Etudes de la stabilité de la régulation de débit dans les canaux d'irrigation

Etudes de la stabilité de la régulation de débit dans les canaux d'irrigation

Introduction

Le problème de la régulation des débits dans les réseaux d'irrigation a fait l'objet, ces dernières années, de nombreuses études. La particularité de l'évolution des intumescences dans

PAR ALEXANDRE PREISSMANN ET
JEAN A. CUNGE
38130 ECHIROLLES, FRANCE

les canaux, c'est qu'elle est régie par des équations aux dérivées partielles, alors que la plupart des études sur la stabilité s'appliquaient à des équations différentielles ordinaires. Dans ce dernier cas, l'étude de la stabilité conduit à examiner les racines d'un polynôme. Si ces racines (en général complexes) ont toutes leur partie réelle négative, la régulation est stable. Le fait que l'on ait à faire à des équations différentielles aux dérivées partielles peut conduire à considérer également les racines (zéros) d'une fonction qui n'est pas un polynôme, mais une fonction transcendante possédant une infinité de zéros. En fait, les études effectuées se rapportent essentiellement à la stabilité de la régulation, lorsque la situation d'équilibre est caractérisée par le fait que l'écoulement dans tous les biefs est uniforme [2]. Dans ce cas, la recherche des racines de la fonction transcendante est assez simple. Mais le problème se complique beaucoup lorsque la situation d'équilibre correspondant à l'écoulement dans les biefs est stationnaire, mais non uniforme.

On a recommandé dans ce cas de construire des modèles mathématiques d'écoulement, pour lesquels les équations différentielles sont remplacées par des équations aux différences. Or, ces modèles, s'ils sont capables de reproduire correctement l'évolution d'ensemble, peuvent ne pas être adaptés aux études de stabilité; en effet, pour éviter l'instabilité du calcul, on introduit explicitement ou implicitement une diffusion numérique que pourrait masquer une instabilité du système. En outre, l'étude de stabilité effectuée sur le système aux différences aboutit à la recherche des racines d'un polynôme qui sont en nombre fini. Par ailleurs, la simulation sur le modèle mathématique peut conduire à des temps de calcul sur ordinateur assez longs. Mais, évidemment, l'utilisation de modèles mathématiques présente l'avantage de donner les variations des niveaux et des débits consécutifs à une variation des demandes d'irrigation [1, 2]; la stabilité n'est pas le seul critère pour juger un système de régulation!

Pour essayer d'éclairer la différence entre le traitement des équations différentielles aux dérivées partielles et le traitement des équations aux différences correspondantes, nous avons choisi d'introduire une discrétisation, uniquement sur l'espace. On est alors conduit à un calcul rapide qui permet une première comparaison entre le calcul exact et le calcul approché.

Cas particulier de l'écoulement stationnaire uniforme

Nous nous limitons au cas d'un canal rectangulaire avec une perte de charge à la Darcy (coefficient K).

L'écoulement dans le canal est régi par les équations de Saint-Venant:

$$(1)\qquad \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + g\,\frac{\partial z}{\partial x} + K\frac{U^2}{h} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + U\,\frac{\partial h}{\partial x} + h\,\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

avec: U = vitesse d'écoulement; z = niveau; h = profondeur

Nous écrivons: $U = U_0 + U'$; $z = z_0 + z'$; $h = h_0 + h'$

où U_0, z_0, h_0 sont les valeurs relatives à l'écoulement stationnaire uniforme, U_0, h_0 étant constantes.

Pour les petites perturbations, nous linéarisons les équations:

$$(2)\qquad \frac{\partial U'}{\partial t} + U_0\frac{\partial U'}{\partial x} + g\,\frac{\partial z'}{\partial x} + 2K\,\frac{U_0 U'}{h_0} - K\,\frac{U_0^2}{h_0^2}\,z' = 0$$

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial z'}{\partial x} + h_0\,\frac{\partial U'}{\partial x} = 0$$

Tableau 1. Parties réelles des cinq racines rangées en ordre croissant des valeurs absolues des parties imaginaires

