

# "Unendlich mal null" ... gross oder klein?: ein mathematisches Problem mit praktischen Konsequenzen

Autor(en): **Schlatter, Hans Peter**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Ingenieur und Architekt**

Band (Jahr): **109 (1991)**

Heft 38

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-86012>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Sicherheit und Risiko

# «Unendlich mal null» ... gross oder klein?

Ein mathematisches Problem mit praktischen Konsequenzen

**Es ist allgemein bekannt: In der Mathematik gibt es Operationen, die nicht eindeutig lösbar sind und daher etwa auch als «verbotene Operationen» bezeichnet werden. Eine dieser Operationen ist das Produkt aus unendlich und null: Das Ergebnis kann irgendein Wert zwischen null und unendlich sein, die Grenzen eingeschlossen. Beide Extrema zu studieren hat die Wissenschaft über Jahrhunderte beschäftigt [1]. Je nach Fragestellung müssen wir bestrebt sein, dieses Produkt möglichst kontrolliert entweder nach null oder nach unendlich laufen zu lassen.**

Ingenieure und Mathematiker gehen das Problem verschieden an: Im Gegensatz zu den Mathematikern sind die Inge-

VON HANS PETER SCHLATTER,  
ZÜRICH

nieure relativ schnell bereit, kleine Zahlen (hier fragt sich gleich: im Vergleich wozu klein?) wie  $10^{-9}$  oder auch schon  $10^{-6}$  als null anzusehen oder aber die Null mit kleinen Zahlenwerten zu approximieren. Umgekehrt bezeichnet der Ingenieur grosse Zahlen bald einmal mit  $\infty$ . Für viele praktische Belange ist das auch sinnvoll. Zwei kurze Beispiele sollen das veranschaulichen.

Um ein Gelenkfachwerk auf dem Computer zu berechnen, kann man bei der Modellbildung anstelle der Eingabe von Gelenken die Biegesteifigkeit der Stäbe gleich Null setzen. Diese Null wird in der Regel vom Rechner nicht akzeptiert. Wenn wir aber eine kleine Zahl eingeben, z.B.  $10^{-5}$  oder auch 0,1, wird das Resultat sofort richtig berechnet. Ähnliche «Tricks» verwenden wir auch in der Vermessung bei der Ausgleichsrechnung.

Beim Photographieren oder beim Gebrauch eines Feldstechers muss im Nahbereich fokussiert werden: Wir drehen am Gewinde, bis das Bild scharf ist. Gegenstände in einem gewissen Abstand gelten aber bald schon als unendlich weit weg. Photoapparat und Feldstecher sind in diesem Bereich ohne weitere Distanzeinstellung benutzbar.

## $\infty \cdot 0$ , mathematisch

Die Mathematik geht bei der Lösung des Problems stufenweise – mit unendlich

kleinen Schritten – an die beiden Extrema heran. Man spricht vom *limes* einer Funktion. Man beobachtet, je nach Funktion, ein ganz unterschiedliches Verhalten, folgende Beispiele aus der Analysis seien hier aufgefrischt.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x \cdot \frac{1}{x}) = \infty$$

Hier strebt  $e^x$  viel schneller gegen  $\infty$  als  $1/x$  gegen 0.

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} [x \cdot \sin(\frac{1}{x})] = 1$$

In diesem Fall strebt  $x$  gleich schnell gegen  $\infty$  wie  $\sin(1/x)$  gegen 0.

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot \frac{1}{e^x}) = 0.$$

Hier strebt  $x^2$  jedoch viel langsamer gegen  $\infty$  als  $1/e^x$  gegen 0.

$\infty \cdot 0$  kann also irgendeinen Zahlenwert annehmen! Das Produkt hängt quasi von der «Qualität» der beiden Extrema ab, von der «Kraft» der einzelnen Funktionen.

## $\infty \cdot 0$ , praktisch

Es sollen hier zwei Themenbereiche zur Sprache kommen, wo diese «verbotene Operation» in unserer Zeit m. E. eine grosse praktische Bedeutung gewonnen hat: Zum einen handelt es sich um Fragen im Bereich Sicherheit und Risiko, zum anderen um solche aus der Umweltverschmutzung bzw. dem Umweltschutz.

