlänge bei der einfachen Messung mit der Stoppuhr allein aber unbekannt bleibt, drängt sich selbstverständlich die Frage auf, wie weit die Seilzugbestimmung bei der allgemein üblichen Vernachlässigung der Biegesteifigkeit gefälscht werden kann. Die wirklichen Vorgänge in Drahtseilen bei Schlagwellen werden deshalb theoretisch untersucht, wobei der geringe Einfluss der Dämpfung unberücksichtigt bleibt. Anhand von mit Oszillographen aufgenommenen Messdiagrammen wird die Richtigkeit der theoretischen Überlegungen belegt. Es erweist sich dabei, dass bei dünneren Seilen eine Messfälschung unwahrscheinlich ist, dass jedoch bei dickeren Seilen Vorsicht am Platze ist, weil bei ungeschicktem Vorgehen Fehler möglich sind.

In bezug auf die zweite Frage muss sodann geklärt werden, wie weit die Kettenlinienform der Seile bei grossen Spannungsfeldern die Laufzeit beeinflusst. Unter Berücksichtigung der Seilzugvariation in Funktion der geodätischen Höhe gelingt es, die zu bestimmende Horizontalkraft (oder den Seilzug am Feldende) als Reihenentwicklung der Laufzeit anzuschreiben. Das erste Glied dieser Reihenentwicklung entspricht dann der üblichen Näherungsrechnung, die bei grossen Spannweiten ungenau werden kann.

An anderen Messmethoden sei hier insbesondere die direkte Kraftmessung mit Seilspannungsmessern (Amsler, Schaffhausen) erwähnt. Sie hat einerseits den Vorteil, dass die Feldabmessungen nicht bestimmt werden müssen, andererseits ist man für die Auswertung auf Eichkurven angewiesen, die für die verschiedenen Seile im Laboratorium aufgenommen werden müssen. — Ferner wäre die Methode der geodätischen Ausmessung der Seilkurve zu nennen, wobei wie bei der Transversalwellenmethode die Feldabmessungen

und das Längeneinheitsgewicht bekannt sein müssen. Dabei wird am besten von einer Stütze aus eine Tangente vermessen, indem man den Theodoliten in oder unmittelbar neben der Bahnebene aufstellt und den scheinbar tiefsten Punkt des Seiles anvisiert. Auch die sehr einfache, aber nicht immer sehr genaue Neigungsmessung am von der Stütze ablaufenden Seil gehört hierher. Je kürzer das Feld ist und je flacher damit die Seilkurve wird, desto ungenauer werden allerdings die mit der geodätischen Methode bestimmten Zugkräfte.

Es darf gesagt werden, dass die Transversalwellenmethode neben den anderen Messmethoden unbedingt ihre Vorzüge hat. Gewisse Schwierigkeiten treten allerdings auf, wenn sich bei Tragseilen Seilreiter oder Kuppelstücke im freien Feld befinden, an denen die Wellen teilweise reflektiert werden. Beim Bau einfacher Seilbahnen, wie z. B. in der Forstwirtschaft, steht das Messen mit Schlagwellen wohl heute schon an erster Stelle, was damit zusammenhängen mag, dass diese Seile einerseits nie Gewichtsspannung haben und dass andererseits nur dünne Seile verwendet werden, die gegen Fehlmessungen einigermaßen narrensicher sein dürften. Bei entsprechenden Vorsichtsmassnahmen kommt die Transversalwellenmethode aber durchaus auch bei dickeren Seilen in Frage.

2. Bezeichnungen

a) Transversalwelle

Symbol		Bild	Gleichung
y	Ausschlag	2, 3	5
a	Phasengeschwindigkeit	3, 4	6, 13
a_∞	a für unendliche Wellenlänge		6a
a_G	Gruppengeschwindigkeit	4	10, 12, 14
λ	Wellenlänge	3	
$T = \lambda/a$	Schwingungsdauer		
T_w	Wirkzeit einer Schlagkraft		
t	Zeit		
t_z	Zerfallzeit, Schrittzeit	4	9, 11
t_L	(Hin- und Her-) Laufzeit		16, 19, 25
τ	dimensionslose halbe Laufzeit		20
i	Anzahl Schwingungsbäuche der Eigenschwingung	7	16

b) Kettenlinie

Symbol		Bild	Gleichung
h	Spannfeldabmessungen	10	
x	Koordinaten	10	
s	Bogenlänge		
ξ	Dimensionslose Längen		20, 23

c) Kräfte, Momente

Symbol		Bild	Gleichung
S	Seilzug	1, 10	6b, 17, 18
S_E	Seilzug am Feldende		28, 29
\bar{S}	Mittlerer Seilzug (an der Stelle grössten Durchhangs)		24, 26
H	Horizontalkraft	10	26
Q	Querkraft	2	2
M	Biegemoment	2	1
K	Schlagkraft		

¹⁾ Czitary: «Spannkraftermittlung in Seilen durch Schwingungsmessung», Wasserwirtschaft, Jg. 1931, S. 246.

d) Seildaten

Symbol	Bild	Gleichung
d	Seildurchmesser	
F	\sum Drahtquerschnitte	
J	Flächenträgheitsmoment	8
E	Elastizitätsmodul	
γ/g	Drahtdichte	
q/g	Seilmasse je Längeneinheit	
ε	Verseilungsfaktor $q/(\gamma F)$; bei den Zahlenbeispielen dieser Arbeit wurde $\varepsilon = 1,1$ gesetzt	
σ_z	Zugspannung	

3. Bewegung unendlich langer Wellenzüge und Eigenschwingungen

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, mit welcher Geschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) a sich ein (unendlich langer) Wellenzug der Wellenlänge λ am biegungssteifen Seil fortbewegt. Diese Bewegung bildet sowohl die Grundlage für die Eigenschwingungen als auch für die später behandelten Schlagwellen.

Der Einfachheit halber wird bei der folgenden Ableitung die Schwerkraft als vernachlässigbar weggelassen; am Schluss des Abschnittes soll aber noch erörtert werden, wie weit die auf diese Weise abgeleiteten Beziehungen auch für im Schwerfeld durchhängende Seile gültig bleiben.

Ein biegungssteifes, beliebig langes Seil sei durch die Zugkraft S gespannt und habe infolge einer einmaligen Störung kleine Auslenkungen (Bild 1) erhalten. Um die Differentialgleichung der Bewegung ableiten zu können, greift



Bild 1. Durch die Zugkraft S gespanntes Seil mit kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage

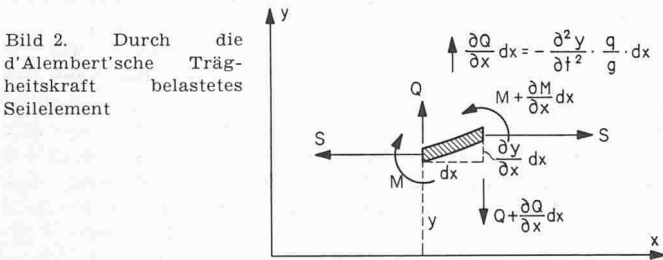


Bild 2. Durch die d'Alembert'sche Trägheitskraft belastetes Seilelement

man ein Seilelement (Bild 2) heraus, das durch die d'Alembertsche Trägheitskraft belastet ist.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie gibt hier eine erste Beziehung zwischen dem Biegemoment M und der Seilsteifigkeit JE :

$$(1) \quad M = JE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Eine weitere Gleichung ergibt sich aus der Ueberlegung, dass der Zuwachs der Querkraft Q nur von der d'Alembertschen Massenkraft herrühren kann (q/g = Seilmasse je Längeneinheit):

$$(2) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} dx = - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{q}{g} dx$$

Schliesslich lautet die sich aus der Gleichgewichtsbedingung für das Seilelement ergebende Momentengleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial M}{\partial x} dx - Q dx - S \frac{\partial y}{\partial x} dx = 0$$

Eliminiert man jetzt die Grössen Q und M aus diesen Gleichungen, indem man vorerst (1) zweimal und (3) einmal partiell nach dx ableitet, so findet man endgültig als Differentialgleichung der Seilbewegung

$$(4) \quad \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + JE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

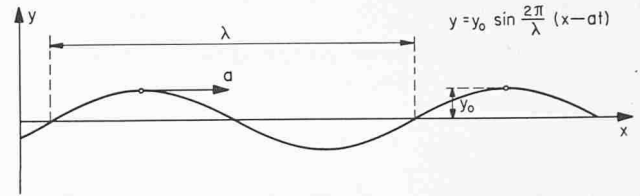


Bild 3. Sinusförmiger Wellenzug, der sich mit der Phasengeschwindigkeit a nach rechts bewegt

Wird nun für einen sich beispielsweise nach rechts bewegenden Wellenzug nach Bild 3 der Ausdruck

$$(5) \quad y = y_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - at)$$

angesetzt, so befriedigt dieser die Differentialgleichung, wenn man für die Geschwindigkeit a schreibt:

$$(6) \quad a = \sqrt{\frac{gS}{q} \left[1 + \frac{JE}{S} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right]} = a_\infty \sqrt{1 + \frac{JE}{S} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2}$$

worin

$$(6a) \quad a_\infty = \sqrt{\frac{gS}{q}} = \sqrt{\frac{\sigma_z g}{\varepsilon \gamma}}$$

die Geschwindigkeit unendlich langer Wellen bedeutet. Ferner ist σ_z die rechnerische Zugspannung S/F , F die Summe aller Drahtquerschnitte, γ/g die Drahtdichte und ε der Verseilungsfaktor $q/(\gamma F)$.

