Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 90 (1972)
Heft: 1

Artikel: Anwendung der Methode der Finiten Elemente im Leichtbau
Autor: Erni, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-85085

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zum 90. Jahrgang der Schweizerischen Bauzeitung

Mit dem Jahre 1972 tritt die Schweizerische Bauzeitung ihren 90. Jahrgang an. In den vergangenen Jahren entwickelte sie sich zum gemeinsamen Fachorgan der Schweizer Ingenieure und Architekten, und ihre Bedeutung reicht weit über die Landesgrenzen hinaus. Seit jeher war es ihr Anliegen, sachliche Informationen über Wissenschaft, Forschung und Technik zu vermitteln. Dass sie sich gegenüber der mächtigen ausländischen Konkurrenz zu behaupten vermochte, beruht aber wohl auf der besonderen persönlichen Note, welche diese Zeitschrift auszeichnet. Die Redaktoren bemühten sich stets darum, neben der trockenen Technik auch die gesellschaftlichen und persönlichen Probleme zum Wort kommen zu lassen. Die sorgfältige redaktionelle Bearbeitung und die Bildauswahl trugen das ihrige dazu bei, die Bauzeitung für alle lesbar zu machen. Erfreulicherweise ist diese Richtung auch nach der vor sechs Jahren erfolgten Übergabe an die Verlags-AG der akademischen technischen Vereine beibehalten worden. Heute ist die Bauzeitung das offizielle Organ des Schweizerischen Ingenieur- und Architekten-Vereins und der Gesellschaft ehemaliger Studierender der ETH. Sie entwickelt sich zum Forum der akademischen technischen Kreise und erlaubt die Auseinandersetzung mit den dringenden Problemen unserer Berufsbildung und unserer gesellschaftlichen Ordnung. Die ETH ist in ihrer gegenwärtigen Reformphase besonders dankbar, dass auch ihren Problemen angemessener Raum und wohlwollendes Interesse eingeräumt wird. Der scheidenden Redaktorengeneration möchte ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für ihr erfolgreiches Bemühen aussprechen und gleichzeitig meiner Hoffnung Ausdruck geben, die Schweizerische Bauzeitung möge weiterhin ihrer grossen Verpflichtung nachkommen, zum Wohle unserer Gesellschaft für eine sinnvolle Entwicklung unserer Technik beizutragen. Eine treue Leserschaft im In- und Ausland wird ihr dafür dankbar sein.

H. H. Hauri
Präsident der ETH Zürich

Anwendung der Methode der Finiten Elemente im Leichtbau

DK 625.2:629.135:621.001.2

Von **E. Erni**, Zürich

Einleitung und Definition

Das Prinzip, das Eigengewicht einer Konstruktion zu verringern und trotzdem genügende Festigkeit, Steifigkeit, Stabilität und Ermüdungsfestigkeit zu gewährleisten ist der kennzeichnende Faktor des Leichtbaus. Er soll mechanisch hoch beanspruchte Bauteile unter Anwendung geschickter konstruktiver Methoden und verfeinerter Rechenmethoden der Statik und der Festigkeitslehre möglichst leicht ausführen. Eine der Rechenmethoden ist die der Finiten Elemente. Sie kann umschrieben werden als eine Rechnungsart, in welcher die Struktur vorerst in einer Zahl von diskreten Elementen idealisiert wird, mit spezifischer vorausgesetzter Art der Deformation oder der Spannungsverteilung. In Bild 1 wird die Stellung der Methode der Finiten Elemente als eine Matrizenmethode der Festigkeitslehre gegenüber den anderen Arten der Konstruktionsberechnung gezeigt. Berechnungsverfahren, welche die Technik der numerischen Integration oder der Differenzenrechnung benutzten, können auch in Matrizenschreibweise ausgedrückt und damit der Matrizenalgebra die Lösung der massgebenden Gleichungen für die Unbekannten übertragen werden [8]. Dieses Vorgehen wird aber

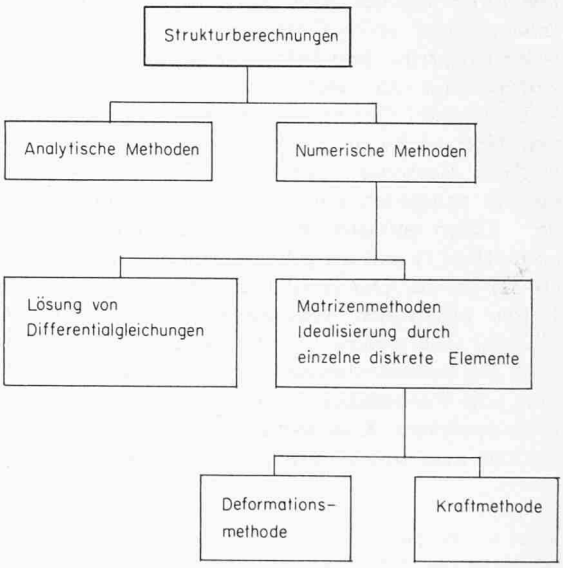


Bild 1. Methoden der Strukturberechnung

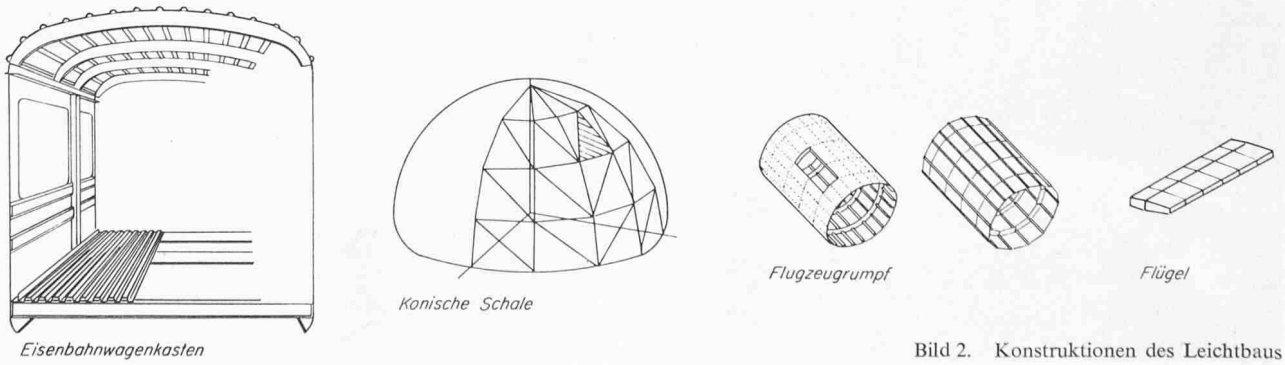


Bild 2. Konstruktionen des Leichtbaus

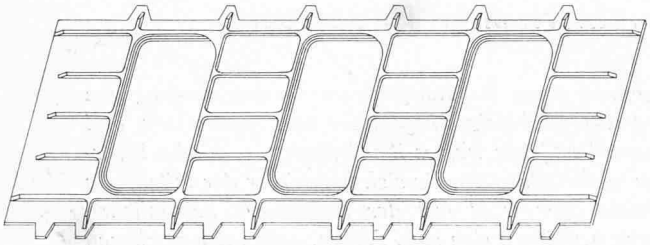


Bild 3. Integralbauweise. Gefräste Fensterrahmenkonstruktion des Überschallverkehrsflugzeuges «Concorde»

normalerweise nicht als Matrizenmethode bezeichnet, da die Matrizen nicht wie bei der Methode der Finiten Elemente das Wesentliche des Berechnungsvorganges sind.

