

# Ueber die Skalenoeder und einige davon hergeleitete Körper

Autor(en): **Weber, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **20 (1934)**

Heft 7

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-531854>

## **Nutzungsbedingungen**

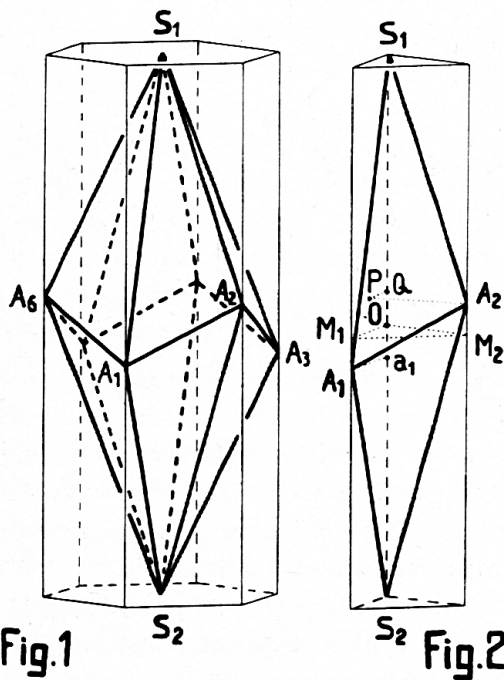
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ueber die Skalenoeder und einige davon hergeleitete Körper

Die fast unerschöpfliche Formenfülle der Kristallwelt ist schon öfters für den Stereometrieunterricht an mittleren und höheren Schulen nutzbar gemacht worden (vgl. z. B. Holzmüller, Elemente der Stereometrie, 4 Bde., Leipzig 1900 u. 1902, sowie viele schweizerische und deutsche Schulprogramme, namentlich aber mehrere Artikel von P. Th. Schwegler in der „Mittelschule“). Besondere Aufmerksamkeit schenkte man hierbei den Gebilden des kubischen Systems; die komplizierteren Gestalten geringerer Symmetrie (z. B. Trapezoeder und Skalenoeder) liess man dagegen ausser Betracht. Und doch ist gerade eines der am Kalkspat auftretenden Skalenoeder — die alten Kristallographen haben es  $R_3$  genannt — vor manchen kubischen Formen durch Schönheit, Grösse und Häufigkeit ausgezeichnet.<sup>1)</sup> Es sei



darum erlaubt, über dasselbe und die Skalenoeder überhaupt hier einiges folgen zu lassen.

<sup>1)</sup> Selbst in kleinsten mineralogischen Schulsammlungen werden überraschend schöne Exemplare solcher Kalkspatkristalle zu finden sein. Aus dem Sänktisgebiet (Kobelwies) kamen früher ungewöhnlich grosse in viele unserer Museen. Hervorragende Stufen liegen mir vor von Joplin (Missouri) und Bleiberg (Kärnten).

1. In Fig. 1 ist das ebengenannte Skalenoeder  $R_3$  des Kalkspates in der üblichen Orientierung dargestellt, aber nicht für sich allein, sondern eingespannt in ein regelmässig - sechsseitiges Prisma. Dieses ist schwächer, jenes kräftiger gezeichnet. Beide sind durchsichtig gedacht. Alle Kanten, die am einen wie am andern Körper auf der Rückseite liegen, sind gestrichelt. Wo Kanten sich kreuzen, ist die überkreuzte unterbrochen. Sofort erkennt man, dass der rechts vorne gelegene Teil mit den Ecken  $S_1, S_2, A_1, A_2$  einen Sechstel des ganzen Körpers ausmacht. Zum bessern Verständnis ist er — nebst einigen weiteren Linien, die für das Folgende wichtig sind — in Fig. 2 gesondert wiedergegeben. Er kann als unregelmässig-dreieitige Pyramide gedeutet werden, die z. B. das Dreieck  $S_1 S_2 A_1$  zur Basis und die Ecke  $A_2$  zur Spitze hat. Bezeichnet  $c = S_1 O = S_2 O$  die halbe Höhe des das Skalenoeder umhüllenden Prismas (vgl. Fig. 2) und  $a$  den Radius des dem Grundriss dieses nämlich Prismas einbeschriebenen Kreises — der Umkreis eignet sich natürlich ebenso gut, passt aber weniger zu den in der Kristallographie üblichen Festsetzungen — so ist die Inhaltszahl des Dreiecks  $S_1 S_2 A_1 =$