Im Gegensatz zur schwingenden Saite ist also a von λ abhängig; man spricht in solchen Fällen in der Theorie der Wellen²⁾ von Dispersion wie in der Optik. Im speziellen bewegen sich die kurzen Wellen rascher als die langen (anomale Dispersion).

Die Zugkraft S schreibt sich nach (6a)

$$(6b) \quad S = \frac{q}{g} a_\infty^2$$

oder nach (6)

$$(6c) \quad S = \frac{q}{g} a^2 - JE \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2$$

Die Seilkraft S lässt sich somit berechnen, wenn a und λ gemessen worden sind und die Seilkennwerte q , J und E als bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

Die Messung von a und λ kann z. B. an künstlich erregten Eigenschwingungen erfolgen, die ja als Ueberlagerung gegeneinanderlaufender Wellenzüge aufgefasst werden können. Die Wellenlänge λ (= doppelte Knotendistanz) und die Schwingungsdauer T ³⁾ können bei der Eigenschwingung unmittelbar abgegriffen werden und dienen zur indirekten Bestimmung von $a = \lambda/T$.

Dagegen ist der Wert der Biegesteifigkeit JE im allgemeinen unbekannt; er ist wegen der inneren Seilreibung streng genommen nicht einmal konstant. Diese Schwierigkeit kann aber vermieden werden, wenn man die Wellenlänge λ gross genug wählt. Nach (6) besteht ja der Einfluss der Biegesteifigkeit in einer Geschwindigkeitserhöhung, die aber um so geringfügiger ist, je grösser λ wird.

Es erhebt sich deshalb die Frage, wie gross die Wellenlänge zahlenmässig sein muss, damit der Einfluss der Biegesteifigkeit JE vernachlässigt, d. h. in (6c) Null gesetzt werden darf. Soll beispielsweise der Fehler für den Seilzug S kleiner bleiben als 1 %, so muss

2) Vgl. z. B. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band II.

3) Die Schwingungsdauer T ist nicht zu verwechseln mit der später verwendeten Laufzeit t_L , mit der sie durch (16) in Abschnitt 5 verknüpft ist.

$$(7) \quad J E \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 < 0,01 S \quad \text{oder} \quad \lambda > 20\pi \sqrt{\frac{J E}{S}}$$

Rechnet man vorsichtigerweise mit unverschieblichen Dräh-
ten, so ist in grober Näherung

$$(8) \quad J = F \left(\frac{d}{4} \right)^2$$

Mit diesem Wert und $S = F \sigma_z$ ergibt sich aus (7) schliess-
lich als minimale Wellenlänge:

$$(7a) \quad \lambda_{min} = 5\pi d \sqrt{\frac{E}{\sigma_z}}$$

In Tabelle 1 sind Zahlenangaben für λ_{min} zusammengestellt,
wobei für $E = 1,7 \cdot 10^3 \text{ t/cm}^2$ eingesetzt wurde, was dem grös-
sten Wert entspricht, den Wyss⁴⁾ für Zugversuche ganzer
Seile angibt. Für Biegung dürfte dieser Wert bei unver-
schieblichen Drähren eher etwas unterschritten werden. Bei
verschieblichen Drähren nähert sich E dem um 20 % höheren
Wert für den Einzeldraht, aber J sinkt gleichzeitig so viel
rascher, dass das Produkt $J E$ auf alle Fälle kleiner wird.

Tabelle 1. Minimale Wellenlängen λ_{min} in m bei Eigenschwingungen
($J = F d^2/16$; $E = 1,7 \cdot 10^3 \text{ t/cm}^2$; 1 % Fehler bezüglich S)

	Seildurchmesser d in mm				Faustformel
	10	20	40	80	
$\sigma_z = 6 \text{ t/cm}^2$	2,6	5,3	11	21	$\lambda > 250 d$
4 t/cm ²	3,2	6,5	13	26	$\lambda > 300 d$
2 t/cm ²	4,5	9	18	37	$\lambda > 450 d$

Werden bei Eigenschwingungen diese Bedingungen für
 λ_{min} eingehalten, so dürfte im allgemeinen eine Vernachlässi-
gung der Biegesteifigkeit, d. h. der Gebrauch von (6b) zu-
lässig sein, wobei $a = a_\infty$ gesetzt wird.

Bei den vorstehend durchgeführten Ableitungen wurde
vorausgesetzt, dass die Schwerkraft einen zu vernachlässi-
genden Einfluss habe. Deshalb gelten die Beziehungen (6)
bis (6c) zunächst nur, wenn der Durchhang des wirklichen
Seiles klein bleibt. Dabei ist allerdings nicht der Durchhang
gegenüber der Sehne des ganzen Feldes massgebend, son-
dern nur gegenüber der Sehne zwischen zwei benachbarten
Knotenpunkten der Wellen. Mit anderen Worten bleibt die
Gültigkeit für grosse Spannungsfelder bestehen, nicht aber ohne
weiteres für extrem lange Wellen, wie sie allerdings als Stör-
wellen auch gar nicht in Frage kommen. Ein solcher Einfluss
— der hier nicht weiter untersucht wird — ist erst zu er-
warten, wenn es sich um die Eigenschwingung erster Ord-
nung bei besonders tief durchhängenden Seilen handelt, wo-
bei dann auch Unterschiede auftreten dürften, je nachdem,
ob das Seil horizontal oder vertikal ausschwingt.

4. Theorie der Schlagwellen (Gruppengeschwindigkeit)

Unter einer Schlagwelle sei im folgenden eine Einzel-
welle, ein Wellenpaket oder eine Wellengruppe (im Gegen-
satz zum unendlich langen Wellenzug) verstanden, die durch
eine kurzzeitige lokale Störung erzeugt wurde und sich längs
des Seiles fortbewegt. Sofern die Biegesteifigkeit eine
Rolle spielt, zeigen solche Wellengruppen zwei merkwürdige,
aber aus der Theorie der Wellen wohlbekannte Eigen-
schaften: Erstens bewegen sie sich rascher, als ihrer Wellenlänge
nach (6) entspricht, und zweitens erleiden sie ständige Ver-
formungen.

Am Beispiel eines aus etwa fünf Wellen bestehenden
Wellenpaketes nach Bild 4 mit der ausgeprägten Wellen-
länge $\lambda = 2 \text{ m}$ sei das vorerst rein beschreibend verdeutlicht.
Ein Beobachter, der einen Wellenberg A (schraffiert) ins
Auge fasst, wird zwar feststellen können, dass dieser sich
mit der nach (6) zu berechnenden Phasengeschwindigkeit a
fortbewegt, aber zusehends kleiner wird und schliesslich

⁴⁾ Th. Wyss, «Die Stahldrahtseile der Transport- und Förderan-
lagen usw.», Schweizer Druck- und Verlagshaus AG, Zürich, 1956,
S. 118.

ganz verschwindet. Während dieser Zeit sind vor der Welle A
neue Wellen entstanden, hinter ihr andere abgeklungen. Das
Paket als Ganzes bewegt sich also rascher als die zu ihm
gehörenden Einzelwellen; man führt deshalb den Begriff der
Gruppengeschwindigkeit a_G ein, mit der sich das Gruppen-
(Energie-) Zentrum fortbewegt. Nach einem bestimmten
Zeitintervall (von hier 0,03 s) hat die Maximalamplitude den
Schritt von Wellenberg A auf B bzw. B' vollzogen. Wir
geben diesem Zeitintervall vorerst den Namen *Schrittzeit*,
werden es aber in der Folge mit dem sehr bezeichnenden
Wort *Zerfallzeit* t_z benennen, weil innert dieser Zeit das indi-
viduelle Merkmal (z. B. die maximale Amplitude) einer be-
stimmten Welle zerfällt bzw. an die Nachbarwelle verloren
geht.

Eine Erklärung für diese Zusammenhänge ergibt sich,
wenn die Wellengruppe als Fourierentwicklung des ganzen
Wellenlängenspektrums von $\lambda = 0$ bis ∞ aufgefasst wird.
Alle Komponenten dieser Fourierentwicklung sind dann un-
endlich lange Wellenzüge der Form (5), die sich mit ver-
schiedenen Geschwindigkeiten bewegen. Im Falle eines Wellen-
paketes nach Bild 4 haben diese Komponenten ein ausge-
prägtes Intensitätsmaximum bei $\lambda = 2 \text{ m}$. Zur Zeit $t = 0$
besitzen sie bei A gleiche Phasenlage und addieren sich, wäh-
rend sie sich ausserhalb des Paketbereiches gegenseitig auf-
heben. Dieser Punkt gleicher Phasenlage wandert nun inner-
halb der Schrittzeit t_z zur Nachbarwelle B', was an Bild 5
näher untersucht werden soll (wobei die in Klammern an-
gegebenen Zahlen sich auf das Beispiel von Bild 4 beziehen).