Idealisierung einer Struktur

Alle diese Berechnungsverfahren sind eng mit der Idealisierung der Struktur verbunden. Es ist einleuchtend, dass eine Platte konstanter Wandstärke nicht gleich behandelt werden kann, wie ein dünnes Blech, das mit zahlreichen Versteifungen und Profilen versehen ist, oder eine Platte mit zahlreichen Rippen. Die Orte der Versteifungen und Rippen führen zu Störungen des Spannungsverlaufes. Würde eine Konstruktion aus Blechen, verstärkt mit Rippen und Holmen als Kontinuum mit konstanter Dicke idealisiert, so ergäbe sich ein allgemeiner Spannungsverlauf, der die Störstellen nicht berücksichtigt und die Bemessung der einzelnen Versteifungen erschwert. Es ist deshalb von Vorteil, sich die Konstruktionsarten des Leichtbaus vor Augen zu halten, bevor die Anwendung der Finiten Elemente diskutiert wird (Bild 2). Die Einteilung der Bauweisen unterscheidet zwischen einer Integral- und einer Differentialbauweise. Die Integralbauweise entspricht dem Prinzip, aus einem Stück zu fertigen, wobei die für eine Leichtbauschale kennzeichnende Auflösung in Längs- und Querversteifungen erhalten bleibt. Flügelteile von Hochgeschwindigkeitsflugzeugen (Mirage III S) werden in dieser Bauweise hergestellt. Weitere Beispiele sind die im Gesenk gepressten Fensterrahmen der Boeing 707, die aus dem Vollen gefrästen Fensterrahmenkonstruktion der Concorde (Bild 3) und die gefräste Rumpfseitenwand der Vickers (BAC) VC 10. Die Herstellung erfolgt, wie erwähnt, durch Fräsen aus vollen Metallstücken oder durch Pressen im Gesenk. Gut geeignet für die integrale Konstruktionsart ist auch die Sandwichbauweise (Bild 4A, 4B) und die Herstellung von Werkstücken aus glasfaser-, borfaser- oder carbonfaserverstärkten Kunststoffen. Mit Differentialbauweise bezeichnet man eine Konstruktionsart, die sich aus einzelnen

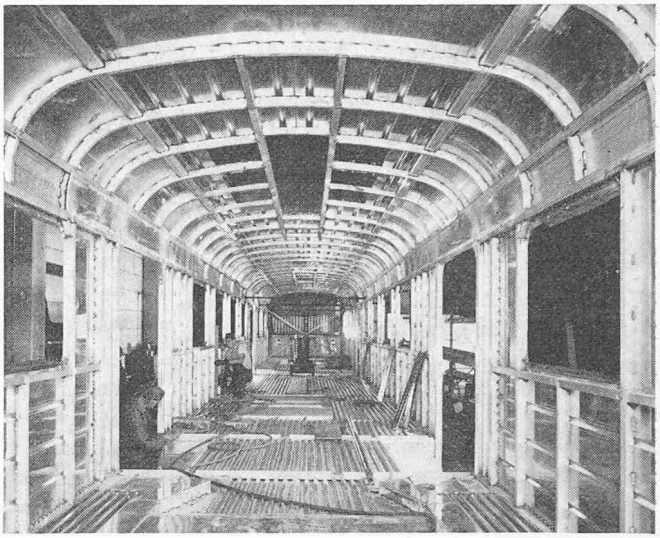


Bild 5. Differentialbauweise: NSB-Leichtmetallwagen eines Vorortszuges (Photo Alusuisse)

Blechen, Holmen und Rippen zu einem Ganzen zusammenfügt. Als praktisches Beispiel kann der Aufbau eines modernen Eisenbahnwagenkastens (Bild 5), der Flügel eines Leichtflugzeuges (Bild 6) oder der Rumpf des Verkehrsflugzeuges Boeing 737 angesehen werden. Jede dieser Bauweisen hat ihre bestimmten Vor- und Nachteile und wird nach den gegebenen fertigungstechnischen Einrichtungen und den an die Konstruktion gestellten Anforderungen eingesetzt werden müssen. Zwischen diesen erwähnten Bauweisen bestehen in der Praxis zahlreiche Zwischenlösungen.

Die Idealisierung der verschiedenen Bauweisen auf die der mathematischen Berechnung zugängliche Form, muss nun unter Berücksichtigung ihrer spezifischen Eigenheiten erfolgen und ist nicht in beiden Fällen dieselbe. Die Genauigkeit einer Konstruktionsberechnung ist in starkem Masse von der Güte der Idealisierung abhängig, wobei auch die Genauigkeit der Eingabedaten, wie Belastung, Geometrie, Steifigkeitswerte, eine gebührende Rolle spielen. Eine Konstruktion lässt sich für die Berechnung als Kontinuum, als Diskontinuum bestehend aus einzelnen Elementen oder als eine Mischung der beiden auffassen. Welche Form gewählt wird, muss aufgrund der Bauweise sowie dem möglichen Rechenaufwand und der zur Verfügung stehenden Rechenhilfsmittel entschieden werden. Es wird auch im voraus festgesetzt werden müssen, ob in der Rechnung nur der allgemeine Spannungsverlauf erfasst werden soll, oder ob es sich um

Bild 4 A. Beispiel einer integralen Sandwichbauweise: Rumpf des Segelflugzeuges «Diamant» der Flug- und Fahrzeugwerke Altenrhein. Deckschichten aus glasfaserverstärktem Kunststoff, Kernschicht aus Schaumstoff «Klégecell»

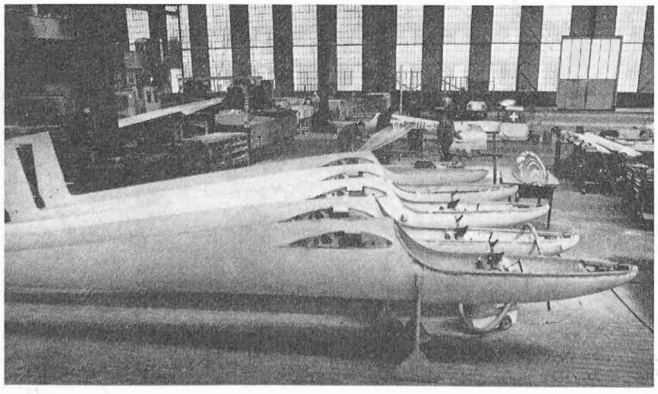
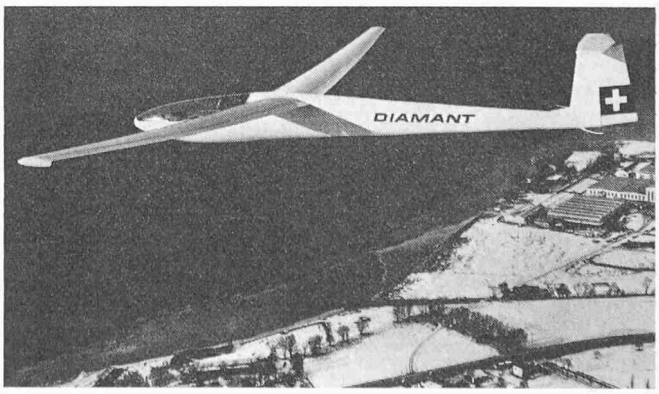
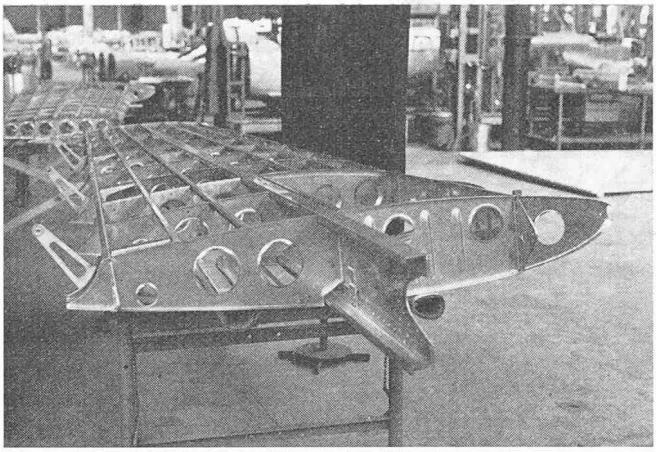