$$\frac{1}{2} \cdot 2c \cdot \frac{a}{\cos 30} = \frac{ac}{\cos 30},$$

die Höhe aber (= Abstand der Ecke  $A_2$  von der Ebene  $S_1 S_2 A_1 = A_2 P$  in Fig. 2) wird

$$\frac{a}{\cos 30} \cdot \sin 60 = 2a \sin 30.$$

Das Volumen der Pyramide  $S_1 S_2 A_1 A_2$  ist somit

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{ac}{\cos 30} \cdot 2a \sin 30 = \frac{2}{3} a^2 c \operatorname{tg} 30.$$

Für das Skalenoeder erhält man ein sechsmal grösseres Volumen, nämlich

$$V = 4 a^2 c \operatorname{tg} 30.$$

2. Eine aufmerksame Betrachtung der Fig. 1 lässt erkennen, dass sich jedem regelmässigen Prisma mit gerader Seitenflächenzahl (=  $2n$ ) ein dem eben behandelten analoges Skalenoeder einzeichnen lässt. Die Formel für das Volumen desselben findet man genau in derselben Weise wie beim hexagonalen Skalenoeder. Statt  $60^\circ$

(= 360 : 6) ist  $360 : 2n = \pi : n$ , statt  $30^\circ$  also  $\pi : 2n$  zu nehmen. Bedenkt man noch, dass das neue Skalenoeder nicht bloss in 6, sondern in  $2n$  dreiseitige Teilpyramiden zerlegbar ist, so hat man für den Inhalt des Skalenoeders, das einem  $2n$ -seitigen regelmässigen Prisma mit den oben definierten Dimensionen  $a$  und  $c$  eingeschrieben werden kann, ganz allgemein

$$V_{2n} = \frac{4}{3} a^2 c n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}.$$

Wird hierin  $n = 3$  gesetzt, so resultiert, wie erforderlich, wiederum Formel I.

3. In Formel II durchläuft  $n$  sämtliche positiven ganzen Zahlen, ausgenommen 1 (da es kein zweiseitiges Prisma gibt). Ein dem Werte  $n = 2$  entsprechendes Skalenoeder, wie es etwa an Kupferkieskristallen gefunden wird, ist in Fig. 3 dargestellt. Skalenoeder, die einem  $n > 3$  zugehören, sind als Kristallformen undenkbar, da die Eigenart des Kristallbaues (raumgitterartige Anordnung der Atome) regelmässige Prismen mit einer 6 übersteigenden Seitenzahl mathematisch ausschliesst.<sup>2)</sup>

4. Setzt man in Formel II für  $n$  der Reihe nach die Werte 2, 3, 4 usw., so bekommt man für  $V_{2n}$  immer kleinere und kleinere Werte, nämlich  $\frac{4}{3} a^2 c \cdot 2$ ,  $\frac{4}{3} a^2 c \sqrt{3}$ ,  $\frac{4}{3} a^2 c \cdot 4(\sqrt{2}-1)$  usw. Für  $n = \infty$  wird das Prisma zu einem geraden Kreiszylinder und das Skalenoeder (vergl. unten § 5, e) zu einem eingeschriebenen Doppelkegel mit dem Volumen  $\frac{2}{3} a^2 c \pi$ , in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der höheren Analysis, wonach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} a^2 c n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} = \frac{2}{3} a^2 c \pi.$$

Dass für beliebige Werte von  $n$  die Formel II sich im allgemeinen nicht durch eine Kette von Quadratwurzeln darstellen lässt, wie in einigen der berechneten Werte (das betreffende Vieleck also mit Zirkel und Lineal nicht „exakt“ konstruiert werden kann), ist ein aus der Kreisteilungslehre allbekannter und vielgenannter Satz.