Links ist ein Stück der (ausgezogenen) Hauptwellen-
komponente I der Wellenlänge λ (2 m) eingezeichnet, das
bei A gerade mit einer anderen Komponente II der um $\Delta\lambda$
(0,3 m) kleineren Wellenlänge $\lambda - \Delta\lambda$ (1,7 m) in Phase ist.
Die Komponente I bewege sich mit der Phasengeschwindig-
keit a (233 m/s), die Komponente II mit einer grösseren
 $a + \Delta a$ (243 m/s). Nach der Zeit t_z (0,03 s) sind die beiden
weiter vorn liegenden Wellenberge bei B' in Phase gekom-
men, d. h. die Welle II musste gerade die Strecke $\Delta\lambda$
(0,3 m) mehr zurücklegen als die Welle I, und es stand ihr
dafür die Relativgeschwindigkeit Δa (10 m/s) zur Verfügung.
Daraus ergibt sich die Schrittzeit $t_z = \Delta\lambda/\Delta a$ (0,03 s).

Wäre a eine lineare Funktion von λ , so würde sich für
alle Wellenlängen die gleiche Schrittzeit ergeben (wie das
stillschweigend für Bild 4 vorausgesetzt wurde), weil dann
 $\Delta\lambda/\Delta a$ eine Konstante ist. Folglich würden zur Zeit t_z
nicht nur die Komponenten I und II bei B' in Phase sein, sondern
sämtliche Komponenten überhaupt, und die Wellengruppe
hätte in diesem Augenblick wieder genau das selbe Aus-
sehen wie für $t = 0$. Im allgemeinen und insbesondere beim
biegungssteifen Seil gilt diese Linearität nur für einen

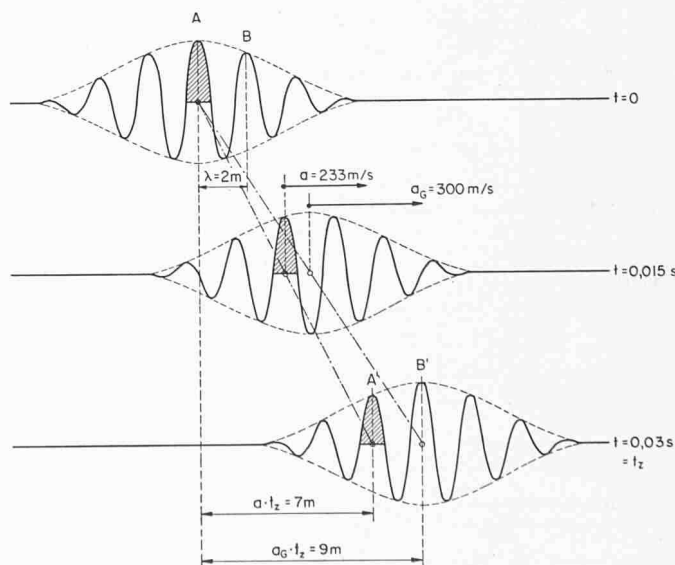


Bild 4. Wellenpaket am biegesteifen Seil. Jede Einzelwelle
bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit a , das Gruppenzentrum
mit der grösseren Gruppengeschwindigkeit a_G

Tabelle 2. Berechnete Werte für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit von Schlagwellen an 35 mm dickem Drahtseil maximaler Biegesteifigkeit ($a_\infty = 200$ m/s; $E = 1,7 \cdot 10^3$ t/cm²; $\epsilon = 1,1$)

Wellenlänge	λ	0	1	2	5	10	20	50	100	∞	m
Phasengeschwindigkeit	a	∞	312	233	205,5	201,5	200,4	200,06	200,01	200	m/s
Gruppengeschwindigkeit	a_G	∞	497	295	217	204,32	201,08	200,17	200,04	200	m/s
Schrittzeit, Zerfallzeit	t_z	0	0,005	0,03	0,4	3,5	28	430	3500	∞	s

schmalen Ausschnitt aus dem Wellenspektrum, wie er etwa zu Bild 4 gehört. Im Grenzfall wird die *Schritt-* oder *Zerfallzeit*

$$(9) \quad t_z = -\frac{\partial \lambda}{\partial a}$$

wobei das negative Vorzeichen gesetzt werden muss, weil $\Delta \lambda$ ein negativer Zuwachs war.

Aus Bild 5 ergibt sich ferner, dass die vom Punkt gleicher Phasenlage zurückgelegte Strecke $a_G t_z$ gerade um die Wellenlänge λ grösser ist als die Strecke $a t_z$, um welche die Welle I vorgerückt ist. Es ist also

$$a_G t_z = a t_z + \lambda$$

und man findet mit (9) die *Gruppengeschwindigkeit*

$$(10) \quad a_G = a + \frac{\lambda}{t_z} = a - \lambda \frac{\partial a}{\partial \lambda}$$

Mit den Zahlen unseres Beispiels wäre $a_G = 233 + 2/0,03 = 300$ m/s, also beträchtlich höher als die Phasengeschwindigkeit.

In Fällen, wo wie beim biegungsweichen Seil a eine Konstante ist, bewegen sich alle Komponentenwellen gleich rasch, und das Wellenpaket verschiebt sich ohne irgendwelche Verformung mit $a_G = a$; die Schrittzeit oder Wellenzerfallzeit t_z wird unendlich gross.

Für das biegungssteife Seil können (9) und (10) unter Berücksichtigung der Beziehung (6) zwischen a und λ wie folgt angeschrieben werden:

$$(11) \quad t_z = -\frac{\partial \lambda}{\partial a} = \frac{q a \lambda^3}{g J E (2 \pi)^2}$$

$$(12) \quad a_G = a \left[1 + \frac{g}{q a^2} J E \left(\frac{2 \pi}{\lambda} \right)^2 \right]$$

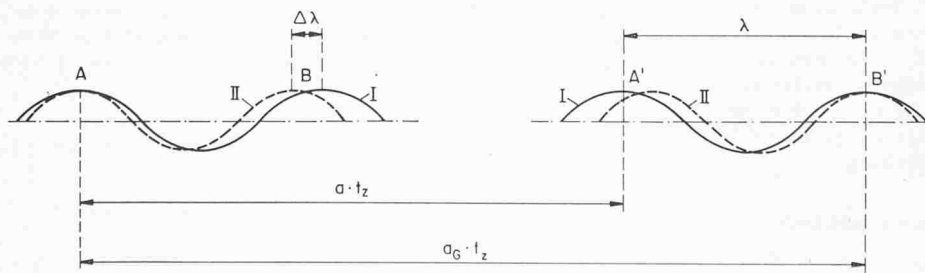


Bild 5. Zusammenhang zwischen Wellenlänge λ , Schrittzeit (Zerfallzeit) t_z , Phasengeschwindigkeit a und Gruppengeschwindigkeit a_G

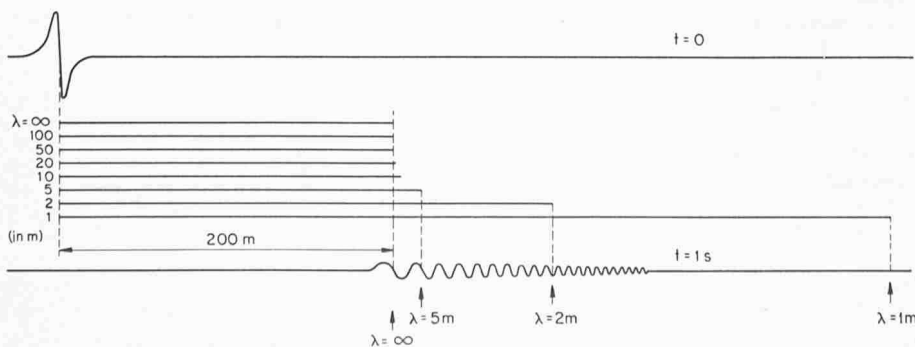


Bild 6. Schlagwelle mit kurz- und langwelligen Komponenten. Auswanderung und Voreilen der kurzwelligen Komponenten aus der Ausgangswelle

Die Grössenordnung von a , a_G und t_z wird am besten an einem Zahlenbeispiel veranschaulicht, und zwar sei ein 35 mm dickes Drahtseil mit sich nach Gl. (8) maximal auswirkender Steifigkeit angenommen, das so gespannt ist, dass die Phasengeschwindigkeit für unendlich lange Wellen $a_\infty = 200$ m/s betrage. Es ergeben sich dann nach (6), (11) und (12) die in Tabelle 2 zusammengestellten Werte.

Mit Hilfe dieser Zahlen soll nun gezeigt werden, wie sich eine Schlagwelle allgemeinsten Art verhält, wie sie z. B. in Bild 6 für $t = 0$ dargestellt ist. Im Gegensatz zu der Wellenpaketform von Bild 4 wird man bei einer Fourierentwicklung einer solchen Form die Feststellung machen, dass ein sehr breites Band des Wellenlängenspektrums beteiligt ist. In der Mitte dieser Ausgangswelle sind zunächst alle Komponenten in Phase. Durch horizontale Strecken (Bild 6, Mitte) ist von dort aus für die verschiedenen λ -Werte angegeben, welche Distanzen in 1 s mit der *Gruppengeschwindigkeit* zurückgelegt werden. So bedeutet der rechte Endpunkt der Strecke für $\lambda = 2$ m bei 295 m, dass alle Wellenkomponenten von etwa 2 m Wellenlänge nach einer Sekunde gerade an dieser Stelle in Phase sind und dem Seil dort den Wellencharakter von $\lambda = 2$ m einschliesslich der Phasengeschwindigkeit $a = 233$ m/s aufdrücken.