Bild 4 B. Das fertiggestellte Segelflugzeug





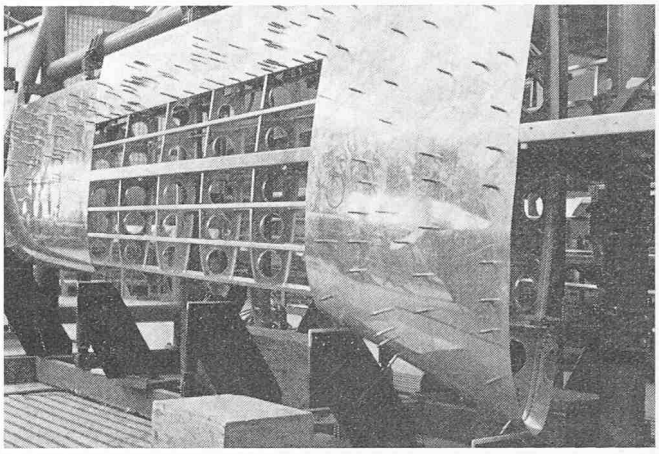


Bild 6. Flügel des akrobatiktauglichen Grundschulungsflugzeuges AS 202 «Bravo» der Flug- und Fahrzeugwerke Altenrhein als Beispiel der Differentialbauweise

eine Ausführungsberechnung handelt, die eine grosse Genauigkeit aufweisen soll. Diese Ueberlegungen sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Bild 7 zeigt verschiedene Möglichkeiten der Idealisierung einer Platte mit Versteifungen, als:

- Kontinuum mit «verschmierten» Rippen, Gurten und Stringern
- Halbkontinuum bei dem die Stringer im Blech integriert werden, die Rippen aber als Einzelteile vorhanden sind
- Diskontinuum ähnlich dem Schubfeldträger bei dem jedes einzelne Bauteil gewahrt bleibt.

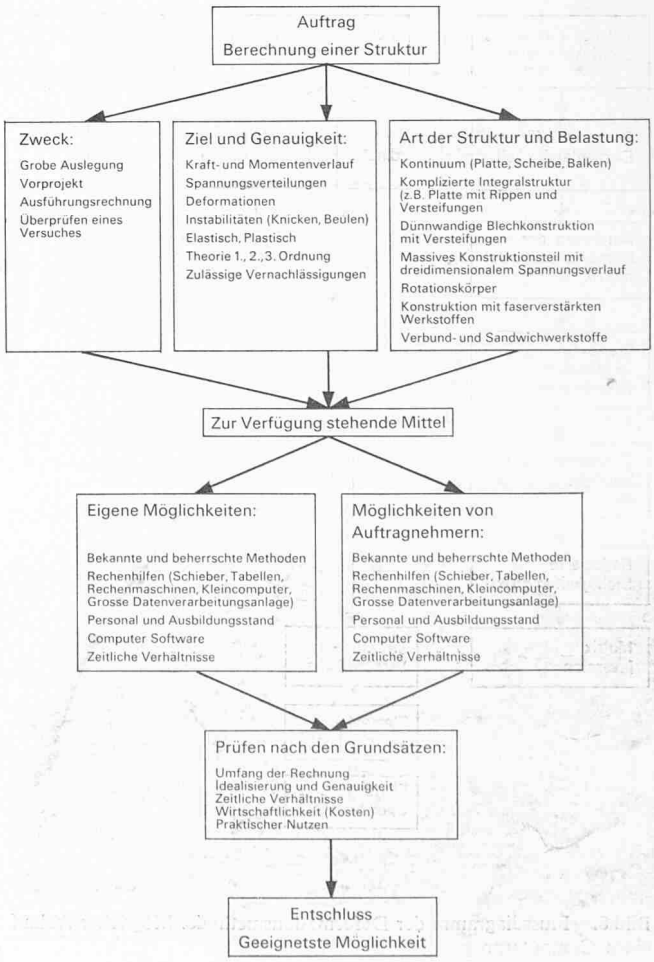
Die Methode der Finiten Elemente erlaubt die Idealisierung von Konstruktionen nach den verschiedenen erwähnten Möglichkeiten. Ein Kontinuumskörper, etwa eine Scheibe, eine Platte, ein Zylinder, eine Schale ohne Versteifungen und komplizierte Durchdringungen kann auf einfache Art durch gleichartige Finite Elemente (Scheiben-, Platten-, Schalenelemente usw.) mit der geeigneten Form (Dreieck, Viereck, Polygon) nachgebildet werden. In einfachen Fällen ist es möglich, das Netz der Finiten Elemente automatisch zu generieren, wodurch sich die Dateneingabe vereinfacht.

Im Falle der Differentialbauweise müssen, um die Charakteristik der Konstruktion zu erhalten, ganz verschiedenartige Elemente (Stäbe, Balken, Schubfelder, Scheiben, Platten) nebeneinander angewendet werden. Um die verschiedenen Elemente gleichzeitig und ohne Schwierigkeiten nebeneinander verwenden zu können, muss ein aufwendiges Programm aufgestellt werden. Dabei ist die automatische Generation eines Netzes von Finiten Elementen schwer zu verwirklichen.

Methode, Finite Elemente, Ablauf der Rechnung

Als Grundlage der Rechnung diente in den vorliegenden Beispielen die Deformationsmethode der Matrizenstatik, auch «Stiffness-» oder «Steifigkeitsmethode» genannt, im Gegensatz zur Kraftmethode der Matrizenstatik, auch «Flexibilitätsmethode» genannt. Die Dualität dieser beiden Methoden wurde von *J.H. Argyris* [1] gezeigt. Bei beiden Methoden können die gleichen Elementeigenschaften benutzt werden, was offensichtlich zu identischen Ergebnissen führen muss. Der Rechnungsgang, welcher zur Bestimmung der Spannungen und Deformationen führt, ist in jeder Methode verschieden. Das heisst, dass infolge der verschiedenen Rundungsfehler die effektiven numerischen Ergebnisse leicht abweichen können. Da die Zahl der Unbekannten für dieselbe Struktur bei beiden Methoden verschieden ist, besteht hier ein Kriterium für die Auswahl. Die Deformationsmethode der Matrizenstatik hat im allgemeinen eine grössere Zahl sogenannter «kinematisch Unbestimmter», ist aber beim Aufbau von allgemeinen Programmen flexibler als die Kraftmethode der Matrizenstatik. Ein auf der Kraftmethode beruhendes Programm eignet sich für stark problemorientierte Rechnungen, bei denen dieselbe Struktur ohne grundsätzliche Änderung in der Zusammensetzung, aber mit verschiedenen Parametern immer wieder berechnet werden muss. Beispiele für Berechnungen nach der Kraftmethode der Matrizenstatik findet man in den Büchern von *J. Robinson* [2] und *J.S. Prezemieniecki* [3].