5. Aus den Figuren 1 und 3, besonders aber aus 2 ist ersichtlich, dass die Punkte  $A_1, A_3, \dots$  ebensoviel unter der Mittelebene  $M_1, M_2, \dots$  des Prismas (nur in Fig. 2 eingezeichnet) liegen wie die Punkte  $A_2, A_4, \dots$  darüber. Aehnliches

<sup>2)</sup> Im Mathematikunterricht auf wichtigste Ergebnisse anderer Wissenszweige hinzuweisen, kann nur nützlich sein, vorausgesetzt wenigstens, dass durch den Stoff selber hierzu ein Anlass geboten wird und dass durch diesen Hinweis die zu behandelnde Aufgabe sinnvoller und bildender wird.

gilt für das verallgemeinerte Skalenoeder. Setzen wir die Grösse der Abstände  $M_1 A_1 = M_2 A_2 = \dots = p$ , so lässt sich, wenn nötig, die Lage über der Mittelebene durch das positive Vorzeichen, die Lage unterhalb dieser Ebene durch das Minuszeichen andeuten. Durch Änderung von  $p$  (absolut und auch hinsichtlich des Vorzeichens) ändert sich die Gestalt, nicht aber das Volumen des Skalenoeders, denn  $V_{2n}$  ist ja von  $p$  unabhängig; auch ist bei der Ableitung dieser Formeln über die Grösse von  $p$  weder eine ausdrückliche noch eine stillschweigende Voraussetzung gemacht worden.

a) Ändern alle Punkte  $A_1, \dots, A_{2n}$  das Vorzeichen ihres  $p$ -Wertes, so ist's, als ob der Körper eine Drehung von  $\pi : n$  um die Achse  $S_1 S_2$  erfahren hätte.

b) Für  $p = 0$  geht das Skalenoeder in eine  $2n$ -seitige regelmässige Doppelpyramide über, d. h. zwei Pyramiden, die den Mittelschnitt des