Die langwelligen Komponenten von $\lambda = \infty$ bis etwa 10 m sind kompakt beisammen geblieben und haben im Gegensatz zu kurzen Wellen eine sehr beständige Form, aus der die kurzwelligen Komponenten bereits ausgewandert sind. Würde man die Situation nach 10 s wieder ansehen, so wären auch die 10-m-Komponenten ausgewandert, da ihre Phasenkoinzidenz bis dann bereits 43 m nach vorne gerückt ist. Mit anderen Worten spritzen aus der Schlagwelle vom ersten Moment an ganz kurzwellige (und dann sukzessive immer langwelligere) Elemente heraus und laufen ihr voraus. Gleichzeitig verliert die Ausgangswelle an Spitzigkeit und Amplitude. Die ausgetretene Schwingungsenergie verteilt

sich ständig über immer zunehmende Gebiete, und zwar um so ausgedehnter, je kürzer die Wellenlänge ist, weshalb die kürzesten, an der Spitze liegenden Wellen bald vollständig verflacht sind.

Wie für die Eigenschwingungen in Abschnitt 3 muss hier noch untersucht werden, wie gross die Langwelligkeit von Schlagwellen sein muss, dass auch hier die Biegesteifigkeit vernachlässigt werden darf.

Setzt man $J E$ aus (11) und S aus (6b) in (6) ein und entwickelt in Reihen, so wird für längere Wellen

$$(13) \quad a \approx a_\infty + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{t_z}$$

und mit (10)

$$(14) \quad a_G \approx a_\infty + \frac{3}{2} \frac{\lambda}{t_z}$$

Aus diesen interessanten Beziehungen sieht man zunächst, dass die Gruppengeschwindigkeit a_G dreimal mehr von a_∞ abweicht als die Phasengeschwindigkeit a (was auch aus den Zahlen von Tabelle 2 hervorgeht). Infolgedessen wird auch der Fehler für die Zugkraft S dreimal grösser, wenn mit a_G statt mit a ge-

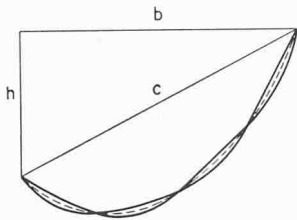


Bild 7. Eigenschwingung höherer Ordnung in grossem Spannungsfeld. Die Knotenpunkte liegen in den höheren Seilteilen weiter auseinander als in den unteren

Tabelle 3. Minimalwerte für die Wellenlänge λ (in m) und die Zerfallzeit t_z (in s) bei Schlagwellen ($J = F d^2/16$; $E = 1,7 \cdot 10^3 \text{ t/cm}^2$; $\epsilon = 1,1$; 1 ‰ Fehler bezüglich S)

σ_z t/cm ²	a_∞ m/s	λ -Werte bei d [mm]				t_z -Werte bei d [mm]				Faustformeln *) für	
		10	20	40	80	10	20	40	80	λ [m]	t_z [s]
6	260	5	9	18	37	6	11	21	42	$> 0,45 d$	$> 0,5 d$
4	210	6	11	22	45	8	16	32	63	$> 0,55 d$	$> 0,8 d$
2	150	8	16	32	63	16	32	63	126	$> 0,8 d$	$> 1,6 d$

*) d ist in mm einzusetzen, λ wird in m, t_z in s erhalten.

rechnet wird. Da [vgl. Gl. (6c)] dieser Fehler aber mit λ^2 abnimmt, kann das dadurch kompensiert werden, dass λ_{min} gegenüber (7a) bzw. Tabelle 1 mit dem Faktor $\sqrt{3}$ multipliziert wird, wie das in Tabelle 3 ausgeführt ist.

Setzt man jetzt a_∞ aus (14) in (6b) ein, so findet man (immer für längere Wellen)

$$(15) \quad S \approx \frac{q}{g} a_G^2 \left(1 - \frac{3\lambda}{a_G t_z} \right)$$

Bei der für S zugrunde gelegten Genauigkeit von 1% kann also $t_z = 300 \lambda / a_G \approx 300 \lambda / a_\infty$ aus λ_{min} bestimmt werden. Die so für maximale Seilsteifigkeit berechneten Zerfallszeiten sind ebenfalls in Tabelle 3 aufgeführt. Da die Wellenlänge λ nur mit komplizierten Messeinrichtungen gemessen werden kann, sind diese Minimalwerte für die Zerfallzeit ein wichtiges Kriterium für reine Stoppuhrmessungen. *Behalten nämlich Schlagwellen während dieser Zeiten ein regelmässiges Verhalten bei, so darf wegen ihrer Formbeständigkeit direkt auf eine ausreichende Langwelligkeit geschlossen werden.*

Diese Zahlenangaben liegen übrigens auf der sicheren Seite, da sich die Seilsteifigkeit gerade bei langen Wellen nicht voll auszuwirken scheint. Zudem wird, wenn die Welle während der Messung formbeständig bleibt, mit der Stoppuhr immer ein und derselbe Wellenkopf verfolgt, so dass man effektiv die Phasengeschwindigkeit a und nicht die Gruppengeschwindigkeit a_G misst, wodurch sich der Fehler nochmals reduziert.

Wahrscheinlich dürften die λ - und t_z -Werte von Tabelle 3 um 20 bis 30% verringert werden; bei ihrer Einhaltung liegt der Fehler für S unter 1%.

5. Praktische Durchführung der Messungen

Bei den Messungen wird die Laufzeit einer Welle bestimmt. Entweder geschieht das mit Schlagwellen, die für einen Hin- und Hergang die Laufzeit t_L benötigen, oder mit Eigenschwingungen, wo die Schwingungsdauer T (Reziprokwert der Frequenz) mit t_L über die Beziehung

$$(16) \quad t_L = iT$$

zusammenhängt, worin i die Anzahl Schwingungsbäuche bedeutet (Bild 7 beispielsweise $i = 4$). Da die Wellengeschwindigkeit in den oberen Seilteilen wegen der höheren Spannung grösser ist, liegen dort die Knotenpunkte weiter auseinander als unten.

In beiden Fällen sei die Wellenlänge nach Tabelle 1 bzw. 3 so gross gewählt, dass die Biegeungssteifigkeit vernachlässigt werden darf. Dann kann für kleinere Seilfelder mit t_L und der Feldsehne c auf $a_\infty \approx 2c/t_L$ und damit nach (6b) auf die mittlere Zugkraft \bar{S} geschlossen werden. Es gilt dann

$$(17) \quad \bar{S} \approx \frac{4qc^2}{gt_L^2}$$

Bei grösseren Spannweiten wird man aber besser mit den im Anhang (Abschnitt 6) abgeleiteten Reihen arbeiten. Entweder wird die Horizontalkraft H bzw. der Seilzug \bar{S} in Feldmitte aus

$$(26) \quad \bar{S} = H \frac{c}{b} = \frac{4qc^2}{gt_L^2} \left[1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{c^2} \right) \frac{g^2 t_L^4}{128 c^2} + \dots \right]$$

bestimmt (Grössen b, c, h nach Bild 7), oder man berechnet die Zugkraft S_E an den beiden Feldenden mit

$$(29) \quad \bar{S}_E = \pm \frac{qh}{2} + \frac{4qc^2}{gt_L^2} \left[1 + \left(1 - \frac{5}{8} \frac{h^2}{c^2} \right) \frac{g^2 t_L^4}{96 c^2} + \dots \right]$$

Da als Messinstrument einzig eine Stoppuhr⁵⁾ verwendet werden soll, dürfte mit einem Zeitablesefehler von etwa $\pm 0,2$ s zu rechnen sein. Will man vermeiden, dass der dadurch verursachte Fehler in bezug auf den Seilzug 1% überschreitet, so muss die Beobachtungszeit mindestens 40 s betragen. Sich mit dem Abstoppen eines einzigen Hin- und Herganges einer Schlagwelle zu begnügen, ergibt also höchstens in Feldern von mehreren Kilometern Länge eine befriedigende Genauigkeit.

Grössenordnungsmässig beträgt die Laufzeit je 100 m Feldlänge gerade 1 Sekunde. Dementsprechend ergibt sich bei Eigenschwingungen beim Knotenabstand 100 m ebenfalls eine Schwingungsdauer von 1 Sekunde. Erfolgt die rhythmische Erregung mit eigener Hand, so können je nach Geschicklichkeit noch Frequenzen von 3 bis 5 Hertz abgezählt werden, so dass das Verfahren je nach Umständen noch in ganz kurzen Feldern bis hinunter auf 20 bis 30 m Spannweite angewendet werden kann.

Im allgemeinen ist in langen Feldern das Arbeiten mit Schlagwellen einfacher als mit Eigenschwingungen. Wegen der kleinen Dämpfung kann man die Hin- und Hergänge dann oft minutenlang verfolgen. Bei kurzen Feldern liegen die Verhältnisse insofern ungünstiger, als die Dämpfung mit der wachsenden Anzahl von Reflexionen an den Feldenden zunimmt. Während eine Welle innerhalb der als minimal bezeichneten Beobachtungszeit von 40 s in einem 500-m-Feld unter normalen Verhältnissen weniger als 20 mal reflektiert wird, ergeben sich in Feldern von weniger als 100 m Länge in der gleichen Zeit bald einmal mehr als 100 Reflexionen, wodurch eine Schlagwelle für einfache Messmethoden zu stark gedämpft wird.