Tabelle 1. Überlegungen zur Bestimmung der für einen Auftrag geeigneten Berechnung



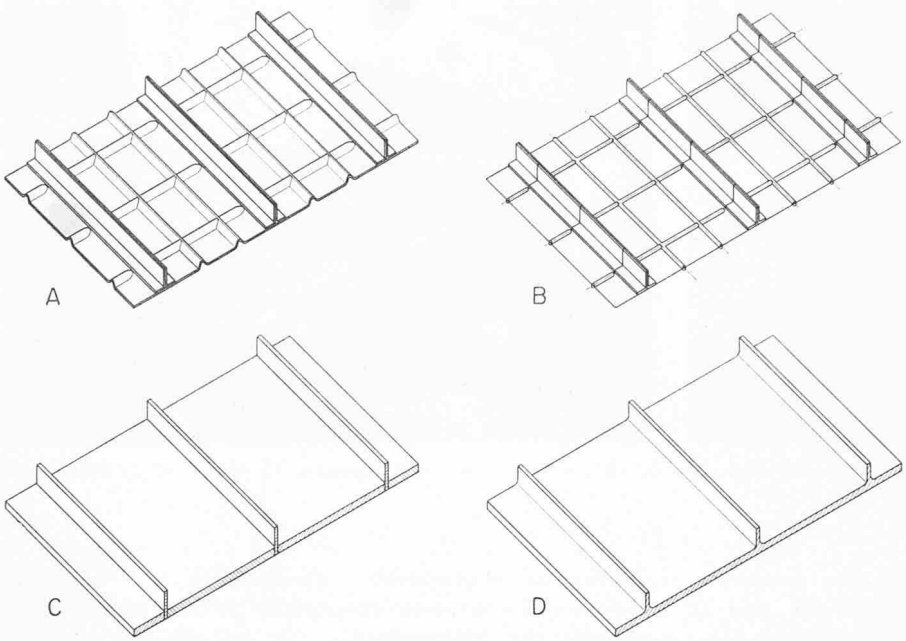


Bild 7. Verschiedene Möglichkeiten der Idealisierung einer dünnen Platte mit Versteifungen

A Konstruktion

B Diskontinuum, ähnlich dem Schubfeldträger, bei dem jedes einzelne Bauteil gewahrt bleibt

C Halbkontinuum, bei dem die «Stringer» in Blech integriert werden, die Rippen aber als Einzelteile gewahrt bleiben

D Kontinuum, Platte mit veränderlichem Querschnitt. Stringer und Rippen sind in der Platte integriert

Die Berechnung der Kräfte, Deformationen und Spannungen einer Struktur mit dem Computer kann nach den folgenden Schritten durchgeführt werden (siehe auch Bild 8):

Eingabe der Grunddaten der idealisierten Struktur

- Position der Knotenpunkte
- Elementorientierung
- Elementsteifigkeit
- Bestimmung der lokalen Koordinaten
- Berechnung der Richtungskosinuse für jedes Element
- Berechnung der Elementsteifigkeit in globalen Koordinaten
- Zusammensetzen der Elementsteifigkeiten zur Steifigkeitsmatrize der ganzen Struktur
- Inversion der Steifigkeitsmatrize K_f
- Berechnung der Struktur-Verschiebungen, der Elementverschiebungen, der Kräfte und Spannungen.

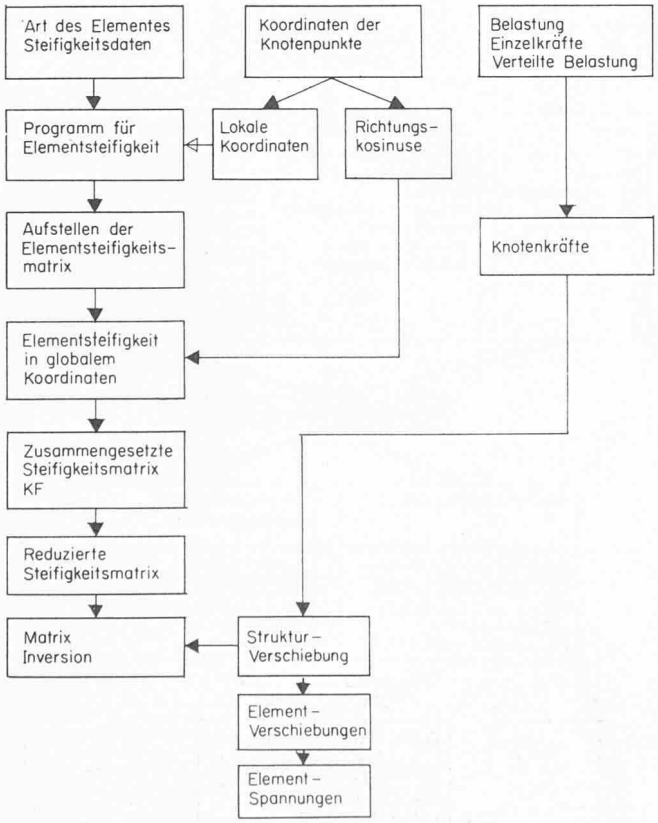


Bild 8. Flussdiagramm der Deformationsmethode. Möglicher Ablauf eines Computerprogramms für Finite Elemente

Tabelle 2. Zusammenstellung möglicher Elemente

Elementart	K	F	Konstruktions-parameter	Beanspruchungen (lokales Koordinatensystem)
Zug-Druck-Stab	2	3	A, E	Zug-Druck-Kraft Axiale Spannung
Dreidimensionales Biegebalkenelement	2	6	A, E, v, RP, Ix, Iy, Ax, Ay, I, θ	Zug-Druck-Kraft Torsionsmoment Biegemoment MX, MY Scherkraft SX, SY
Rechteckiges Schubfeld	4	3	T, E	Zug-Druck-Spannung x Zug-Druck-Spannung y Schubspannung (Spannungen in der Mittelachse des Elementes)
Dreieckiges Membranelement	3	3	T, E	wie oben
Rechteckiges Biegeplatten-element	4	3	T, E, v, RP	Verteiltes Moment mx, my Torsionsmoment mxy Biegespannungen x, y Schubspannung xy Spannungen in der Mittelachse des Elementes
Vier Knoten Balkenelement	4	3	A, E, v, I, A_s	Scherkraft am Knoten 1, 2 Zug-Druck-Kraft am Knoten 1, 2 Momente am Knoten 1, 2