## Die Produktformel in der Risikodiskussion

In vielen Bereichen der Technik und auch im Versicherungswesen wird zur Quantifizierung von Risiken die Pro-

duktformel akzeptiert und angewendet. Dabei wird das Risiko  $R$  aus Schaden-summe  $S$  im Falle des Schadenereignisses (in Toten oder Franken, je nach Problemstellung) und dem Erwartungswert der Auftretenswahrscheinlichkeit  $W$  eines Schadenereignisses berechnet (z.B. in Ereignisse/Tag oder Ereignisse/Jahr; die Zeiteinheit muss dabei so gewählt werden, dass  $W$  deutlich kleiner als 1 wird; auf eine Begründung wird hier verzichtet). An einem Zahlenbeispiel – die Zahlenwerte sind frei geschätzt – soll das erläutert werden.

Das kollektive Risiko  $R_k$ , bei einem Absturz mit einem Passagierflugzeug auf einem Linienflug ums Leben zu kommen, beträgt für die gesamte Erdbevölkerung (mit  $S \approx 150$  Tote pro Absturz und  $W \approx 10$  Abstürze pro 365 Tage):

$$R_k = S \cdot W = 150 \cdot (10/365) = 4,1 \text{ Tote/Tag} = 1500 \text{ Tote/Jahr.}$$

Für den einzelnen Menschen – vorausgesetzt, dass er Flugzeuge benützt – beträgt damit das individuelle Risiko (pro Jahr):

$$R_i = 1500 \cdot 100 / (5 \cdot 10^{+9}) = 3 \cdot 10^{-6}$$

Vereinfachend wurde hier zudem angenommen, dass nur 1% aller Menschen Flugzeuge benützt und dass diese gleich häufig fliegen. Die Weltbevölkerung wurde auf 5 Milliarden gerundet.

Naturgemäss nimmt  $S$  häufig grosse Werte an, während  $W$  eine kleine bis sehr kleine Zahl ist. Es ist offensichtlich, dass die Gesellschaft das Ziel verfolgt, in dieser Problematik das Produkt aus  $\infty \cdot 0$  möglichst dem Grenzwert Null zustreben zu lassen.

## Die Produktformel in der Kerntechnik

Bis anhin wurde auch in der Kerntechnik oft mit der Produktformel gerechnet und argumentiert, das Risiko, das aus dem Betrieb des Kernkraftwerkes entsteht, sei kleiner als z.B. dasjenige, welches man auf einer Autofahrt von Zürich nach Bern auf sich nimmt. Implizit akzeptiert man offenbar damit, dass grundsätzlich ein Kraftwerkunfall – wenn auch äusserst unwahrscheinlich – vorkommen kann, genauso, wie man einen Autounfall grundsätzlich in Kauf nimmt. Aber gerade in der Kernkraftwerksdiskussion ist m.E. die Anwendung der Produktformel auch aus mathematischen Gründen höchst problematisch, wenn nicht sogar unzulässig: Die Wahrscheinlichkeit  $W$  eines Grossunfalls in einem



KKW ist in Westeuropa tatsächlich äusserst klein, wenn auch nicht bezifferbar. Auch der Maximalschaden  $S$  lässt sich nicht beziffern – wer kann heute die Folgen von Tschernobyl richtig einschätzen?

Wir haben hier von der Struktur her offenbar etwas wie  $R = 0$  – die Produktformel darf jedoch nicht zur Anwendung gelangen, solange wir über beide Extrema keine zuverlässigeren Angaben machen können.

Über dieses Thema wurden im letzten Jahr einerseits im Vorfeld der Initiativen an dieser Stelle ausführlich diskutiert [2], andererseits war die Beschreibung von Risiken ein zentrales Thema einer Tagung im August 1990 in Ascona [3].

### Die Produktformel in der Umweltverschmutzung und im Umweltschutz

Allenthalben spricht man davon, dass die  $\text{CO}_2$ -Emissionen bis zum Jahre 2000 stabilisiert und danach weiter reduziert werden müssen. Es dürfen keine Batterien mehr in den Abfall gelangen, keine Schwermetalle auf und in die Böden . . . , die Liste kann beliebig verlängert werden. All das soll gegen Null streben! Man ist sich einig, dass etwas unternommen werden muss – doch es passiert sehr wenig. Wenn auch der Katalysator Schadstoffe reduziert, eine endlos steigende Zahl der Fahrzeuge

wird diesen Effekt irgendwann überholen. Das Verhalten des Menschen hat der Katalysator jedenfalls kaum geändert; und wenn, dann häufig in die verkehrte Richtung.