Gerade in diesen kurzen Feldern eignet sich dann aber die Eigenschwingungsmethode, bei der die Schwingungen ja durch rhythmische Störkräfte beliebig lange aufrechterhalten werden können. Da die Knotendistanz bei der Schwingung erster Ordnung allerdings gerade gleich der Spannweite, also verhältnismässig gross wird, muss man sich fragen, ob damit die Voraussetzungen für die in Abschnitt 3 abgeleiteten Beziehungen noch gegeben sind, d. h. ob der Durchhang des Seiles nicht bereits eine Rolle zu spielen beginnt. Bei den hier in Frage kommenden kurzen Spannungsfeldern ist das aber nicht der Fall; auch weisen die Eigenschwingungen mit horizontalen und vertikalen Ausschlägen noch gleiche Eigenfrequenzen auf⁶⁾. Dabei sind die horizontalen Schwin-

⁵⁾ Stoppuhren gehen oft weniger genau, als man glaubt. Man tut gut, sie jeweils mit dem grossen Sekundenzeiger einer täglich benützten Uhr zu vergleichen. Selbst die Ungenauigkeit von Armbanduhren liegt weit unter 1‰ (1‰ Fehler = 1½ Minuten im Tag).

⁶⁾ Das ist nicht unbedingt zu erwarten: horizontal schwingt das durchhängende Seil vorwiegend pendelartig aus, und vertikal handelt es sich um eine elastische Schwingung, wo bei extremen Durchhängen auch der Elastizitätsmodul eine Rolle spielt.

Fortsetzung siehe Seite 355

gungen vom Feldende aus in der Regel leichter anzufachen als die vertikalen. Bei der Eigenschwingungsmethode ist es auch möglich, das Feld künstlich zu verkürzen, indem man z. B. doppelt so rasch erregt und in der Feldmitte einen Schwingungsknoten erzeugt, der sich gut beobachten lässt.

Was schliesslich die Schlagwellenmethode anbetrifft, so sollte darauf geachtet werden, dass ihre Wellenlänge gemäss Tabelle 3 nicht zu kurz ausfällt und dass diese Wellenlänge so rein wie möglich erzeugt wird, d. h. dass kurzwellige Komponenten weitgehend ausgeschaltet sind. Will man beispielsweise eine Wellenlänge von $\lambda = 20$ m erzeugen, so ergreift man das Seil am besten in 5 m ($= \lambda/4$) Abstand vom Feldende und drückt es kurzzeitig zur Seite. Die Wirkzeit T_W dieser Störkraft muss aber etwa so gross sein wie die Zeit ($T/4$), die das Seil selbst bei einer 20-m-Welle braucht, um vom Durchgang durch die Nullage auf den vollen Ausschlag zu kommen, nämlich den vierten Teil der Schwingungsdauer $T = \lambda/a$. Für $a = 200$ m/s wäre hier $T = 0,1$ s und $T_W = 0,025$ s. Wird die Wirkzeit wesentlich kürzer, entstehen die unerwünschten kurzwelligen Komponenten. Mit anderen Worten ist darauf zu achten, dass der Schlag nicht allzu scharf geführt wird. Bei dünnen Seilen ist diese Bedingung nicht schwer zu erfüllen: Wenn man ein 10 mm dickes Drahtseil von Hand ruckartig auslenkt und sofort wieder loslässt, werden die Wirkzeiten keinesfalls zu klein. Im Gegenteil wird man darauf achten müssen, so scharf und plötzlich wie möglich zu ziehen, da sonst der erzeugte Wellenbuckel stumpf wird und seine Rückkehr nur unscharf beobachtet werden kann. Uebrigens darf die Wellenlänge bei einem 10-mm-Seil gemäss Tabelle 3 auch wesentlich kürzer sein als bei einem Seil von 40 oder 80 mm Durchmesser.

Bei dicken Seilen wird die Aufgabe viel schwieriger, da für eine genügende Initialausbuchtung viel grössere Kräfte ausgeübt werden müssen. Was passiert, wenn beispielsweise mit einem Bleihammer auf ein 39 mm dickes, mit 39,5 t gespanntes Drahtseil geschlagen wird, geht aus dem (oberen) Messtreifen ⁷⁾ von Bild 8 hervor. Das aufgezeichnete Wellenbild unterscheidet sich aber prinzipiell von der Darstellung auf Bild 6, da es sich hier um Ausschlagsmessungen an einer bestimmten Seilstelle (in 2,8 m Distanz vom Feldende) in Funktion der Zeit handelt, während auf Bild 6 die gesamte momentane Seilform zu bestimmten Zeiten wiedergegeben ist. Der Moment des Schlages ist auf dem Messtreifen markiert; der Ausschlag selbst ist nicht zu sehen, weil der schreibende Lichtstrahl sich zu rasch bewegt. Bei

⁷⁾ Die oszillographischen Messungen wurden unter freundlicher Mitwirkung der beiden ETH-Institute für Geophysik und Flugzeugstatik durchgeführt, was an dieser Stelle bestens verdankt sei.

der ersten Rückkehr hat sich die Schlagwelle in eine 1,6 s dauernde Wellenfolge aufgelöst, die mit ihrer Amplitudenmodulation in drei Wellenpakete A, B und C zerfällt. Solche Amplitudenmodulationen sind in erster Linie auf die ursprüngliche Form der Schlagstörung zurückzuführen, in zweiter Linie hängen sie aber auch von der Lage der Messstelle ab, weil die Nähe der Reflexionsstelle Interferenzerscheinungen bewirken kann.

In Tabelle 4 sind die wichtigsten Grössen des Messtreifens zusammengestellt. Der von Auge sichtbare Ausschlag und die von Hand fühlbare Schüttelkraft mussten mit der Frequenz umgerechnet werden, weil das benützte Messinstrument geschwindigkeits-proportionale Ausschläge registriert. Im allgemeinen ergeben Nachrechnungen, dass sich die Biegesteifigkeit bei kurzen Wellen voll oder doch zu einem hohen Prozentsatz auswirkt. Die langen Wellen eignen sich für solche Nachrechnungen nicht, da der Einfluss der Biegesteifigkeit dann zu klein ist, um analysiert zu werden.

Tabelle 4. Zahlenwerte zu Bild 8

Messtreifen	8a	8a	8a	8b	
Wellenpaket	A	B	C		
Gruppen- geschwindigkeit a_G	285	223	—	—	m/s
Phasen- geschwindigkeit a	(235)	(214)	210,5	209	m/s
Frequenz $1/T$	90	37	14,3	11,6	Hz
Wellenlänge λ	2,6	5,8	14,7	18	m
Seilzug, unrichtig ge- rechnet mit					
$a_G = a = a_\infty$	73,5	45,0	40,1	39,6	t
rel. Ausschlag	5	62	100	—	%
rel. Schüttelkraft	54	100	24	—	%

Der ohne Rücksicht auf die Seilsteifigkeit aus a_G bzw. a berechnete Seilzug ergäbe mit der am heftigsten schüttelnden Welle (Paket B) einen Fehler von 14 %, und mit den zuerst ankommenden, vibrationsartigen Wellen (Paket A) erhielte man so unsinnige Werte, dass man wohl kaum in Versuchung käme, sie als richtig anzunehmen. Einzig die Wellen mit der schwächsten Schüttelkraft (aber immerhin mit dem grössten visuellen Ausschlag) ergeben einen Fehler von bloss +1,5 %. Auf dem Messtreifen kann man auch feststellen, dass nur diese Wellen sich bei jeder weiteren Wiederkehr individuell erkennen lassen. Die grösste von ihnen (mit Pfeil bezeichnet) erscheint stets nach einem ganzzahligen Vielfachen von $t_L = 4,68$ s nach dem Schlag.

Die kurzwelligen Pakete bewegen sich mit der Gruppengeschwindigkeit a_G . Auf Bild 9 lässt sich ihre Lebensge-