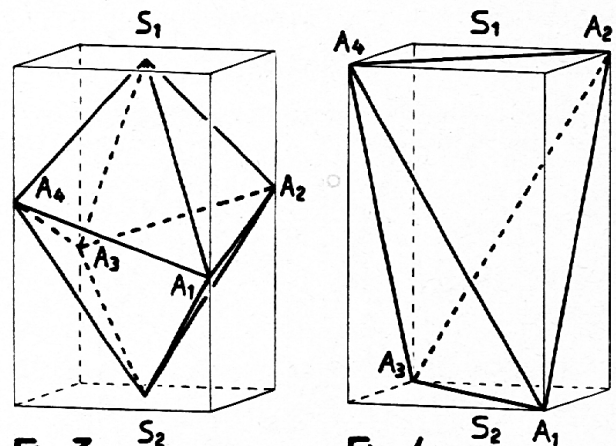


Fig. 3

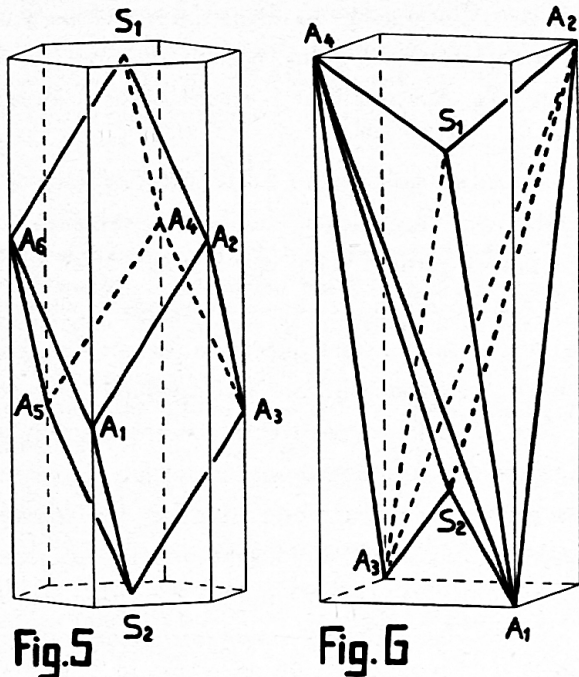
Fig. 4

Prismas als gemeinsame Grundfläche und die Punkte  $S_1$  und  $S_2$  als Spitzen haben. Von dieser Doppelpyramide ist leicht zu zeigen, dass ihr Volumen der Formel II entspricht.

c) Wird  $p = c \operatorname{tg}^2 (\pi : 2n)$ , so fallen je zwei Dreiecke, die eine lange „Pol“kante gemeinsam haben (z. B.  $S_1 A_1 A_2$  und  $S_1 A_1 A_6$  der Fig. 1) in eine Ebene zusammen. Der Körper ist nicht mehr von ungleichseitigen Dreiecken (daher der Name Skalenoeder), sondern allgemein von „Deltoiden“<sup>3)</sup> begrenzt. Nur für  $2n = 6$  sind alle vier

<sup>3)</sup> Im Deltoid haben zwei in einer Ecke (hier z. B.  $S_1$ ) zusammenstossende Seiten gleiche Länge. Die ihnen gegenüberliegenden Seiten (hier in  $A_1$  zusammenstossend) sind von ihnen verschieden, unter sich selber aber gleich.

Seitenlinien der Deltoide einander gleich (Rhomben): das Skalenoeder wird zum Rhomboeder (Fig. 5), ohne dass sich aber das Volumen ver-



ändert. Ist  $2n = 4$ , so bilden die beiden von  $S$  ausgehenden Kanten der Deltoide eine einzige Gerade. Die Deltoide vereinfachen sich zu gleichschenkligen Dreiecken: das Skalenoeder gestaltet sich zum Bisphenoid (oder auch nur Sphenoid, so genannt wegen des keilartigen Zusammenlaufens zweier Flächen an gewissen Kanten, Fig. 4). Dass sich diese Entartungen des Skalenoeders einstellen, sobald  $p = c \operatorname{tg}^2 (\pi : 2n)$ , lässt sich leicht beweisen. Es ist nur erfordert, dass die Projektion  $P$  von  $A_2$  auf die Ebene  $S_1 S_2 A_1$  in der Geraden  $S_1 A_1$  liege. Diese Bedingung ist erfüllt, sobald — unter  $q$  und  $a_1$  die Projektionen von  $P$  und  $A_1$  auf die Achse  $S_1 S_2$  verstanden — die Dreiecke  $S_1 P q$  und  $S_1 A_1 a_1$  (vgl. Fig. 2) einander ähnlich sind. Die Proportion  $S_1 q : qP = S_1 a_1 : a_1 A_1$  führt direkt auf die mitgeteilte Formel.

d) Die unter 5b genannten Doppelpyramiden und die soeben besprochenen Bisphenoide haben eine merkwürdige Eigenschaft: die Inhaltszahl jedes Querschnittes parallel zur Mittelebene des Prismas ist eine Funktion des mit Vorzeichen versehenen Abstandes dieses Schnittes von der Mittelebene. Ganz anders aber beim Skalenoeder, Rhomboeder und bei den Deltoidflächern! Da muss der mittlere Teil mit der auf- und absteigenden Zickzacklinie  $A_1 A_2 \dots$  für sich betrachtet werden. Der Inhalt jenes Querschnittes wird also hier durch zwei verschiedene Funktio-

nen dargestellt. Jede derselben kann aber auch in dem Gebiet untersucht werden, für das die andere Formel aufgestellt ist. Welche geometrische Bedeutung sie dann habe, braucht hier nicht erörtert zu werden. Die Sache selber ist aber für alle jene bedeutungsvoll, die versucht wären, auf die Skalenoeder und die davon abgeleiteten Gestalten die Prismatoidformel anzuwenden.

