

Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 22 (1936)
Heft: 1: Besinnung und Zusammenarbeit

Artikel: Das "skandalöse" Parallelenaxiom
Autor: Hauser, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-525078>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

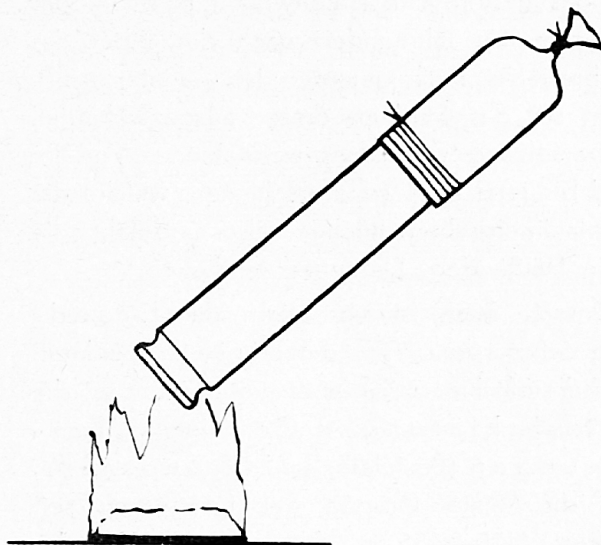
Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 11.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

dünnen Eisendraht an einem Stecken befestigt und über ein kleines Feuer gehalten. Um dieses zu entfachen, bedient man sich bei Schulversuchen am besten der stets verwendungsbereiten Metablöcke. Rasch wird das Wasser sieden; der Dampf unerwartet schnell den Gummischlauch blähen, sprengen und als gut sichtbare Wolke entfliehen. Damit haben die Schüler, was sie wollen. Sie werden überzeugt und es auch begreifen, dass noch weit stärkere Gegenstände, auch eine verschlossene Bettflasche im Ofen, explodieren könnten.



Mittelschule

Das „skandalöse“ Parallelenaxiom

Ein sehr altes und berühmtes Problem der Elementarmathematik ist die Frage nach der Berechtigung des Parallelenaxioms, welches lautet:

Es sei g eine beliebige Gerade und P ein Punkt ausserhalb g . Dann gibt es in der durch g und P bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch P läuft und g nicht schneidet.

Schon Euklid, der um 300 v. Chr. in Alexandrien lebte, hat dieses Axiom im 1. Buche seiner „Elemente“ — allerdings in komplizierterem Wortlaute (siehe unter I.) — ausdrücklich als Postulat formuliert. Darum wird es öfters auch das Euklidische Axiom genannt. Es stellt eine unerlässliche Forderung dar, ohne die sich das Gebäude der euklidischen Schulgeometrie nicht aufbauen lässt. Denn es findet sowohl in der ebenen wie in der räumlichen Geometrie häufig Verwendung zum Beweis von Lehrsätzen, die man sonst gar nicht begründen könnte. Als besonders einfache Beispiele seien nur die Sätze über die Winkel an Parallelen sowie der Satz von der Winkelsumme im Dreieck erwähnt.

Wie ist wohl Euklid dazu gekommen, sein Parallelenpostulat aufzustellen? Woran liegt es, dass sich die Mathematiker nach Euklid durch

viele Jahrhunderte hindurch über diese Forderung heftig gestritten haben und dass noch heutzutage in Fachzeitschriften darüber diskutiert wird? Ja, warum konnte sich D'Alembert (1717—1783), der bekannte französische Enzyklopädist, zu diesem Thema so drastisch äussern: „La définition et les propriétés des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des *Eléments de géométrie*“? — Und ferner, wie reagieren denn reifere Schüler einer Mittelschule, wenn man ihnen das Parallelenaxiom unvermittelt zum Nachdenken und zur Diskussion vorlegt?

Es ist gewiss nicht überflüssig, wenn einmal in der „Schweizer Schule“ versucht wird, eine allgemein verständliche Antwort auf diese Fragen zu geben.

I. Die Parallelentheorie Euklids.

Um auf die erste Frage eingehen zu können, machen wir einen Gang durch den Anfang des 1. Buches der „Elemente“ von Euklid. Vor uns liegt der I. Teil der neuesten deutschen Ausgabe von Clemens Thaeer¹. Wer sich

¹) Euklid: Die Elemente. I. und II. Teil, von Clemens Thaeer, 1933. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 235/236. Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H. Leipzig.

für das unsterbliche Hauptwerk Euklids — das bis zum 19. Jahrhundert nach der Bibel das verbreitetste Buch gewesen ist — interessiert, dem sei das Studium dieser ausgezeichneten Uebersetzung wärmstens empfohlen. Von ihr sind bis jetzt zwei Teile erschienen, welche die 6 planimetrischen Bücher, also ungefähr die erste Hälfte der „Elemente“ enthalten.

Das 1. Buch ist vor allem der Grundlegung der Geometrie gewidmet. Euklid stellt hier 3 Gruppen von Sätzen an die Spitze: Erklärungen (Definitionen), Forderungen (Postulate) und Grundsätze. Für die letzte Gruppe gebraucht man seit Proklus (410—485 n. Chr.) gewöhnlich das Wort *Axiom*², das heutzutage freilich eine allgemeinere, die Postulate mit umfassende Bedeutung angenommen hat.