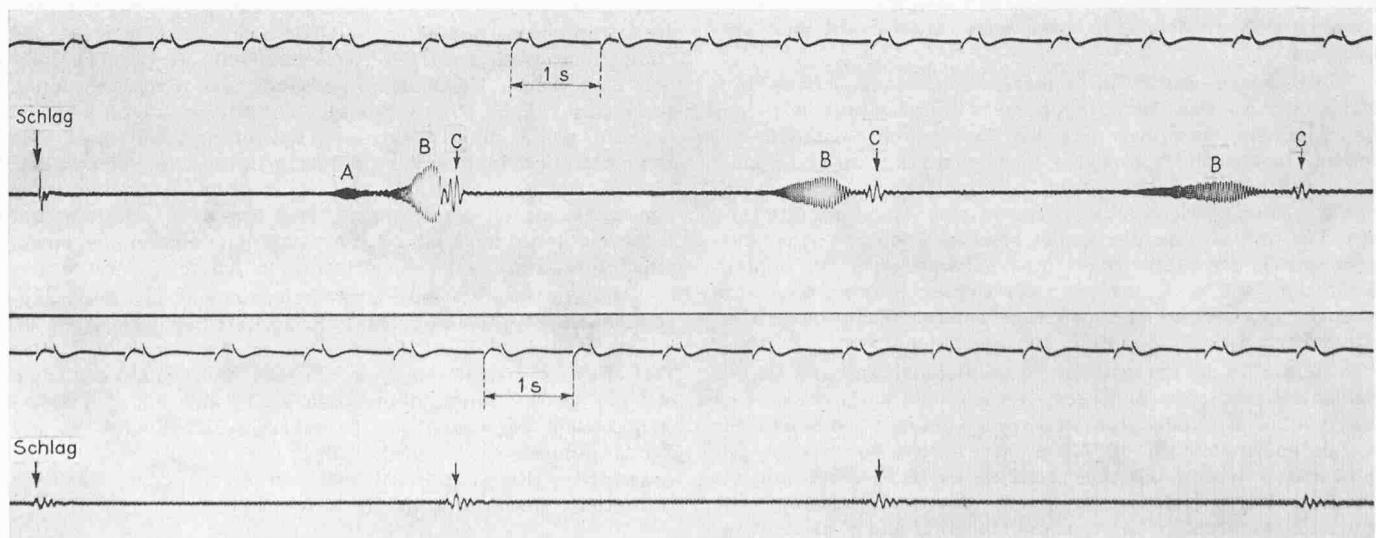


Bild 8. Schlagwellenmessung an vollverschlossenem Tragseil von 39 mm Dicke, mittlere Zugkraft 39,5 t, Messstelle in 2,8 m Abstand vom Feldende. Oben (a) Schlag mit Bleihammer in 2 m Abstand vom Feldende; unten (b) Ruckartiger Zug mit vier Armen in 4 m Abstand vom Feldende mittels Hanfseil

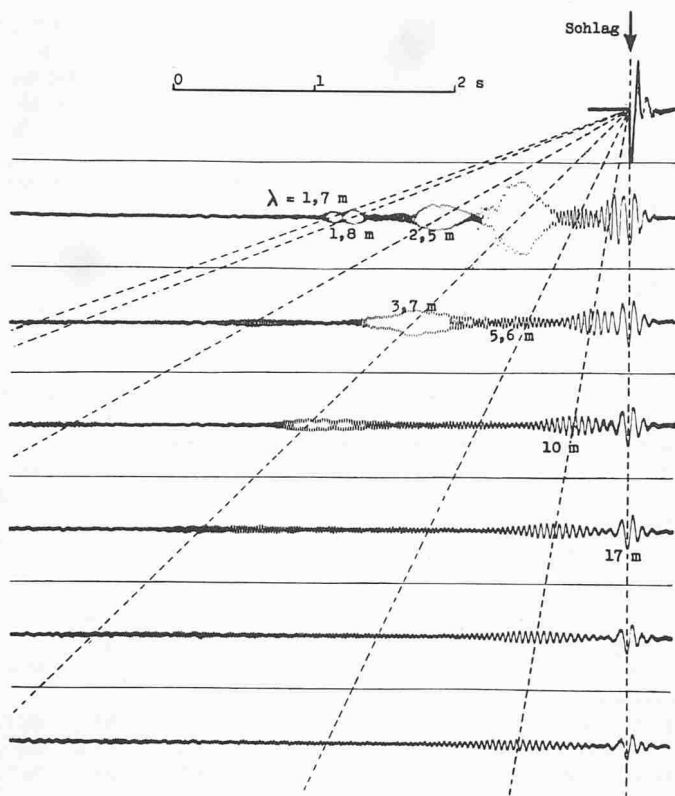


Bild 9. Zerbersten der Schlagwelle in kurzwellige Wellenpakete. Die auseinandergeschnittenen Teile des Messtreifens sind untereinander angeordnet. (Gleiches Seil wie Bild 8, Schlag mit Holzklotz)

schichte — an einem anderen Versuch — besonders schön verfolgen, weil dort der Messtreifen auseinandergeschnitten und die Teilstücke derart untereinander angeordnet wurden, dass der grösste Wellenkopf der 17-m-Welle jeweils senkrecht unter den Schlagmoment zu liegen kommt: Rechts davon erkennt man einen formbeständigen Teil, der die Abstammung von der Urwelle im obersten Diagramm nicht verleugnen kann. Nach links bersten explosionsartig die Wellenpakete mit den kurzen Wellen heraus. Die Urwelle musste auf Grund der kaum sichtbaren Diagrammspuren von Hand ungefähr nachgezogen werden.

Als vollendetes Schulbeispiel darf die 10-m-Welle bezeichnet werden, deren Entstehung aus der Urwelle von der zweiten bis zur vierten Linie sehr hübsch verfolgt werden kann. Man versteht auch, dass ein solches Paket (dessen vordere und hintere Enden unterschiedliche Wellenlängen aufweisen und sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen) sich ausdehnt, so dass seine Wellenzahl sich vergrössert.

Abgesehen davon, dass diese Diagramme schöne Illustrationen zu den Ueberlegungen von Abschnitt 4 geben, beweisen sie, dass bei dickeren Seilen vor Schlägen mit festen Gegenständen gewarnt werden muss, und zwar auch dann, wenn diese Schlagkörper eine gewisse, aber eben doch unzureichende Elastizität besitzen, wie Holz, Plastik und dgl. Die Initialwelle dürfte bei solchen Schlägen eine Ausgedehtheit des Wellenspektrums aufweisen wie die Schlagwelle von Bild 6. Je schärfer der Schlag geführt wird, um so mehr kurzwellige Komponenten entstehen, die unter Umständen zu Falschmessungen führen können.

Immerhin ist zu grosser Pessimismus fehl am Platze. Selbst bei scharfen Schlägen werden nämlich immer auch langwellige Komponenten miterzeugt, die — trotzdem ihr Anteil energiemässig oft klein ist — sich doch recht gut beobachten lassen. Erstens handelt es sich dabei um die deutlich fühlbare Schlusswelle der ganzen Wellenfolge, die vibrationsartig beginnt und mit niederfrequenten Schwingungen endet, und zweitens hat diese Schlusswelle wegen ihrer Langwelligkeit die grösste Lebensdauer, so dass sie schliesslich allein übrig bleibt.

Man kann aber ohne Schwierigkeit die Entstehung von kurzen Wellen überhaupt vermeiden. Das einfachste und sicherste Verfahren scheint dasjenige zu sein, auch bei dicken Drahtseilen mit der menschlichen Armkraft allein auszukommen. Reicht bei $d = 20$ mm vielleicht ein Arm gerade noch aus, so sind beim 40-mm-Seil vier und beim 80-mm-Seil 16 Arme notwendig. Man wird zu diesem Zwecke ein Hanfseil über das Drahtseil werfen und ruckartig gemeinsam daran ziehen. Dabei ist darauf zu achten, dass das Hanfseil vor dem Ruck nicht etwa locker, sondern bereits leicht gespannt ist, weil sonst wiederum ein hammerartiger Effekt entsteht. Dann aber — bei leicht angespanntem Hanfseil — soll so scharf wie irgend möglich gezogen werden, damit sich die zurückkommenden Schlagwellen am hängenbleibenden Hanfseil deutlich von Hand abfühlen lassen. Man merkt dabei sehr genau, ob die Ruckdosierung richtig war.

Dass es bei einem solchen Vorgehen gelingt, zu kurze Wellen wirklich zu vermeiden, sieht man auf dem unteren Messtreifen von Bild 8 sowie an den zugehörigen Zahlen von Tabelle 4. An dem 39 mm dicken Tragseil wurde in 4 m Distanz vom Feldende mit vier Armen gezogen. Es sind tatsächlich nur 18 m lange Wellen entstanden, und von der ersten⁸⁾ bis zur elften Schlagwellenrückkehr sind mit der Stoppuhr 47,2 s gemessen worden, was mit dem gleichzeitig aufgenommenen Diagramm tadellos übereinstimmt. Die erreichte Messgenauigkeit lag in diesem Fall unter einem halben Prozent, bezogen auf den berechneten Seilzug.

Die auf das Drahtseil ausgeübte Kraft dadurch vergrössern zu wollen, dass man sich mit dem ganzen Körpergewicht kurz an das Hanfseil hängt, scheidet daran, dass dadurch die Wirkzeit zu lang wird und die Messschärfe darunter leidet. Ebenfalls an mangelnder Messschärfe leidet das Verfahren, das Drahtseil statisch lokal zu belasten und die angebrachte Last plötzlich zu entfernen.

Es ist anzunehmen, dass mit einem Schlag einer festen Masse auf ein federndes Zwischenstück ebenfalls eine geeignete Schlagdosierung erreicht werden könnte, wenn die Elastizität dieses Zwischenstückes der gewünschten Wirkzeit entsprechend genügend gross gewählt wird, d. h. wenn die Eigenfrequenz von Federung und Masse grössenordnungsmässig bei 10 Hz liegt.

Bei dünnen, z. B. 1 cm dicken Seilen ist das Seil selbst elastisch genug, dass sich für von Hand bewegte Schlagkörper genügend lange Wirkzeiten ergeben; bei dicken Seilen müssten sehr viel grössere Massen Verwendung finden, um ohne Zusatzelastizität brauchbare Schlagwellen zu erzeugen. Bei dünnen Seilen dürften deshalb kaum je Falschmessungen vorkommen, während bei dicken mit Vorsicht vorzugehen ist.