e) Wird  $[p] > c \operatorname{tg}^2 (\pi : 2n)$ , so artet das bisher immer als konvex angesehene Polyeder<sup>4</sup> zu einem „Sternkörper“ aus. Da diese auf der Schule wohl kaum studiert werden, so mag es ganz interessant sein, gelegentlich auf den einen oder andern wenigstens hinzuweisen. Aus diesem Grund ist denn auch ein dem tetragonalen Skalenoeder der Fig. 3 zugeordnetes Sternpolyeder in Fig. 6 dargestellt. Die vergleichende Betrachtung der Figuren 3 und 6 ist höchst instruktiv. Bei beiden gehen von jedem Punkt vier Kanten aus. In Fig. 6 bilden jedoch die längs  $S_1 A_1, S_1 A_3, S_2 A_2, S_2 A_4$  zusammenstossenden Flächen einspringende Winkel, und bei  $S_1$  sowie  $S_2$  ist das Gebilde sogar sattelförmig, während am Körper der Fig. 3 lauter konvexe Flächenwinkel erscheinen.

Sternförmige Polyeder kennt auch die Kristallographie, die sogenannten Zwillinge und Viellinge.

f) Die bisherigen Figuren sind alle von verhältnismässig hoher Symmetrie. Hält man die Gerade  $S_1 S_2$  zwischen den Fingern fest und dreht hierum das  $2n$ -seitige Skalenoeder wie um eine Achse, so gewährt dieses nach einer Drehung von  $2 \pi : n$  genau das gleiche Bild wie vor der Drehung. Würde man bloss um  $\pi : n$  drehen und dann das Skalenoeder in einem senkrecht zu  $S_1 S_2$  gestellten Spiegel betrachten, so hätte das Spiegelbild ebenfalls das gleiche Aussehen wie das Skalenoeder vor der Drehung. Man heisst eine solche Achse eine  $2n$ -zählige Spiegelachse. Ihr sind im vorliegenden Fall noch  $n$  Symmetrieebenen parallel, die durch die Geraden  $S_1 A_1 \dots$  gehen. Die zweizähligen Ach-

<sup>4</sup> In § 4 geht das Skalenoeder nur unter der Voraussetzung in einen Doppelkegel über, dass es als Konvex vorausgesetzt wird. Da aber die  $n = \infty$  entsprechenden Sternpolyeder nicht darstellbar sind, so ist der Doppelkegel das einzige realisierbare Grenzgebilde für  $n = \infty$ .



sen, welche die Mittelpunkte der randlichen Zickzacklinie  $A_1 A_2 \dots$  mit  $O$  verbinden, bedingen ein Zentrum der Symmetrie, sobald sie zu einer der  $n$  Symmetrieebenen senkrecht zu stehen kommen. Dies ist immer der Fall, wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist, also beim 6-, 10-, 14seitigen Skalenoeder. Dadurch, dass man die Punkte  $A_1, A_2 \dots$  auf den zugehörigen Prismenkanten beliebig und unabhängig voneinander verschiebt, verschwinden diese Symmetrieelemente wenigstens teilweise, oft gänzlich. Es entstehen mehr oder weniger unregelmässige Körper, deren Volumen aber immer noch durch die allgemeine Formel II gegeben ist. Im Aussinnen möglichst bizarrer Polyeder dieser Art, findet eine blühende Phantasie eine u. M. verlockende, sicher aber ungefährliche Betätigung.

Es ist nicht allzu schwer, die Gestaltsveränderung des Skalenoeders, in Abhängigkeit vom Parameter  $p$ , an Modellen, die man aus Holz, Gips, vielleicht sogar aus Kartoffeln oder Rüben schneiden mag, schrittweise zu verfolgen. Auch gute Zeichnungen in schiefer Parallelprojektion, etwa nach dem Vorbild unserer Figuren, tun den Dienst. Man kann sogar versuchen, derartige Modelle aus dünner, steifer, nicht brüchiger Pappe zusammenzukleben. Das erforderliche Netz lässt sich höchst einfach konstruieren. Man kann von einem beliebigen ungleichseitigen Dreieck ausgehen (die Winkel an  $S$  müssen für konvexe Polyeder spitz sein) und daraus  $a, c$  und  $p$  berechnen oder umgekehrt aus gegebenem  $a, c$  und  $p$  das Dreieck  $S_1 A_1 A_2$  ermitteln.