	Régime uniforme				*Régime non-uniforme*							
	q = 1,60 m²/s				q = 0,60 m²/s				q = 0,10 m²/s			
K_1 / Racine n°	0	0,5	0,75	0,90	0	0,5	0,75	0,90	0	0,5	0,75	0,90
1	−0,0004	+0,0005	+0,00138	−0,00759	−0,00058	−0,00048	+0,00070	+0,00151	−0,00009	−0,00015	+0,0013	+0,0022
2	−0,0025	−0,0009	−0,00006	+0,00229	−0,00061	−0,00178	−0,00396	+0,00053	−0,00010	−0,00027	−0,0020	−0,0032
3	−0,0019	−0,0040	−0,00313	+0,00087	−0,00091	−0,00075	−0,00015	−0,00167	−0,00015	−0,00003	+0,0012	+0,0021
4	−0,0027	−0,0065	−0,00876	−0,00220	−0,00135	−0,00312	−0,00230	−0,00631	−0,00022	−0,00068	−0,0023	−0,0036
5	−0,0041	−0,0109	−0,01481	−0,00884	−0,00193	−0,00251	−0,00693	−0,00669	−0,00031	−0,00032	+0,0010	+0,0018

Les coefficients de ces équations sont des constantes. On cherche alors les solutions du type:

(3) $z' = A\, e^{\alpha t} e^{\beta x} \qquad u' = B\, e^{\alpha t} e^{\beta x}$

α et β, A et B étant des constantes en général complexes.

En introduisant les valeurs (3) dans les équations (2), on constate que les quantités A et B satisfont à deux équations linéaires homogènes (avec des coefficients dépendant de α et β).

Pour que A et B ne soient pas tous les deux nuls, il faut qu'un déterminant soit nul. Cette condition donne une relation entre α et β ($\beta = f(\alpha)$), à chaque valeur de α correspondant aux valeurs de β, β_1 et β_2.

A chaque valeur de α, on aura donc des solutions:

$$(4) \quad \begin{aligned} z' &= (A_1\, e^{\beta_1 x} + A_2\, e^{\beta_2 x})\, e^{\alpha t} \\ U' &= (B_1\, e^{\beta_1 x} + B_2\, e^{\beta_2 x})\, e^{\alpha t} \end{aligned}$$

avec:

$$B_1 = -\frac{\alpha + \beta_1 U_0}{\beta_1 h_0} A_1 \qquad B_2 = -\frac{\alpha + \beta_2 U_0}{\beta_2 h_0} A_2$$

(relations déduites de la deuxième équation (2))

En introduisant des conditions aux limites, on peut déterminer les valeurs de α. Ici, à titre d'exemple, nous supposerons que le débit est constant à l'aval du bief et que la régulation amont est une régulation BIVAL [1], caractérisée par le fait que la moyenne pondérée du niveau amont ($x = 0$) et du niveau aval ($x = L$) est constante. Les coefficients de pondération aval/amont sont respectivement K_1; K_2.

(5) $U'(L) \cdot h_0 + z'(L)\, U_0 = 0$; débit constant aval

$K_1 z'(L) + K_2 z'(0) = 0$, pondération aval/amont,
$K_2 = 1 - K_1$

En introduisant les valeurs (4) dans les conditions aux limites (5), on obtient deux équations linéaires homogènes, pour les coefficients A_1 et A_2. Pour que ces coefficients ne soient pas nuls tous les deux, il faut que le déterminant soit nul. Ce déterminant est une fonction transcendante de α. Pour que la régulation soit stable, il est nécessaire que toutes les racines de cette équation aient une partie réelle négative.

Cas général de l'écoulement stationnaire non uniforme

Les écoulements sont régis par les équations (1), mais par le fait que U_0 et h_0 ne sont plus des constantes mais des fonctions de x, l'équation des perturbations devient:

$$(2') \quad \frac{\partial U'}{\partial t} + U'\frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0\frac{\partial U'}{\partial x} + g\,\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{2K\,U_0 U'}{h_0} - K\frac{U_0^2}{h_0^2} z' = 0 \qquad \frac{\partial z'}{\partial t} + U'\frac{\partial z_0}{\partial x} + U_0\frac{\partial z'}{\partial x} + z'\frac{\partial U_0}{\partial x} + h_0\frac{\partial U'}{\partial x} = 0$$

Les coefficients ne sont pas constants, il n'est pas possible d'appliquer la méthode du chapitre précédent. Nous cherchons également des solutions de la forme:

$z' = f(x)\, e^{\alpha t} \quad U' = g(x)\, e^{\alpha t}$

et nous remplaçons les dérivées en x par des différences divisées, le canal étant divisé en n tronçons de longueur Δx. La discrétisation d'une quantité Q (c'est-à-dire U', U_0, z', h_0) se fait selon les formules:

$$(6) \quad Q \approx 0{,}5\,(Q_j + Q_{j+1});\ \frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{j+1} - Q_j}{x}$$

où j, j_{+1} sont des points de calcul.