Konstruktionsparameter

T = Plattendicke
A = Querschnittsfläche
E = E-Modul
v = Querkontraktionszahl
RP = Bezugsebene
Ix, Iy = Trägheitsmomente
A_s = Auf Schub wirksame Fläche
J = Torsionskonstante
θ = Referenzwinkel

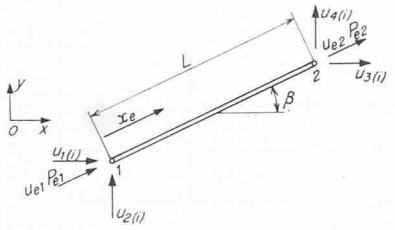


Bild 9. Endlastelement. *Annahmen:*
1. Die Kräfte können nur in der Richtung der Elementachse wirken
2. Die Querschnittsfläche A und der E-Modul sind über die Länge L nicht veränderlich
3. Das Material bleibt immer linear elastisch
4. Das Element kann nicht ausknicken

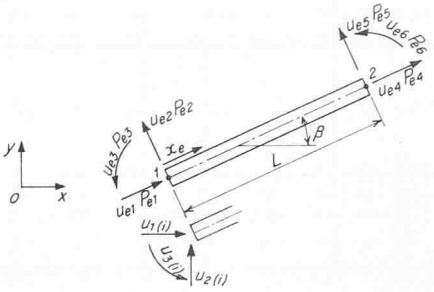


Bild 10. Biegebalkenelement mit Schub.
Annahmen:
1. Folgende Grössen bleiben über die Länge konstant:
   Trägheitsmoment I
   Querschnittsfläche A
   Auf Schub wirksame Fläche As
   E-Modul, G-Modul
2. Das Element verhält sich entsprechend der bekannten Theorie
3. Die Bedingungen für die Endlast sind gleich wie für das Endlast-Element

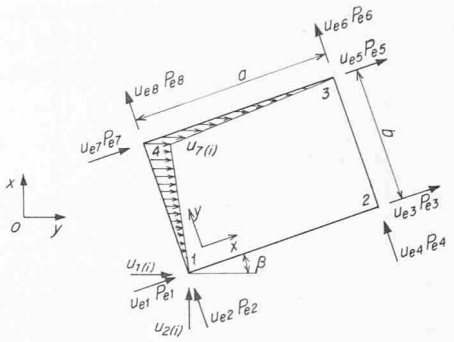


Bild 11. Schubfeld
1. Das Element ist rechteckig und hat die Länge a und die Breite b
2. Die Dicke t und der G-Modul sind über die Grösse gleichbleibend
3. Das Element nimmt eine gleichförmige Schubspannung auf, aber keine Normalspannung
4. Das Material bleibt linear elastisch
5. Es tritt kein Beulen auf

Im vorliegenden Programm werden die Strukturen aus folgenden Elementen mit verhältnismässig einfachen Eigenschaften zusammengesetzt:
- Endlastelemente (Zug- Druckbalken) (Bild 9)
- Biegebalken mit Schub- und Normalkraft (Bild 10)
- Schubfeldelement (Bild 11)

Weitere mögliche Elemente sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Es wird vorausgesetzt, dass die Elemente an diskreten Punkten, genannt Knoten, verbunden sind. Die Bewegung jedes Knotens ist in der Form eines Satzes von Verschiebungen und Rotationen ausgedrückt. Dabei wird angenommen, dass die Deformationen in jedem Element lineare Funktionen der Knotenverschiebungen sind. Damit ist es möglich, einen Satz linearer Beziehungen aufzustellen, welcher die Kräfte an jedem Element in Termen der Knotenverschiebung ausdrückt.

Die Grundlagen der mathematischen Formulierung und der Lösung des Satzes linearer Gleichung sind bereits im einleitenden Beitrag [8] gegeben worden.

Beispiele

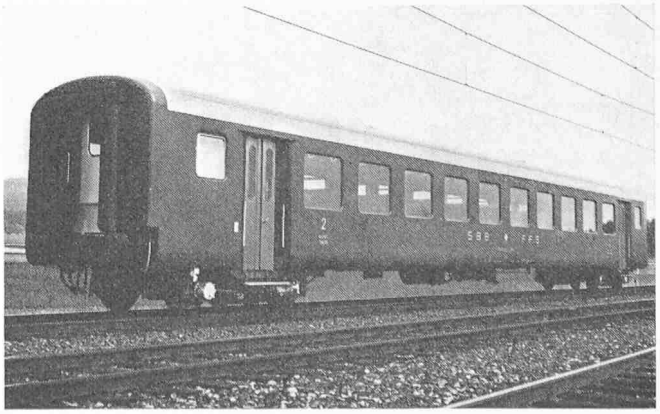
Das Institut für Flugzeugstatik und Leichtbau der ETH Zürich hat in Zusammenarbeit mit dem Forschungszentrum der British Railways und der SBB (Sektion Waggonbau, Dipl. Ing. *Guignard)* nach der Methode der Finiten Elemente Eisenbahnwagen berechnet. Bei den Strukturen dieser Wagen handelt es sich um dünnwandige Blechkonstruktionen in Differentialbauweise. Die Seitenwandbleche sind in Längsrichtung durch sogenannte «Stringer» versteift, um eine ausreichende Beulstabilität zu gewährleisten und eine entsprechende Übertragung von Längskräften zu gewährleisten. Um die Querschnittsgestalt zu erhalten und die Einleitung von grösseren Lasten sicherzustellen, sind die Konstruktionen durch biegesteife Rahmenrippen und Querträger verstärkt. Von den zwei mit der Methode der Finiten Elemente und einer anderen Methode berechneten und gemessenen Wagenkasten, dem englischen HDS-Wagen (High-Density-Stock) und dem Einheitswagen II der SBB werden die Ergebnisse des letzteren hier dargestellt. Die Wahl ist auf diesen Wagenkasten gefallen, weil an ihm bereits zahlreiche Messungen durchgeführt worden sind und so eine gute Überprüfung der Rechnung mit den Messwerten möglich ist.

Der Wagenkasten, eine geschweisste Stahlkonstruktion, wird im Bild 12, die mit zweidimensionalen Endlast, Schubfeld und Biegebalkenelementen idealisierte Struktur im Bild 13 gezeigt. Da beide Seiten der Konstruktion identisch sind, wird Symmetrie durch die mittlere Längsachse des Wagenkastens vorausgesetzt. Die Lastfälle sind, abgesehen von einigen wenigen Einzellasten, im allgemeinen ebenfalls symmetrisch, weshalb nur die eine Hälfte des Wagenkastens analysiert wird. Die idealisierte Struktur weist folgende Kennwerte auf:

	Ohne Symmetrie	Mit Symmetrie
Zahl der Knoten	184	97
Verschiebungen (Freiheitsgrade)	448	236
Zahl der Elemente	429	223

Der Untergurt und das Dach des Wagens verlangen trotz der weitgehenden Auflösung des Wagenkastens in seine Konstruktionselemente noch eine beträchtliche Anpassung und Idealisierung der Steifigkeitswirkung. Für die Blechhaut, welche eine Dicke t von 2,5 mm aufweist, werden Schubfelder benutzt. Das bedingt, dass der Normalkraftanteil, welcher von den Blechen tatsächlich aufgenommen wird, in die

Bild 12. Leichtstahlwagen Typ II-B. Als konkretes Studienobjekt für Berechnungen mit der Finiten Elemente wurde der bereits in Betrieb stehende Einheitswagen II-B der SBB gewählt (80 Sitzplätze 2. Klasse, Länge über Puffer 24,70 m, Taragewicht 29 t)



