Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 111 (1993)
Heft: 27/28

Artikel: Splines für CAD-NURBS
Autor: Muggli, Andreas
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-78206

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Splines für CAD-NURBS

Ein ideal biegsames Lineal (Straklatte, Spline), zwangsweise durch vorgegebene Punkte geführt, erzeugt eine glatte Kurve. Die mathematische Untersuchung und Weiterentwicklung solcher Kurven führte zu Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) für CAD-Systeme. Praktische Anwendungsmöglichkeiten werden hergeleitet und dargestellt.

VON ANDREAS MUGGLI, ZÜRICH

Zum Erzeugen einer «glatten» Kurve, die durch vorgegebene Punkte geht, verwendet man seit alters her ein ideal biegsames Lineal (Straklatte, Spline), welches zwangsweise durch die vorgegebenen Punkte gelegt wird. Die Straklatte wird in den Punkten so befestigt, dass auf sie nur Kräfte senkrecht dazu übertragen werden können. Die Straklatte nimmt eine Lage ein, in welcher die Gesamtenergie (Biege-Energie) minimal ist. Die sich ergebende Biegelinie lässt sich durch eine Differentialgleichung beschreiben. Linearisiert man diese Gleichung, so ergibt sich eine Kurve, die man als «natürlichen Spline» bezeichnet.

Die Entwicklung der Computer hat dazu geführt, dass die sich aus der Straklatte in natürlicher Weise ergebenden Kurven mathematisch untersucht und weiterentwickelt wurden. Mittlerweile steht eine Fülle von Literatur [1] zur Verfügung und die Anwendungsmöglichkeiten für Splines sind mit Sicherheit noch nicht ausgeschöpft. Der Einsatz von Splines höherer Ordnung als Basisfunktionen für Berechnungen nach der Finite-Element-Methode ist nur ein Beispiel.

Für das interaktive Arbeiten mit CAD-Systemen hat sich eine besondere Klasse von Splines entwickelt. Diese Entwicklung hat mit den ß-Splines einen vorläufigen theoretischen Abschluss gefunden, der in der Praxis (Implementation auf CAD-Systemen) erst noch nachvollzogen werden muss. Auf CAD-Systemen angewandt werden derzeit B-Splines oder **NURBS** (**N**on-**U**niform **R**ational **B**-**S**plines). Dabei beschränkt man sich beim interaktiven Arbeiten meist auf Non-Uniform B-Splines, während rationale Splines nur zur Darstellung von Kegelschnitten eingesetzt werden.

Die praktischen Möglichkeiten, welche B-Splines und NURBS bieten, werden im vorliegenden Aufsatz dargestellt.

B-Splines

B-Splines sind eine Klasse von Splines, die sich auf CAD-Systemen seit Jahren bewährt haben. Für jeden B-Spline gibt es ein diesen begleitendes Polygon, welches die Pole P_j des B-Splines miteinander verbindet. Die Ordnung des höchsten Polynomabschnittes heisst die Ordnung des B-Splines. Vielfach spricht man auch vom Grad des B-Splines (Bild 1).

Besteht ein B-Spline aus mehreren Polynomabschnitten, dann bezeichnet man die Punkte auf der Kurve, bei denen ein Polynomabschnitt endet oder ein neuer beginnt, als einen Knoten des B-Splines. Die Knoten sind mit ▫ markiert.

Die Funktionsvorschrift der B-Spline-Kurven lautet:

$$K(u) = \sum_{i=0}^{i=r} P_i \, N_{ord,i}(u)$$

$$r = anz-1;\ ord \le anz;\ 0 \le u \le 1$$

$N_{ord,i}(u)$ sind die Basisfunktionen der B-Splines. Die Gleichung der Basisfunktionen entnehme man (bei Interesse) der angegebenen Literatur [1]. Für das Verständnis des Folgenden ist deren Kenntnis nicht erforderlich.

Die Pole sind Punkte im Raum (in der Ebene), deren Lage verändert werden kann, wodurch sich das Bild der Kurve verändert. Bei CAD-Systemen kann die Veränderung der Kurve am Bildschirm verfolgt werden, so dass der Kurve die gewünschte Gestalt gegeben werden kann. Bild 2 zeigt zwei Kurven und die Auswirkung der Modifikation eines Poles auf diese Kurve (Bild 2).

Knoten – Uniform – Non-Uniform

Mit der Funktionsvorschrift für B-Splines wird das Intervall $0 \le u \le 1$ so in den Raum abgebildet, dass die gewünschte Kurve als Bild entsteht.