Die Verschmutzung, die das einzelne Auto verursacht, ist verschwindend klein, praktisch null. Ebenso der Ausstoss aus dem Kamin der einzelnen Heizung oder der Stromverbrauch des Farbfernsehers oder der Stereoanlage, die während Tagen nur auf Stand-by laufen. Doch die Zahl der Motorfahrzeuge und der Haushaltgeräte – nötigen und v.a. auch unnötigen – steigt gegenwärtig weiter an. Dass es so nicht unbegrenzt weitergehen kann, ist zwar klar, aber im Moment ist kaum eine Grenze abzusehen, kein Limes erkennbar. Die weltweite Verschmutzung aufgrund des Autos kann gut abgeschätzt werden, da der Schadstoffausstoss des einzelnen Motorfahrzeugs recht präzise angegeben werden kann. Dieser strebt – so ist zu befürchten – trotz technischen Verbesserungen weniger stark gegen Null als die Anzahl Motorwagen gegen  $\infty$ , das Problem verhält sich heute irgendwo zwischen Gleichung (1) und (2), das Produkt  $\infty \cdot 0$  ist offensichtlich signifikant nicht null, und es scheint weiterhin zuzunehmen.

Beim Energieverbrauch, beim Sparwilen sowie im Umweltschutz treffen wir wieder auf die problematische  $\infty \cdot 0$ -Form: Wir schätzen z.B. unsern Sparbeitrag, wenn wir konsequent Lichter löschen und alle Geräte abschalten, die wir für eine bestimmte Zeit nicht mehr brauchen, als verschwindend klein ein. Sobald wir jedoch die Hoffnung haben, dass sich Hunderttausende, ja Millionen Mitmenschen ebenfalls am Sparen beteiligen, dann wird es möglich sein, im Kollektiv einen wesentlichen Beitrag zu leisten. Die wenigen grossen Verbraucher, wie z.B. Industriebetriebe, zu zwingen, Energiesparprogramme aufzustellen, verleitet allzusehr dazu, den

Balken im eigenen Auge nicht zu beachten. So betrachtet ist auch die «Bravo»-Aktion (z.B. Eierkochen mit wenig Wasser) von Bundesrat Adolf Ogi, die auf so viel Kritik gestossen ist, ein sehr sinnvoller Beitrag zum Schutze der Umwelt! Auch hier beim Sparen kann, ja muss  $\infty \cdot 0$  einen grossen Wert ergeben!

### Zusammenfassung und Schlussgedanken

Die «unzulässige» mathematische Operation  $\infty \cdot 0$  hat für einige Probleme unserer Zeit eine praktische Bedeutung erlangt. Fast unendlich kleinen Eintretenswahrscheinlichkeiten eines grossen KKW-Unfalls stehen beinahe unendlich grosse Schadenssummen (im Falle eines Eintritts) gegenüber. Da wir über das Verhalten dieser beiden Extrema zu wenig genaue Kenntnisse haben, kann das als Produkt definierte Risiko irgendwelche beliebigen Werte annehmen. Darüber wurde viel geschrieben, sehr lesenswert sind die Beiträge in [2] und [3].

Ebenso kann unser persönlicher, fast unendlich kleiner Beitrag zum Umweltschutz (und damit natürlich auch das Unterlassen von noch so kleinen Umweltsünden!) ein massgebender Anteil zur Besserung der Situation sein, wenn die Anzahl der Beteiligten in genügendem Masse gegen  $\infty$  strebt.

Ich sehe es als Auftrag an uns Ingenieure und Architekten, unsere Mitmenschen mit diesen Überlegungen zu konfrontieren und sie vor allem zum Mitmachen beim Energiesparen zu ermuntern, damit dort innert nützlicher Frist das Produkt aus  $\infty \cdot 0$  signifikant grösser wird als null!

Adresse des Verfassers: H. P. Schlatter, dipl. Kultur-Ing. ETH, Assistent IBK, ETH Hönggerberg, 8093 Zürich.

#### Literatur

- [1] Eli Maor: «Der Unendlichkeit auf der Spur», Birkhäuser-Verlag 1989.
- [2] SIA-Hefte 1990, Nr. 10, S. 260 ff, Nr. 23, S. 661 ff, Nr. 29, S. 803, und Nr. 33-34, S. 920 ff.
- [3] «Risiko und Sicherheit technischer Systeme – Auf der Suche nach neuen Ansätzen», Tagungsband, Birkhäuser-Verlag 1991