Les quantités U'_j, U'_{j+1}, z'_j, z'_{j+1} sont donc reliées, à la suite de la discrétisation par deux relations linéaires homogènes:

$$(7) \quad \begin{aligned} A_1\, U'_j + B_1\, U'_{j+1} + C_1\, z'_j + D_1\, z'_{j+1} &= 0 \\ A_2\, U'_j + B_2\, U'_{j+1} + C_2\, z'_j + D_2\, z'_{j+1} &= 0 \end{aligned}$$

Les coefficients étant, soit des constantes, soit des formes linéaires en α. Ils sont variables d'un intervalle Δx à l'autre, car ils dépendent de $U_0(x)$ et $h_0(x)$.

A partir des équations (7) et par élimination, on trouve:

$$\begin{pmatrix} U'_j \\ z'_j \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} U'_{j+1} \\ z'_{j+1} \end{pmatrix},\ M_j\text{: matrice de rang 2, variable avec } j$$

En partant de l'aval ($j + 1 = n + 1$), on trouve:

$$\begin{pmatrix} U'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} = M_1 \cdot M_2 \cdot, \cdot, \cdot\, M_n \begin{pmatrix} U'_{n+1} \\ z'_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} U'_{n+1} \\ z'_{n+1} \end{pmatrix}$$

Les éléments de la matrice M sont des fonctions rationnelles de α, rapport de deux polynômes de degré $2n$. Si l'on introduit les deux conditions aux limites exprimées par l'équation (5), on trouve que les valeurs de α possibles sont les racines d'un polynôme de degré $2n$. On obtient ainsi un nombre fini de valeurs propres (au lieu de l'infinité des racines de la fonction transcendante du traitement analytique dans le cas d'un mouvement stationnaire uniforme). Les valeurs propres de faible module sont très proches des valeurs obtenues par la méthode analytique.

Exemple d'application

Des calculs ont été effectués pour le cas d'un canal rectangulaire large, ayant les caractéristiques suivantes: longueur 3400 m, pente 0,0003, résistance $K = 0{,}004709$. Le cas de l'écoulement uniforme correspondant au débit unitaire, $q = 1{,}60\ m^2/s$, $h_0 = 1{,}60$ m = const., $U_0 = 1{,}0$ m/s était traité d'abord, en discrétisant le canal par 20 intervalles $\Delta x = 170$ m. Des niveaux de consigne ont été choisis en faisant varier le coefficient de pondération: $K_1 = 0$ (niveau amont $x = 0$); $K_1 = 0{,}5$ (niveau à $x = 1700$ m); $K_1 = 75$ ($z(x = 2558$ m)); $K_1 = 0{,}90$ (z ($x = 3369$ m)). Chaque niveau correspond à la profondeur $h_0 = 1{,}60$ m (écoulement uniforme). Ensuite, on a traité deux régimes stationnaires non-uniformes $q = 0{,}60\ m^2/s$ et $q = 0{,}10\ m^2/s$. Le niveau aval de l'écoulement stationnaire a été imposé chaque fois, de telle sorte que, pour K_1 choisi, le niveau de la surface libre soit égal en point de consigne à celui de l'écoulement uniforme. Les racines des polynômes (correspondantes aux 5 parties imaginaire les plus petites en absolu) sont regroupées pour tous les cas dans le tableau 1. On constate bien que le déplacement de la pondération $K_1 \rightarrow 1$, $K_2 \rightarrow 0$ (c'est-à-dire du niveau de la consigne vers l'aval) correspond à l'apparition des parties réelles positives, c'est-à-dire à l'instabilité. C'est un résultat expérimental bien connu.

Adresse des auteurs: *Alexandre Preissmann*, anciennement expert à SOGREAH, et *Jean A. Cunge*, CEFRHYG, 6, rue de Lorraine, F-38130 Echirolles, France.

Références

[1] *Chevereau G.* et *Gauthier M.*: Use of mathematical model as an approach to flow control problems, Int. Symp. on Unsteady Flow in Open Channels, BHRA, Avril 1976

[2] *Preissmann A.* et *Chevereau G.*: Remarques sur le choix des méthodes d'appréciation de la qualité des divers systèmes de régulation de canaux à surface libre, Symp. Int. Fluid Motion Stability, AIRH, Bucarest, Septembre 1976