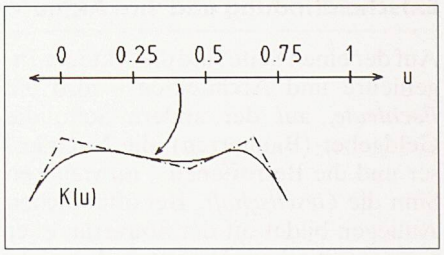

Bild 3

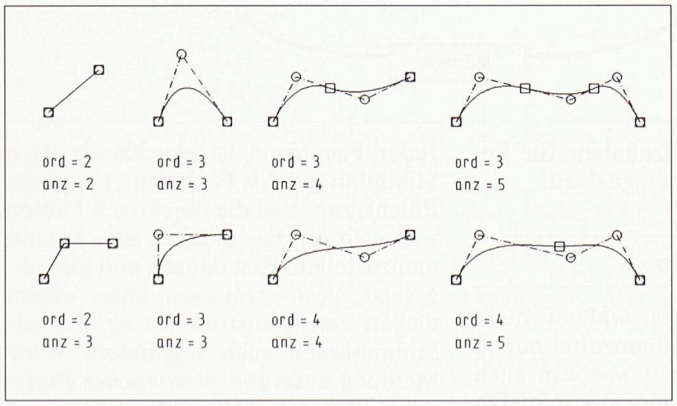

Bild 1. Beispiele einiger B-Splines. Es gilt: Ordnung ist gleich Grad plus eins. Die Ordnung ist mit «ord» und die Anzahl der Pole mit «anz» bezeichnet. Die Pole sind mit ▫ markiert

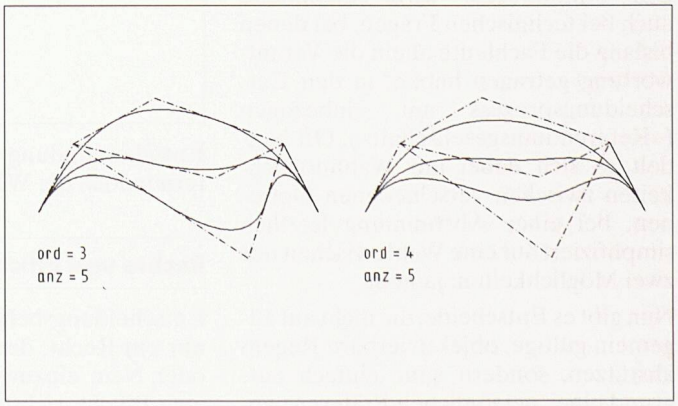

Bild 2. Durch Veränderung der Lage der Pole (Punkte in Raum/Ebene) ändert das Bild der Kurve. Gezeigt sind die Auswirkungen der Modifikation eines Poles auf zwei Kurven

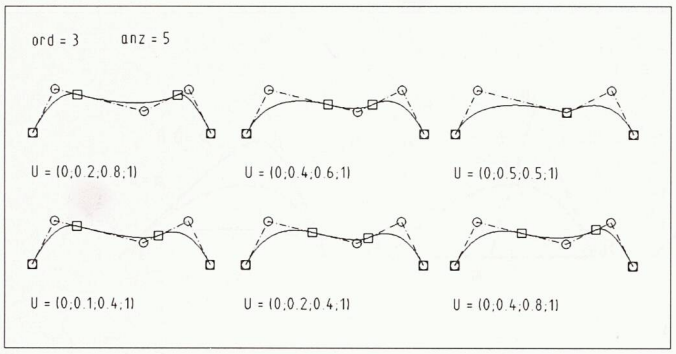

Bild 4. Der Knotenvektor bestimmt die Länge der Polynomabschnitte des B-Splines

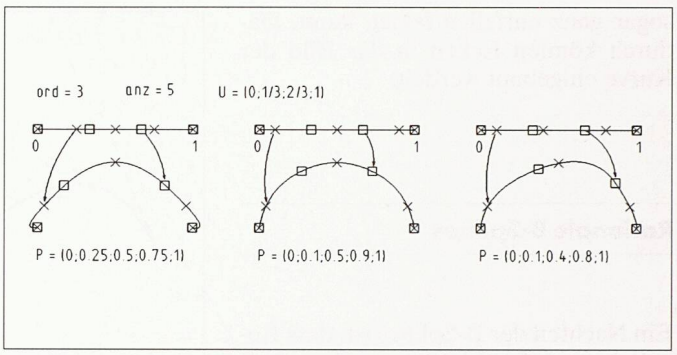

Bild 6. Das Bild der Kurve wird festgelegt, indem man die u-Werte in den Punkten $M_1M_2M_3$ bestimmt