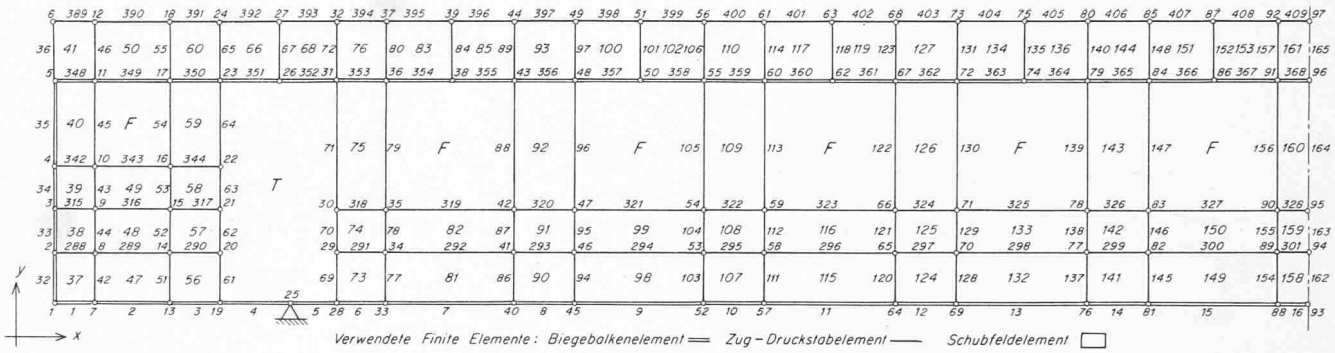


Bild 13. Zur Berechnung mit Finiten Elementen idealisierter Leichtstahlwagen: Die idealisierte Struktur des Wagens weist bei Ausnutzung der Symmetrie eine Knotenzahl von 97, mit 236 Freiheitsgraden und 223 Elementen auf

Querschnittsfläche der Stringer eingebaut werden muss. Die sogenannte «mittragende Breite» der Bleche, aus welcher dieser Flächenanteil bestimmt wird, ist entsprechend den spezifischen Gegebenheiten nicht an allen Orten der Konstruktion dieselbe.

Zur Bestimmung der mittragenden Breiten der Bleche und damit der Berechnung der Ergänzungsflächen zu den Profilflächen waren die folgenden Richtlinien massgebend:

- Mittragende Breite bei Profilen, die in horizontaler Richtung verlaufen und gekrümmte Bleche verstärken: $b_m = 40\,t$ oder $b_m = d/2$ (t = Blechdicke; d = Profilabstand). Bekanntlich ist die kritische Beullast von gekrümmten Blechen höher als diejenige von ebenen Blechen.
- Mittragende Breite bei Profilen, welche in vertikaler Richtung verlaufen und gekrümmte Bleche verstärken: b_m = Blechanteil zwischen den Rändern der Hutprofile.
- Mittragende Breite bei Profilen, welche ebene Bleche verstärken: $b_m = 30\,t$ plus der Blechanteil zwischen den Rändern der Hutprofile.

Für eine weitergehende Diskussion der mittragenden Breite muss auf die entsprechende Literatur verwiesen werden [5], [6].

Die Profilteile des Wagenkastens werden durch Endlastelemente dargestellt. Der Untergurt, der vordere Eckpfosten und der untere Längsträger wurden als Biegebalkenelemente

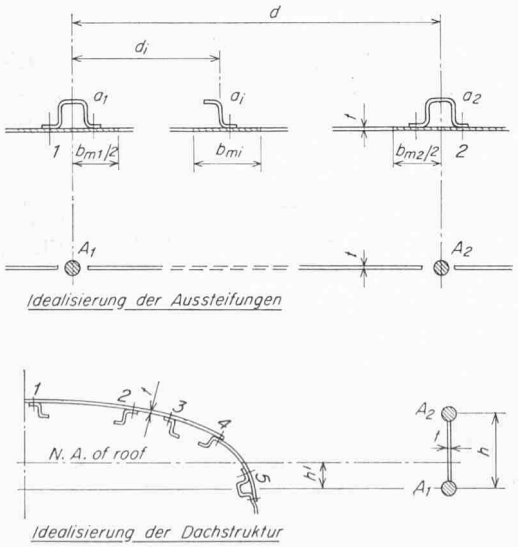


Bild 14. Idealisierung des Untergurtes (Seitenwand) und des Daches. Die Aussteifungen in der Seitenwand werden auf zwei Profile reduziert. Die Dachstruktur ist durch zwei Längsträger mit den Flächen A_1 und A_2 dargestellt, die durch ein Schubblech der Dicke t verbunden sind

mit Berücksichtigung der Scherkräfte eingeführt. Die Dachstruktur ist durch zwei Längsträger mit den Flächen A_1 und A_2 idealisiert, die durch ein Schubblech der Dicke t verbunden sind. Der untere dieser Träger wird durch Biegebalkenelemente, der obere durch Endlastelemente in die Rechnung eingegeben. Die Einzelheiten der Idealisierung der Seitenwand und des Daches können dem Bild 14 entnommen werden.

Belastungen

In den ausgeführten Berechnungen sind zwei Lastfälle betrachtet worden, nämlich Vertikallast und Horizontallast. Die gleichmässig über die Wagenlänge verteilte Vertikallast wird in den Knoten des unteren Längsträgers konzentriert. Die horizontale Pufferlast greift am unteren Längsträger an, wobei die Exzentrizität der Puffer durch Anbringen des entsprechenden Momentes berücksichtigt wird. Gemäss den geltenden Vorschriften muss der Wagen so bemessen werden, dass er unter der vollen Vertikallast von 35 t einen horizontalen Pufferstoss von 200 t ohne bleibende Verformung übersteht.

Ergebnisse der Berechnungen

Die numerischen Ergebnisse beziehen sich auf die Einheitslast 1 t, als verteilte Last wirkend. Die Bilder 15A und 15B zeigen die Kräfte in den Endlastbalken und die Schubspannungen in den Blechen. Die in Bild 16 gezeigten Durchbiegungen gelten für Einzellasten mit dem Gesamtbetrag von 10 t, entsprechend den durchgeführten Messungen. Der Vergleich der Ergebnisse wurde gegenüber einem bereits bestehenden Computerprogramm auf den Grundlagen der verbesserten Theorie statisch unbestimmter Rahmentragwerke, welches bisher für die Wagenkastenberechnung benutzt wurde, und gegenüber den effektiven Messergebnissen durchgeführt. Diese Rechnung idealisiert den Wagenkasten als quasizweidimensionales Rahmentragwerk, bestehend aus Dach (Obergurt) und Untergurt, verbunden durch Pfosten mit elastischer Einspannung. Diese Rechenmethode gibt im Untergurt und im Obergurt für die Kräfte, Momente und Spannungen sowie für die Durchbiegung und die Eigenfrequenz recht gute Werte.