6. Kristallographisch möglich sind, wie bereits gesagt, nur Skalenoeder m.  $n=2$  und  $n=3$ . Aber nicht alle! Die schon oben erwähnte raumgitterartige Struktur verlangt, dass die Skalenoederflächen auf den Geraden, welche vom Mittelpunkt nach den Mitten der auf- und absteigenden Randlinie  $A_1 A_2 \dots$  gezogen werden können, Abschnitte bestimmen, die im Verhältnis ganzer Zahlen stehen. Das bedeutet gewisse Einschränkungen für  $p$ . Eine einfache Rechnung, die aber nicht allgemein, sondern nur für  $n=2$ , bzw.  $n=3$  durchgeführt zu werden braucht, zeigt, dass  $p$  ein rationaler Bruchteil von  $c$  (z. B.  $\frac{c}{4}, \frac{2c}{7}$  etc.)

sein muss. Für  $n=3$  muss  $p$  wegen § 4, c überdies kleiner sein als  $\frac{c}{3}$ . — Noch eine andere interessante Beziehung zur Kristallographie ergibt sich. Am Kalkspat ist nämlich noch ein anderes Skalenoeder recht häufig. Man nannte es früher vielfach  $R_5$ . Aus der Fig. 1 ergibt es sich, indem man die Punkte  $A_1 A_2 \dots$  an ihrer Stelle lässt, dagegen den Abstand  $S_1 S_2$  auf das  $\frac{5}{3}$ fache des gegebenen vergrössert,, wobei  $S_2$  ebensoviel nach unten gerückt wird, wie  $S_1$  nach oben gleitet. Ausser diesen zwei Skalenoedern wurden aber noch viele andere Skalenoeder am Kalkspat ab und zu beobachtet. Sie sind dadurch charakterisiert, dass ihr  $c$ -Wert (bei unverändertem  $a$ ) ein rationales Vielfaches vom  $c$  der Fig. 1 ist und dass  $p$  rationale Bruchteile (kleiner  $\frac{1}{3}$ ) dieses neuen  $c$  durchläuft (= Rationalitätsgesetz der Kristallographie). Das Verhältnis  $c : a$  der Fig. 1 ist also für den Kalkspat gewissermassen wesentlich. Andere Mineralien (z. B. Kupferkies, Fig. 3) sind durch einen andern Wert dieses Verhältnisses gekennzeichnet, und zwar steht derselbe in gar keiner direkt übersehbaren Beziehung zum erstern (= Achsenverhältnis der Mineralien).

Die Stereometrie darf nicht zur Kristallographie ausarten! Unter keinen Umständen! Auch wird es nicht möglich sein, jeden Körper in der vorliegenden Weise „auszuschlachten“. Ja, der erfahrene Schulmann wird, wenn er überhaupt einmal das Skalenoeder behandeln will, sicherlich nicht zwei, drei Stunden lang davon sprechen. Er wird vielmehr Dinge, die hier ausgeführt sind, gelegentlich der Besprechung anderer Körper nach Tunlichkeit heranziehen. Die Hauptsache ist, dass mit dem fortschreitenden Unterricht das Verhältnis für die geometrischen Beziehungen im Raum immer mehr erschlossen und geklärt wird. Kann hierbei durch ein kleines Guckfensterchen noch ein Blick in die Wunder der Kristallwelt getan werden, so schadet das nichts, denn die ganze unorganische Natur, soweit sie fest ist, Stein und Erz, und der Sand unter unsern Füßen, zählen ja grundsätzlich zu ihr.

Freiburg (Schweiz).

L. Weber.