Von besonderem Interesse ist dabei, bei welchen u-Werten die Knoten liegen. Die u-Werte, bei denen Knoten liegen, fasst man zum Knotenvektor U zusammen. Beispiel:

$$U = (0; 0.25; 0.5; 0.75; 1).$$

Die Werte 0 und 1 nimmt man ebenfalls in den Knotenvektor auf. Bei 0 beginnt und bei 1 endet ein Polynomabschnitt. Knoten grösser als 0 und kleiner als 1 bezeichnet man als innere Knoten. Für die Anzahl der inneren Knoten n gilt:

$$n = anz - ord.$$

Wie der Knotenvektor die Länge der Polynomabschnitte des B-Splines bestimmt zeigt Bild 4.

Sind die Knoten gleichverteilt,

$$u_{i+1} - u_i = const,$$

so spricht man von einem Uniform B-Spline, andernfalls von einem Non-Uniform B-Spline.

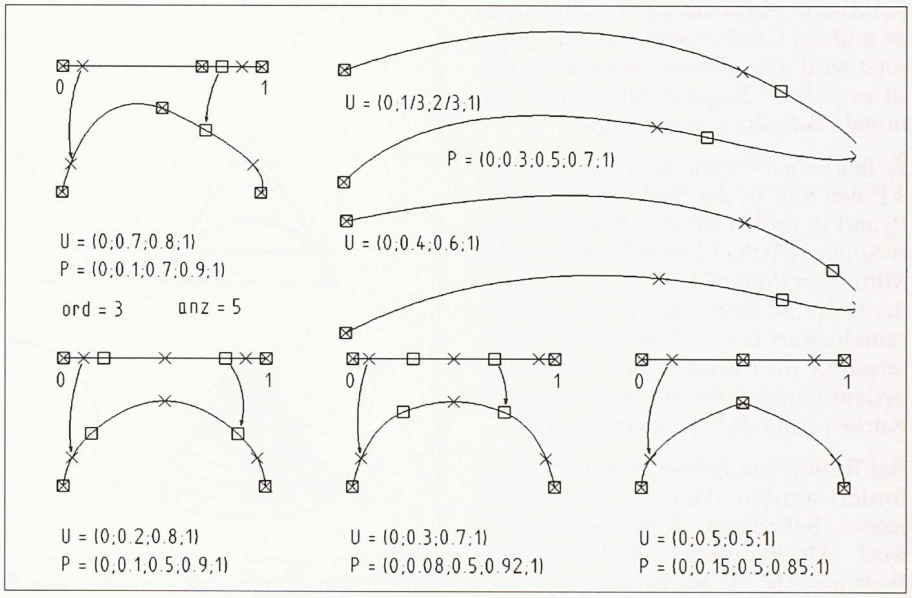

Bild 7. Durch Mehrfachknoten können Polynomabschnitte entfallen und dadurch Ecken in das Bild der Kurve eingebaut werden

B-Spline durch gegebene Punkte

Uniform B-Spline

Liegt eine Anzahl von Punkten vor, so gibt es stets einen B-Spline, dessen Polzahl (anz) gleich der Punktezahl ist, der exakt durch diese Punkte geht. Für die Ordnung (ord) muss gelten:

$$ord \leq anz.$$

Von grosser praktischer Bedeutung ist der Fall, dass viele Punkte vorliegen. Der B-Spline soll aber weniger Pole haben als Punkte vorliegen. Es ist ein Ausgleichsverfahren (z.B. Normalengleichung) zu wählen.

Die Leistungsfähigkeit der B-Splines soll demonstriert werden an fünf vorgegebenen Punkten, durch welche ein B-Spline der Ordnung 3 zu legen ist. Es gilt: ord = 3, anz = 5. Daraus ergibt sich für die Anzahl der inneren Knoten:

$$n = anz - ord = 2.$$

Starten wir zunächst mit einem Uniform B-Spline, dann lautet der Knotenvektor U = (0; 1/3; 2/3; 1). Die fünf vorgegebenen Punkte seien M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 (Bild 5).

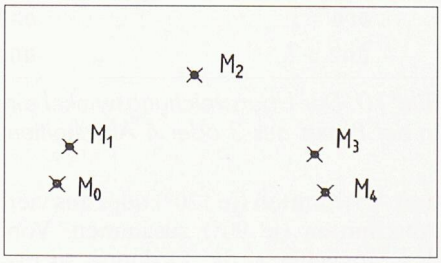

Bild 5

Der B-Spline beginnt im Punkt M_0. Daraus folgt:

$$K(0) = M_0:$$
$$P_0 = M_0$$

Der B-Spline endet im Punkt M_4. Daraus folgt:

$$K(1) = M_4:$$
$$P_4 = M_4$$

Das Bild der Kurve wird festgelegt, wenn man bestimmt, welchen Wert u die Kurve in den Punkten $M_1 M_2 M_3$ hat. Die Werte u_j in den Punkten M_j fassen wir im Parametervektor zusammen. Besonders anschaulich werden die Verhältnisse, wenn man die Knoten und die Parameterwerte in den Punkten auf dem Abschnitt $0 \leq u \leq 1$ markiert (Bild 6).