Tabelle 3. Vorbereitungs- und Auswertungsaufwand

	Rahmentragwerk		Finite Elemente	
	Geübter Ing.	Nicht geübter Ing.	Geübter Ing.	Nicht geübter Ing.
Vorbereitungen (Tage)	3	6	6–8	12–16
Computerrechenzeit (Minuten)	3		12–15	
Auswertung (Tage)	3–4		6–8	

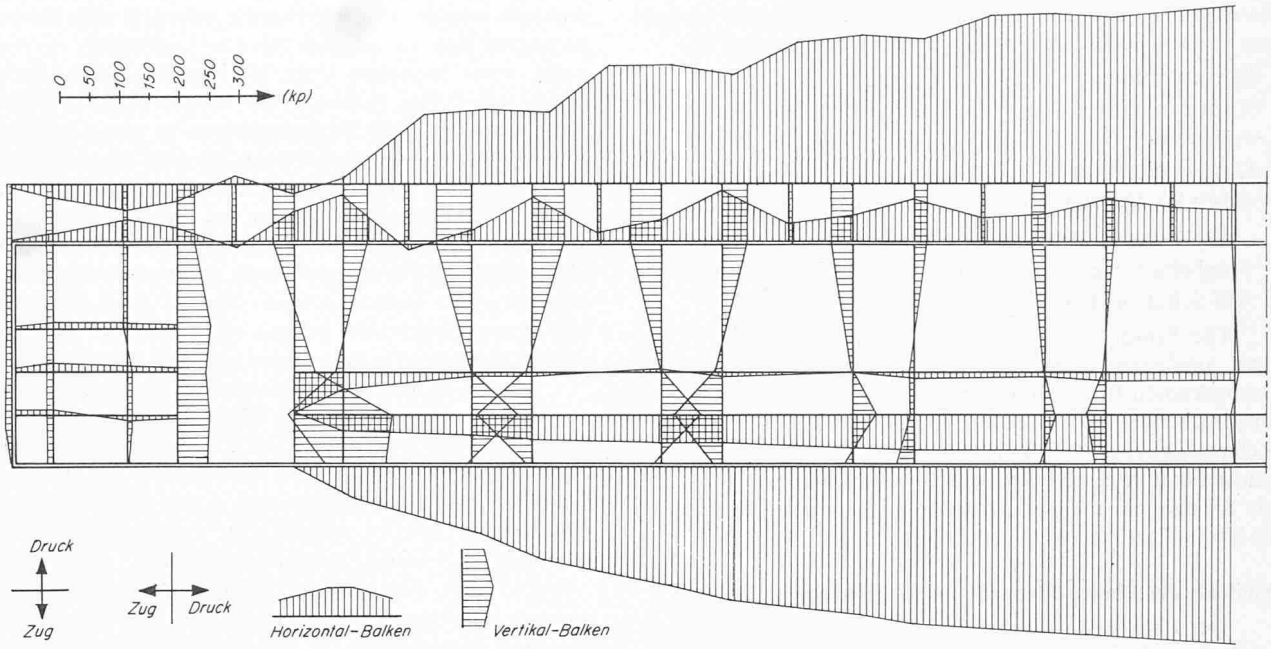


Bild 15 A. Darstellung der Ergebnisse (vertikaler Lastfall): Verlauf der Kräfte in den Zug-Druckelementen über den Wagenkasten

0,45	1,59	2,06	−5,02	−4,62	6,42	−7,94	−7,65	10,12	−6,18	−6,29	8,58	−4,18	−4,81	6,05	−2,64	−2,85	3,04	−0,83	−1,03
−0,35		−0,45			−9,46			−10,9			−0,98			−6,14			−3,11		
−0,05	0,27	−0,03																	
−0,27	0,47	0,22			1,34	−7,06		5,69	−5,48		5,08	−3,91		3,58	−2,36		1,83	−0,79	
−0,63	0,76	0,17			−0,08	−4,43		−0,48	−3,09		0,06	−2,05		0,12	−1,23		0,06	−0,39	

Bild 15 B. Schubspannungen in den Blechfeldern (vertikaler Lastfall)

Vergleich der Ergebnisse

Durchbiegung (Vertikallast 10 t):

Gemessen:	2,4 mm	(100%)
Gerechnet: Statisch unbestimmtes Rahmentragwerk	2,11 mm	(88%)
Gerechnet: Finite Elemente	2,34 mm	(97,5%)

Eigenfrequenz der Biegeschwingung 1. Ordnung des Wagenkastens:

Gemessen:	14,8 Hz	100%
Gerechnet: Statisch unbestimmtes Rahmentragwerk	16,4 Hz	111%
Gerechnet: Finite Elemente	15,5 Hz	105%

Es muss dabei beachtet werden, dass die Eigenfrequenz stark von der gewählten Massenverteilung abhängig ist. Der Vergleich der Kräfte und Spannungen würde den Rahmen dieser Ausführungen sprengen.

In Tabelle 3 werden der Arbeits- und Auswerteaufwand sowie die Computerrechenzeiten verglichen. Die Rechenzeiten können je nach dem zur Verfügung stehenden Computersystem stark variieren. Ebenfalls haben die Programmorganisation sowie die Art der mathematischen Operationen, welche zur Lösung der Gleichungssysteme verwendet werden darauf entsprechenden Einfluss. Die effektiven Rechenkosten sind je nach dem Abrechnungsverfahren recht verschieden.

Vorbereitungsaufwand

Bei der Methode des statisch unbestimmten Rahmentragwerkes müssen pro Feld des Wagenkastens die Trägheitsmomente, die Querschnitts- und Stegflächen des Ober- und Untergurtes sowie der Pfosten gerechnet werden. Zusätzlich sind die geometrischen Daten zu bestimmen.

Die Eingabedaten umfassen bei einem Wagenkasten mit 14 Feldern, die Werte der Belastung nicht berücksichtigt, total 350 Werte, wovon 43 Trägheitsmomente, 43 Querschnittsflächen und 43 Stegflächen. Der Rest sind geometrische Daten, die leicht den Konstruktionszeichnungen entnommen werden können. Ein geübter Ingenieur benötigt für die Bestimmung dieser Werte drei Tage. Ein Ingenieur, für den die Berechnungen neu sind, sechs Tage (bei einem normalen Wagenkasten ohne besondere Komplikationen).

Die Methode der Finiten Elemente verlangt entsprechend der verfeinerten Idealisierung einen grösseren Vorbereitungsaufwand. Für jeden Knotenpunkt müssen bei zwei-

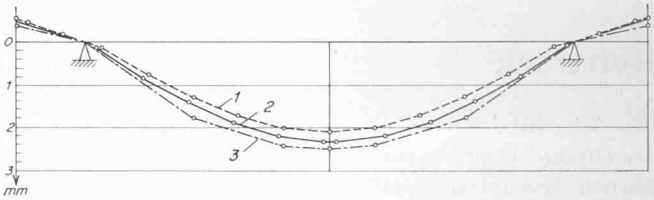


Bild 16. Vergleich der gerechneten und gemessenen Durchbiegungen

1 Gerechnete Durchbiegung mit der Methode des verbesserten statisch unbestimmten Rahmentragwerkes

2 Gerechnete Durchbiegung mit der Methode der Finiten Elemente

3 Gemessene Durchbiegung

dimensionaler Rechnung die x- und y-Koordination eingegeben werden. Jedes Element muss beschrieben werden mit:

- Elementnummer
- Knotennummern der Knoten, mit denen das Element verbunden ist
- Querschnittsfläche
- E-Modul, Querkontraktionszahl, Referenzebene.