Zum Abschluss dieser Ausführungen über die praktische Messdurchführung muss die Frage der Reflexionen aufgeworfen werden. An den Feldenden läuft das Tragseil meistens tangential auf einen Seilschuh auf, so dass nicht von einer theoretisch scharfen Reflexionsstelle gesprochen werden darf. Diese Unschärfe liegt aber eine Grössenordnung tiefer als die in Frage kommenden Wellenlängen und ist deshalb wohl ohne praktische Bedeutung. Da diese Reflexionsstellen in der Vertikalebene durch die Seilaxe eine Symmetrieebene besitzen, sind die vertikalen Schlagwellen den horizontalen vorzuziehen. Die letzteren erhalten mit jeder Reflexion zusätzliche Vertikalkomponenten bei einem stärkeren Abklingen des horizontalen Ausschlages.

Bei Reflexionen an Fahrgestellen spielt das Fahrzeuggewicht eine ausschlaggebende Rolle. Ist dieses gross, so ist die Reflexion stets gut, auch wenn an den einzelnen Rollen Teilreflexionen stattfinden, da die Rollenabstände verglichen mit der Grösse einer 20-m-Welle klein sind. Ist das Fahrzeuggewicht dagegen klein, so geht ein merklicher Teil der Schwingungsenergie unreflektiert auf der anderen Fahrzeugseite weiter und wird erst am eigentlichen Feldende reflektiert, wodurch störende Effekte entstehen.

⁸⁾ Im Interesse der Messgenauigkeit empfiehlt es sich, die Stoppuhr frühestens bei der ersten Wiederkehr der Schlagwelle in Gang zu setzen.

Aehnlich störend wirken Seilreiter und Kuppelstücke von Tragsseilen, und man wird von Fall zu Fall ausprobieren müssen, wie weit man die Teilreflexionen an ihnen von den Hauptreflexionen am anderen Feldende unterscheiden kann. In einem Fall von zwei parallelen, durch Reiter verbundenen Tragsseilen wurde beispielsweise eine Messung möglich, indem (beiden Seilen gleichzeitig erteilte) Schlagwellen am Feldende spürbar kräftigere Reflexionen erhielten als an den Reitern. Immerhin muss darauf verzichtet werden, wiederholte Durchgänge der Störungen beobachten zu wollen.

Befindet sich ein Fahrzeug irgendwo im Messfeld, so ist neben dem Seilzug meistens auch der Abstand des Fahrzeuges unbekannt. Da dieses aber im allgemeinen selbst als gute Reflexionsstelle wirkt, lassen sich in beiden Teilfeldern Schlagwellen- oder Eigenschwingungsmessungen durchführen, aus denen sich beide Unbekannten bestimmen lassen. Je nach den Gegebenheiten wird man dabei neben den am Anfang dieses Abschnittes angegebenen Beziehungen die Grössen der Teilsehnen usw. als Funktion des durch das Fahrzeuggewicht bedingten Durchhanges zu berücksichtigen haben⁹⁾.

6. Anhang. — Berücksichtigung der Kettenlinienform

Will man die Messung der Laufzeit t_L von Störwellen durch grosse Seilfelder zur Bestimmung des Seilzuges bzw. der Horizontalkraft H benutzen, so müssen Beziehungen zwischen diesen Grössen aufgestellt werden, die berücksichtigen, dass sich die Störungen entsprechend der Seilkraftvariation mit veränderlicher Geschwindigkeit entlang einer Kettenlinie bewegen.

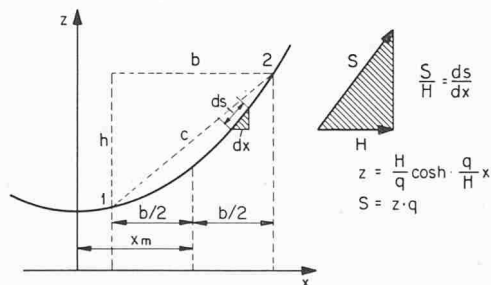
Da nach den Ausführungen der vorhergehenden Abschnitte die Wellen sowieso nicht so kurz sein dürfen, dass ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit merklich durch die Biegesteifigkeit des Seiles beeinflusst wird, genügt es, sich im folgenden auf lange Wellen zu beschränken und entsprechend (6a) anzusetzen:

$$a_\infty = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{q} S}$$

worin ds das Bogenelement des Seiles ist¹⁰⁾. Beim biegungsweichen Seil ist nun (Bild 10) $ds = (S dx)/H$, so dass sich die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit schreibt

$$\frac{dx}{dt} = H \sqrt{\frac{g}{q S}}$$

Bild 10. Seilkurve als Kettenlinie



Führt man hier noch die bekannte Kettenlinienbeziehung für S ein

$$(18) \quad S = H \cosh \frac{q}{H} x$$

so findet man die Differentialgleichung

$$dt = \sqrt{\frac{q}{g H} \cosh \frac{q}{H} x} dx$$

Integriert man diese von 1 bis 2 und wieder zurück von 2 bis 1, so ergibt sich die totale Laufzeit t_L , in der die Störwelle wieder zum Ausgangsort zurückkehrt

⁹⁾ Vgl. hierzu O. Zweifel: Seilbahnberechnung bei beidseitig verankerten Tragsseilen; Schweiz. Bauzeitung 1960, Heft 1 und 2, Gleichungen 8 bis 10.

¹⁰⁾ Die Bogenlänge s tritt hier an die Stelle der in Bild 2 verwendeten Abszisse x ; die Zugkraft S hat aber hier (lokal) wie dort die selbe Bedeutung.

$$(19) \quad t_L = 2 \int_{x_m - \frac{b}{2}}^{x_m + \frac{b}{2}} \sqrt{\frac{q}{g H} \cosh \frac{q}{H} x} dx$$

Um die mathematischen Ausdrücke nicht unübersichtlich werden zu lassen, führt man vorübergehend folgende dimensionslose Grössen ein:

$$(20) \quad \begin{aligned} \tau &\equiv \sqrt{\frac{g q}{H}} \frac{t_L}{2} & \beta &\equiv \frac{b q}{2 H} \\ \xi &\equiv \frac{q}{H} (x - x_m) & \xi_0 &\equiv \frac{q}{H} x_m \\ f(\xi_0 + \xi) &\equiv \sqrt{\cosh(\xi_0 + \xi)} & f(\xi_0) &\equiv \sqrt{\cosh \xi_0} \end{aligned}$$

Damit wird die dimensionslose halbe Laufzeit

$$(21) \quad \tau = \int_{-\beta}^{+\beta} \sqrt{\cosh(\xi_0 + \xi)} d\xi = \int_{-\beta}^{+\beta} f(\xi_0 + \xi) d\xi$$

nach Taylor entwickelt

$$\tau = \int_{-\beta}^{+\beta} \left[f(\xi_0) + \frac{\xi}{1!} f'(\xi_0) + \frac{\xi^2}{2!} f''(\xi_0) + \dots \right] d\xi$$

und schliesslich integriert

$$\tau = 2 \beta f(\xi_0) + \frac{\beta^3}{3} f''(\xi_0) + \dots$$

$$(22) \quad \tau = 2 \beta \sqrt{\cosh \xi_0} + \frac{\beta^3}{6} \sqrt{\cosh \xi_0} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 \xi_0 \right) + \dots$$

Im praktischen Fall ist allerdings ξ_0 bzw. x_m gar nicht gegeben, d. h. man kennt zwar die Koordinaten der Feldenden, jedoch nicht die Lage des der Normalform der Kettenlinie zugrunde liegenden Koordinatenkreuzes. Es ergibt sich aber eine Bestimmungsgleichung für x_m , wenn in Bild 10 die Höhendifferenz h mit Hilfe der Kettenlinienfunktion ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned} h &= z_2 - z_1 = \\ &= \frac{H}{q} \left[\cosh \frac{q}{H} \left(x_m + \frac{b}{2} \right) - \cosh \frac{q}{H} \left(x_m - \frac{b}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Schreibt man diesen Ausdruck ebenfalls mit den dimensionslosen Grössen nach Gl. (20), so wird

$$2 \beta \frac{h}{b} = \cosh(\xi_0 + \beta) - \cosh(\xi_0 - \beta) = 2 \sinh \xi_0 \sinh \beta$$

wobei sich die letzte Form nach dem Additionstheorem der Hyperbelfunktionen ergibt. Daraus erhält man

$$(23) \quad \sin \xi_0 = \frac{h}{b} \frac{\beta}{\sinh \beta}$$

Damit ist ξ_0 bestimmt und kann in (22) eingesetzt werden. In Reihen entwickelt, findet man dann

$$\tau = \beta \sqrt{\frac{c}{b}} \left[2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \frac{h^2}{c^2} \right) \beta^2 + \dots \right]$$

Werden jetzt die dimensionslosen Grössen β und τ wieder nach den Beziehungen (20) durch die ursprünglichen Grössen ersetzt, und führt man noch einen mittleren Seilzug \bar{S}

$$(24) \quad \bar{S} = H \frac{c}{b}$$

ein (was dem Seilzug an der Stelle des grössten Durchhanges entspricht, der näherungsweise in der Feldmitte auftritt), so wird

$$(25) \quad t_L = 2 c \sqrt{\frac{q}{g \bar{S}}} \left[1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{c^2} \right) \frac{q^2 c^2}{16 \bar{S}^2} + \dots \right]$$