Non-Uniform B-Spline

Bei Non-Uniform B-Spline wird durch die Vorgabe des Knotenvektors die Länge der einzelnen Polynomabschnitte (gemessen im Parameterwert) festgelegt. Dadurch kann insbesondere das Krümmungsverhalten der Kurve beeinflusst werden. Salopp kann man sagen «Mit Non-Uniform B-Splines kommt man besser um die Kurve».

Bild 7 zeigt, dass man einen Polynomabschnitt durch einen Mehrfachknoten

sogar ganz entfallen lassen kann. Dadurch können Ecken in das Bild der Kurve eingebaut werden.

Rationale B-Splines

Ein Nachteil der B-Splines ist, dass Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Hyperbel) nicht exakt dargestellt werden können. Gibt man der Kurve genügend Pole oder erhöht man die Ordnung, so lässt sich eine Näherung erreichen, die für praktische Anwendungen ausreichend ist und auf CAD-Systemen auch eingesetzt wird. Die weitaus bessere Lösung ist es jedoch, Kegelschnitte durch Rationale B-Splines zu erzeugen.

Es liege ein B-Spline der Ordnung 3 mit 3 Polen vor. In der Mitte zwischen Pol P_0 und P_2 finden wir den Punkt M. Der B-Spline teilt die Linie MP_1 genau in der Mitte. Der Punkt S heisst Schulterpunkt der B-Spline-Kurve und besitzt den Parameterwert $u = {}^1/_2$. Der Name Schulterpunkt wird verständlich, wenn man bedenkt, dass S der höchste Punkt der Kurve (Linie P_0P_2 ist Basislinie) ist.

Bei Rationalen B-Splines kann nun gefordert werden, dass die Linie P_1M in jedem beliebigen Punkt geschnitten wird. Als Parameter wählt man den Wert $\rho = S\,M\,/\,P_1\,M$ (Bild 8).

Die sich ergebende Kurve ist für jeden Wert von ρ ,$0 < \rho < 1$, ein Kegelschnitt. Diesen Kegelschnitt kann man sich an einem Kegel veranschaulichen (Bild 9).

Es gilt:	$0 < \rho < {}^1/_2$	Ellipse
	$\rho = {}^1/_2$	Parabel
	${}^1/_2 < \rho < 1$	Hyperbel

Für $\rho \to 1$ ergibt sich als Grenzfall der Schnitt durch die Kegelspitze also eine Kurve, deren Bild der Linienzug $P_0P_1P_2$ ist. Für $\rho \to 0$ strebt der Pol P_1 gegen unendlich. Für den endlichen Fall ergibt sich die Linie P_0P_2.

Der Kreis als Nurbs

Mit den oben angegebenen Verfahren lässt sich ein Kreisbogen mit einem Überstreichungswinkel kleiner als 180° erzeugen. Strebt der Winkel gegen 180°, so wandert der Pol P_1 gegen unendlich. In der Praxis setzt man einen Kreis aus drei Abschnitten (je 120°) oder aus vier Abschnitten (je 90°) zusammen. Von der Möglichkeit, die Ordnung zu erhöhen und dadurch mit weniger Polynomabschnitten auszukommen, wird in der Praxis kaum Gebrauch gemacht. Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve fallen bei einem Kreis zusammen. An dieser Stelle liegen zwei Pole übereinander. Arbeitet man mit Periodischen NURBS, dann ist auch an dieser Stelle nur ein Pol erforderlich (Bild 10).