Beim Biegeelement zusätzlich:

- Trägheitsmoment um die entsprechende Neutralachse
- Auf Schub wirksame Fläche.

Die Eingabedaten bei einem Wagenkasten mit 14 Feldern umfassen damit total 368 Knotenkoordinaten, 858 Bezugsknoten für die Elemente, 429 Querschnittsflächen, die entsprechenden E-Module, Querkontraktionszahlen und Referenzebenen, 79 Trägheitsmomente und 79 Schubflächen. Ein geübter Ingenieur braucht für die Datenbereitstellung 6 bis 8 Tage, ein mit der Methode nicht vertrauter Ingenieur 12 bis 16 Tage.

Methode der Finiten Elemente im Flugzeugbau

Der Blick in die geschichtliche Entwicklung der Methode zeigt, dass das Verfahren vor allem durch die Forderungen der möglichst exakten und umfassenden Festigkeitsnachweise der Luftfahrt angeregt und weiterentwickelt worden ist. Die heute bestehenden Programme (vermutlich über 500) können sehr hohe Anforderungen erfüllen. Das in diesen Ausführungen dargelegte Programm eignet sich auch für die Analyse von Flugzeugkonstruktionen (Flügel geringer Pfeilung, Leitwerke, Rumpfteile), die in der erwähnten Blechbauweise ausgelegt sind. Diese Konstruktionsart ist bei Klein-, Schul- und Verkehrsflugzeugen (Teilstrukturen) anzutreffen. Flügel und Leitwerk von Hochgeschwindigkeitsflugzeugen weisen niedrige Profile, kurze Spannweiten, stark gepfeilte oder Deltaflügel auf. Sie werden in einer Bauweise mit dicken Blechen und kleinen Stringerabständen, oder durch Fräsen der Teile aus dem Vollen, in Annäherung an die erwähnte Integralbauweise ausgeführt, um eine möglichst hohe Profilgenauigkeit unter der Belastung der Luftkräfte zu gewährleisten.

Holme und Rippen treten in grosser Zahl und in meist schiefwinkliger Anordnung auf. Diese Art der Konstruktion lässt sich mit dem vorliegenden Programm nicht ohne weiteres lösen, denn es werden zusätzliche, anspruchsvolle Elemente benötigt. Strukturen von Hochgeschwindigkeits- und Grossflugzeugen sind aber mit den im Ausland bestehenden Programmen, welche Probleme von praktisch unbeschränkter Grösse lösen können, mit Erfolg bearbeitet worden [9].

Abschliessende Bemerkungen

Die dargelegte Methode hat den Vorteil, dass sich das Berechnungsmodell ausgezeichnet an die Konstruktion anpassen lässt. Die Beanspruchung kann bei weitgehender Auflösung der Struktur an den effektiven Konstruktionsteilen ermittelt werden. Die Berechnung erfordert eine Datenverarbeitungsanlage mit grossen Speicherkapazitäten raschen Zugriffs, sonst entstehen lange Rechenzeiten und hohe Rechnungskosten. Der Aufwand zur Bereitstellung der geometrischen Daten und der Steifigkeitswerte ist gross, entsprechend auch die Zeit für die Auswertung. Es wird dann sinnvoll sein, diese Methode anzuwenden, wenn man gewillt ist, eine optimale Leichtbaukonstruktion zu erzielen. Das setzt voraus, dass die rechnerisch ermittelten Konstruktionsparameter nicht durch die Fertigungstechnik und andere Einflüsse völlig umstrukturiert werden müssen. Besteht diese Gefahr, so ist eine derart eingehende Analyse nicht sinnvoll; eine einfache Abschätzung der Festigkeit wird eher am Platze sein.

Genügt es bei einer Konstruktion, den Spannungsverlauf im Mittel richtig zu erfassen, so ist die Berechnung mit den herkömmlichen Verfahren richtig. An Konstruktionen, bei denen der Spannungszustand stark gestört ist, also bei grossen Querschnittsänderungen, zahlreichen Ausschnitten, Krafteinleitungen, wird es ratsam sein, diskontinuierlich mit der Methode der Finiten Elemente zu rechnen.

Die beste automatische Berechnungsmethode kann den Festigkeitsfachmann nicht ersetzen und verdrängen. Die Analyse und Idealisierung der Struktur verlangt den Ingenieur, der über die entsprechenden Kenntnisse der Festigkeitslehre verfügt, und der die entsprechende Erfahrung besitzt. Die Weiterentwicklung der Methode wird vor allem auch die Rationalisierung der Eingabedaten und den selektiven Output unter vermehrter Verwendung von Plotter-Geräten, Display-Konsolen und visuellen Darstellungsgeräten fordern.

Literaturverzeichnis

[1] *J. H. Argyris:* Die Matrizentheorie der Statik. «Ing. Archiv» *25* (1957), S. 174—192.

– Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft. London 1963, Butterworth.

[2] *J. Robinson:* Structural Matrix Analysis for the Engineer. New York/London 1966, John Wiley.

[3] *J. S. Przemieniecki:* Theory of Matrix Structural Analysis. London/New York 1968, Mc Graw Hill.

[4] *E. C. Pestel, F. A. Leckie:* Matrix Methods in Elastomechanics. New York 1963, Mc Graw Hill.

[5] *E. Schapitz:* Festigkeitslehre für den Leichtbau. Düsseldorf 1963, VDI-Verlag.

[6] *E. F. Bruhn:* Analysis and Design of Flight Vehicle Structures. Cincinnati, Ohio 1965, Iri-State Offset Company.

[7] *K. H. Schrader:* Die Deformationsmethode. Hochschultaschenbücher Bd. 830.

[8] *E. Erni:* Grundlagen der Methode der Finiten Elemente. «Schweiz. Bauzeitung» 1971, H. 48, S. 1193—1200.

[9] *J. H. Argyris, O. Brønlund* und *E. Schrem:* Anwendung der Methode der Finiten Elemente mit dem Programmsystem ASKA unter besonderer Berücksichtigung der dynamischen Probleme. Erscheint demnächst in der «Schweiz. Bauzeitung».

Adresse des Verfassers: *E. Erni,* dipl. Ing. ETH, Institut für Flugzeugstatik und Leichtbau der ETH, 8006 Zürich, Weinbergstrasse 38.

Hvitträsk

DK 72

Seit Mitte letzten Jahres ist Hvitträsk (Bild 1, S. 9) der Öffentlichkeit zugänglich. Es ist dies das Heim der finnischen Architekten Gesellius, Lindgren und Saarinen, etwa 20 km westlich von Helsinki.

Im Jahre 1902 bauten die drei jungen, erfolgreichen Architekten *Herman Gesellius, Armas Lindgren* und *Eliel Saarinen* ihr eigenes Wohnhaus mit Studio, Hvitträsk, in der waldigen Umgebung von Helsinki. Die Gebäude aus Natursteinen und Holz spielen mit der Landschaft, den Wäldern, Felsen und dem nahen kritallklaren See gut zusammen.

Die Suche nach neuen Ausdrucksformen, Impulse von Europa — art nouveau und Jugendstil — sowie das neu erwachte finnische Nationalgefühl brachten eine Architektur hervor, die Weltgeltung erlangt hat, und Hvitträsk darf als eines der schönsten Zeugnisse dieser Kunst bezeichnet werden.