Diese Beziehung eignet sich insbesondere für den Fall der Montage beidseitig verankerter Drahtseile, wo so lange ge-

spannt wird, bis eine Störwelle gerade die nach (25) vorausgerechnete Laufzeit braucht. In allen anderen Fällen, wo t_L gemessen wird und \bar{S} bzw. H aus diesem Wert berechnet werden soll, kehrt man die Reihe besser um und schreibt

$$(26) \quad \bar{S} = H \frac{c}{b} = \frac{4q c^2}{g t_L^2} \left[1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{c^2} \right) \frac{g^2 t_L^4}{128 c^2} + \dots \right]$$

Wie rasch diese Reihenentwicklungen konvergieren, geht daraus hervor, dass sogar bei einem ganz grossen Spannungsfeld von beispielsweise $b = c = 4$ km und $\sigma_z = 4$ t/cm² das zweite Glied in der eckigen Klammer in (26) nur 3 % und in (25) 1,5 % beträgt. In Anbetracht der allgemeinen Messungenauigkeit kann deshalb wohl in allen praktisch vorkommenden Fällen auf ein drittes Glied der Reihenentwicklungen verzichtet werden. Im Gegenteil wird man bei Spannweiten unter 1000 m auch das zweite Glied vernachlässigen können und näherungsweise schreiben:

$$(27) \quad a_\infty \approx \sqrt{\frac{g}{q} \bar{S}} \quad t_L \approx \frac{2c}{a_\infty} \quad \bar{S} = H \frac{c}{b} \approx \frac{4q c^2}{g t_L^2}$$

Die Umrechnung des nach (26) bestimmten Wertes für \bar{S} oder H auf den Seilzug S_E am oberen oder unteren Ende des Feldes muss bei grossen Spannweiten über die Kettenlinienbeziehungen erfolgen. Es ist zunächst nach (18) für $x = x_m \pm b/2$

$$S_E = H \cosh \frac{q}{H} \left(x_m \pm \frac{b}{2} \right)$$

und mit den dimensionslosen Grössen von (20) geschrieben

$$S_E = H \cosh(\xi_0 \pm \beta) = H (\cosh \xi_0 \cosh \beta \pm \sinh \xi_0 \sinh \beta)$$

Setzt man hier wieder ξ_0 aus (23) ein und entwickelt in Reihen, so ergibt sich mit (20) und (24) für den Seilzug am Feldende

$$(28) \quad S_E = \pm \frac{q h}{2} + \bar{S} \left[1 + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h^2}{c^2} \right) \left(\frac{q c}{\bar{S}} \right)^2 + \frac{1}{384} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{h^2}{c^2} - \frac{1}{3} \frac{h^4}{c^4} \right) \left(\frac{q c}{\bar{S}} \right)^4 + \dots \right]$$

In dieser Reihenentwicklung ist ein drittes Glied angegeben (trotzdem es sogar für grosse Spannweiten sehr klein bleibt), weil das zweite Glied verdächtig gross ist. Für $h = 0$, $c = 4$ km, $\sigma_z = 4$ t/cm² beträgt dieses immerhin 9 %.

Drückt man S_E schliesslich mit (26) direkt durch die gemessene Laufzeit aus, so wird

$$(29) \quad S_E = \pm \frac{q h}{2} + \frac{4q c^2}{g t_L^2} \left[1 + \left(1 - \frac{5}{8} \frac{h^2}{c^2} \right) \frac{g^2 t_L^4}{96 c^2} + \dots \right]$$

Während die Grössen \bar{S} und H , wie sie mit (26) bestimmt werden, für vertikal hängende Seile unbrauchbar sind, kann Gleichung (29) auch in diesem Fall angewendet werden. Eine genaue Durchrechnung zeigt sogar, dass sie dann, also für $c = h$, zur exakten Gleichung wird und keine weiteren Glieder noch höherer Ordnung hinzukommen.

7. Zusammenfassende Schlussfolgerungen

Die Zugkraftbestimmung in Drahtseilen mit Transversalwellen lässt sich in einfachster Weise vornehmen und dürfte bei korrekter Durchführung in den meisten praktischen Anwendungsfällen eine ausreichende Genauigkeit aufweisen. Am einen Ende des Seilfeldes werden Störwellen eingeleitet und ihre Laufzeit t_L durch das ganze Feld gemessen. Bei langen Spannungsfeldern verursacht man am besten einmalige Störungen oder sog. Schlagwellen, die dann längere Zeit längs des Seiles hin- und herlaufen. Können diese Wellen während mindestens 40 Sekunden gezählt werden, so genügt die Laufzeitbestimmung mit einer Stoppuhr. Klingt die Störung in kürzeren Feldern wegen der vielen Reflexionen vorzeitig ab, so erregt man besser durch rhythmische Störungen eine Eigenschwingung (stehende Wellen), wobei sich die Laufzeit t_L aus der Frequenz ergibt. Angaben über die Auswertung sind zu Anfang von Abschnitt 5 zusammengestellt. Für grosse Spannungsfelder werden dazu im Anhang

abgeleitete Beziehungen benützt, in denen die Seilzugvariation in Funktion der geodätischen Höhe und die wirkliche Form der Kettenlinie berücksichtigt sind.

Bei allen Auswertungen wird vorausgesetzt, dass die Seile als biegungsweich betrachtet werden können, d. h. dass die Theorie der Saitenschwingung zugrunde gelegt werden darf. Das ist aber nur zulässig, wenn die Wellenlänge ein Minimalmass nicht unterschreitet, das bei normal gespannten Tragseilen das 300- bis 400-fache des Seildurchmessers beträgt. Kürzere Wellen weisen infolge der Seilsteifigkeit erhöhte Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten auf und sollten vermieden werden.

Solche kurze Wellen können beispielsweise entstehen, wenn mit festen Gegenständen auf dicke Seile geschlagen wird, wie anhand von Messdiagrammen gezeigt wird. Bei dünnen Seilen ist allerdings gegen diese Art der Schlagwellenerzeugung nichts einzuwenden.

Um in jedem Fall sicher zu gehen, wird empfohlen, die Störungen ganz allgemein von Hand zu erzeugen, indem bei dicken Seilen die Armkraft mehrerer Personen zur Ausübung genügend grosser Kräfte zu Hilfe genommen werden muss. Für die Kraftübertragung auf das Drahtseil wird ein Hanfseil verwendet, an dem auch die zurückkommende Störwelle fühlbar wird. Stellt man dabei fest, dass die immer wiederkehrenden Impulse klein an Zahl sind und stets im selben Rhythmus erfolgen, so darf angenommen werden, dass die Langwelligkeit genügend gross ist. Das einfache Abfühlen von Hand erlaubt auch, allzu kurze, vibrationsartige Störwellen als solche zu erkennen.

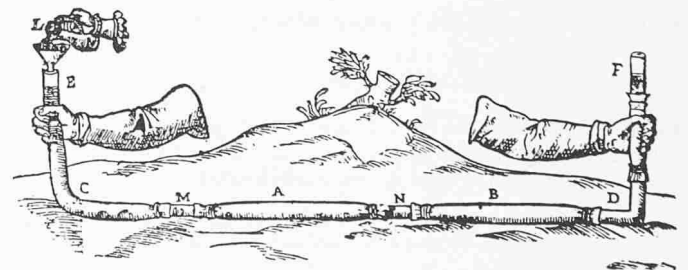
Adresse des Verfassers: Prof. Otto Zweifel, Maschinen-Laboratorium ETH, Sonneggstr. 1, Zürich 6.

300 Jahre Wasserwaage

DK 526.951.3

Die Wasserwaage ist im Jahre 1661 vom französischen Astronomen *Melchisedec Thevenot* erfunden worden. Er füllte ein Glasrohr beinahe ganz mit Weingeist, schmolz es dann zu und schuf so die heute noch übliche Wasserwaage. Das «instrumentum Thevenotianum», wie die Wasserwaage ursprünglich hiess, wurde im Jahre 1775 durch Felice Fontana verbessert, der an Stelle der Luftblase einen luftleeren Raum schuf. L. H. Tobiesen gab im Jahre 1798 an, die Glasröhre der Wasserwaage soll nicht gerade, sondern «etwas gebogen seyn», damit die Blase besser den höchsten Punkt in der Mitte finde.

Viel älter als die hier beschriebene Form der Wasserwaage ist die Schlauchwaage, denn früh schon scheint man das Gesetz erkannt zu haben, dass in einer zusammenhängenden, freien Wassermenge alle Teile der Oberfläche eine Horizontalebene bilden. Heron der Aeltere aus Alexandrien beschreibt ums Jahr 110 nach Christus das Prinzip kommunizierender Röhren, nach welchem in einer u-förmig oder irgendwie anders gebogenen Röhre das Wasser beider Schenkel gleich hoch stehen muss. Eine der frühesten Abbildungen einer solchen Schlauchwaage findet sich im Jahre 1629 bei Giovanni Branca. Nach Einführung des vulkanisierten Kautschuks verwendete man diesen zu Schläuchen. Diese Art der Ermittlung der Höhenlage zweier Punkte, z. B. eines Hauses, wurde erst auf der Pariser Weltausstellung von 1849 einer breiten Öffentlichkeit bekannt.



Schlauchwaage, bestehend aus Lederschläuchen, die durch kurze Metallrohre verbunden sind. Nach Giovanni Branca, *Macchine*, Rom 1629