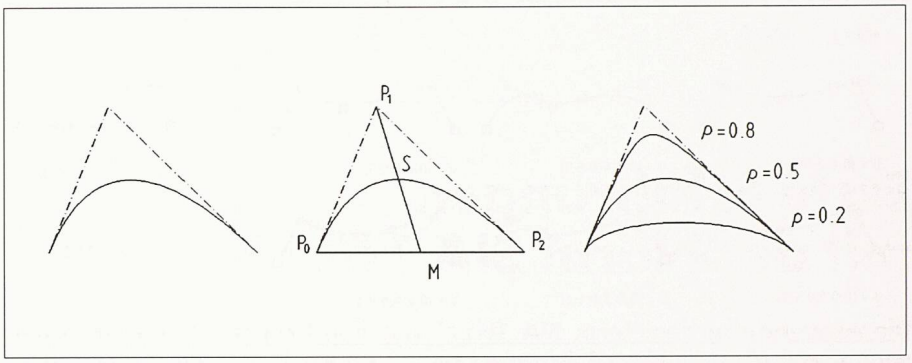

Bild 8. Bei Rationalen B-Splines kann die Linie P_1M geschnitten werden mit Kegelschnitt als Resultat (Parameter $\rho = SM/P_1M$)

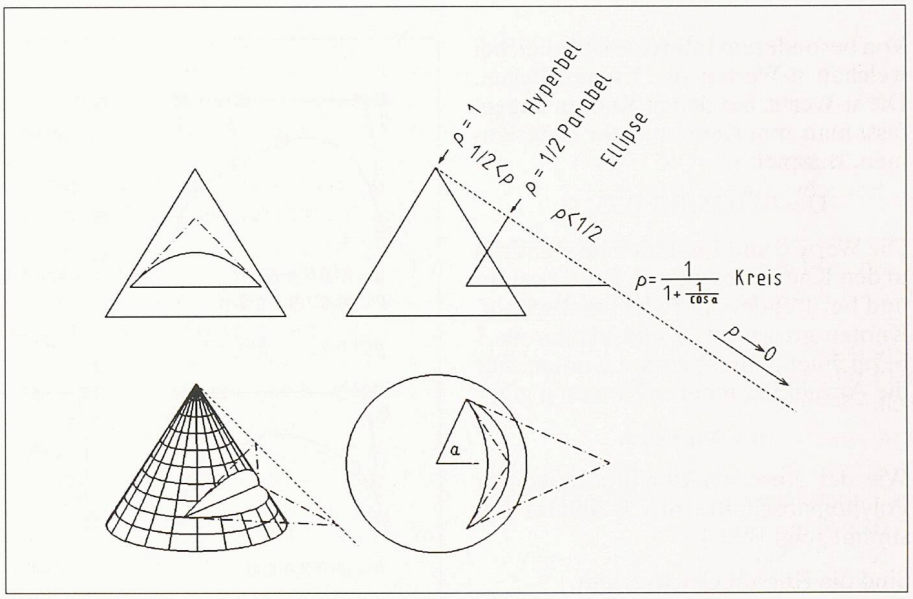

Bild 9. Am Kegel ist der Einfluss des Parameters veranschaulicht: $0 > \rho > {}^1/_2$ Ellipse; $\rho = {}^1/_2$ Parabel; ${}^1/_2 < \rho < 1$ Hyperbel

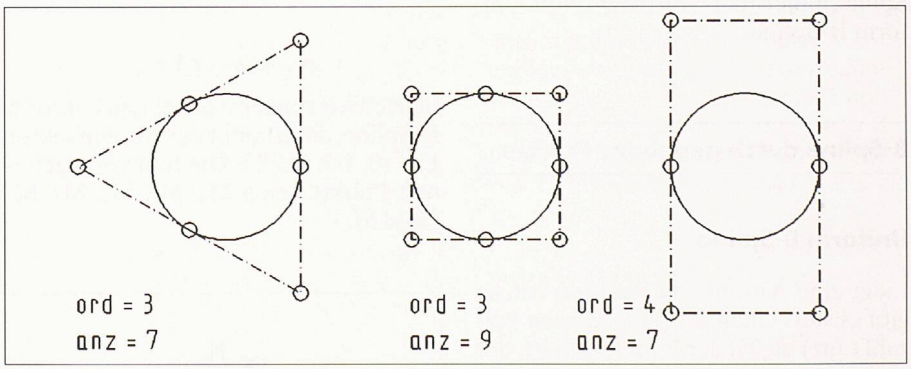

Bild 10. Der Überstreichungswinkel eines Kreisbogens ist < 180°. Kreise werden in der Praxis aus 3 oder 4 Abschnitten zusammengesetzt

Adresse des Verfassers: *Andreas Muggli*, Applikations-Ingenieur, Intergraph (Schweiz) AG, Thurgauerstrasse 40, 8050 Zürich, Tel. 01/302 52 02

Literatur

Es gibt eine Fülle von Literatur, die sich mit dem Thema befasst. In dem Werk:

[1] *Hoschek, Lasser,* Grundlagen geometrischer Datenverarbeitung,

B.G. Teubner, Stuttgart, findet sich ein ausführliches Literaturverzeichnis.