Die ersten der 23 „Erklärungen“ sind blosse Scheindefinitionen. Denn Euklid will damit die geometrischen Elemente wie Punkt, Linie, Gerade, Fläche, Ebene, usw., „erklären“. Solche einfachste Begriffe, die sich auf nichts Einfacheres mehr zurückführen lassen, können ja nicht definiert, sondern müssen als jedem Menschen geläufige und der direkten Anschauung entnommene Ur- oder Grundbegriffe aufgefasst werden. Die letzte der Definitionen betrifft die Parallelität der geraden Linien und ist daher für unsere Betrachtungen von Bedeutung. Sie lautet: *Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.* Diese Erklärung ist übrigens in dem Sinne unklar, als sie die Frage offen lässt, ob sich zwei parallele Geraden im Unendlichen selbst treffen sollen oder nicht.

Unter den 5 Postulaten figurirt nun, ebenfalls an letzter Stelle, das sogenannte *Parallelpostulat*:

Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte wer-

²) Axiom (griech. *axioma*, *axioo* = achte, fordere, glaube), d. h. Grundsatz, unmittelbar einleuchtender Satz, der einen Beweis weder nötig hat noch zulässt.

den, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Die Postulate sind speziell geometrische Grundsätze, welche die Ausführbarkeit gewisser Konstruktionen oder die Existenz gewisser geometrischer Gebilde sicherstellen sollen.

Darauf folgen die Grundsätze oder Axiome, deren es in der Ausgabe von Thaer neun gibt, wovon aber höchstens fünf wirklich bis auf Euklid zurückgehen. Wir greifen hier nur das 8. Axiom als Beispiel heraus: *Das Ganze ist grösser als der Teil.* Diese Grundsätze sind rein logischer Natur, d. h. sie sagen etwas aus, das kein Vernünftiger bestreitet, auch wenn er nichts von Geometrie weiss. Sie sollen an dieser Stelle vor allem zum Ausdruck bringen, dass die in ihnen enthaltenen allgemeinen Beziehungen speziell auch für alle in Betracht kommenden geometrischen Grössen gelten.

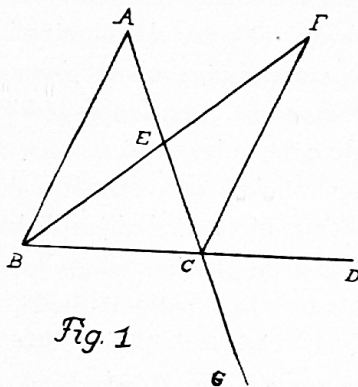
Auf dem Fundament dieser Definitionen, Postulate und Axiome beginnt nun Euklid sein Lehrgebäude der Geometrie aufzubauen. Die ersten 3 Paragraphen zielen auf die Lösung der Aufgabe, eine gegebene Strecke AB auf einer andern Strecke CD von C aus abzutragen. Als Nr. 4 lässt Euklid den ersten Kongruenzsatz folgen. So geht es Schritt für Schritt weiter. Im allgemeinen ist jeder Paragraph der Herleitung eines einzelnen Lehrsatzes oder der Lösung einer besonderen Aufgabe gewidmet. Erst in § 16 wendet Euklid mit folgendem Satze seine Aufmerksamkeit der Summe der Winkel eines Dreiecks zu:

Satz 16. An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Aussenwinkel grösser als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Dies ist nun der Ausgangspunkt für Euklids berühmte Parallelentheorie³. Deshalb soll der Beweis des 16. Satzes, wie er in den „Elementen“ steht, hier vollständig wiedergegeben werden und gleichzeitig als Musterprobe der euklidischen Beweisführung dienen.

³) Wer sich für die folgende Darstellung der Parallelentheorie Euklids nicht besonders interessiert, kann sie übergangen. Ihre Kenntnis ist zum Verständnis der nächsten Abschnitte nicht unbedingt erforderlich.

„Das Dreieck sei ABC (siehe die sehr bekannte Figur 1); man verlängere seine eine Seite BC nach D. Ich behaupte, dass der Aussenwinkel



ACD grösser ist als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel CBA, BAC.

Man halbiere AC in E (I, 10)⁴, ziehe BE und verlängere es nach F; ferner mache man $EF = BE$, verbinde FC u. ziehe AC nach G hin durch.

Da $AE = EC$ und $BE = EF$, so sind zwei Seiten AE, EB zwei Seiten CE, EF entsprechend gleich; ferner $\sphericalangle AEB = \sphericalangle FEC$ als Scheitelwinkel (I, 15); also ist Grundlinie AB = Grundlinie FC, $\triangle ABE \cong \triangle FEC$, und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln entsprechend gleich, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ECF$. Aber $\sphericalangle ECD > \sphericalangle ECF$ (Ax. 8); also ist $ACD > BAE$. Aehnlich lässt sich, bei Halbierung von BC, zeigen, dass auch BCG, d. h. $ACD > ABC$."

Hieraus ergibt sich

Satz 17. In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammen genommen, kleiner als zwei Rechte.

Als nun Euklid den 17. Satz umkehren wollte („Die Figur, die entsteht, wenn man an eine Gerade nach derselben Seite einander gegenüber zwei Winkel anlegt, deren Summe weniger als 2 Rechte beträgt, ist ein Dreieck"), da misslang der Beweis. Euklid sah sich deshalb genötigt, diese Umkehrung als Grundtatsache hinzustellen. So kam er zu seiner berühmten fünften Forderung, dem Euklidischen Parallelenaxiom.

Aus dem Satz 17 folgt sofort: Wenn die inneren Winkel zusammen 2 Rechte betragen oder, was dasselbe ist, wenn die Wechselwinkel gleich sind, schneiden sich die Geraden nicht. Und dies ist der Inhalt der Sätze 27 und 28 des ersten Buches:

⁴ I, 10 bedeutet: I Buch (der „Elemente"), 10. Satz.

Satz 27. Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien einander gleiche (innere) Wechselwinkel bildet, müssen diese geraden Linien einander parallel sein. (Nach Def. 23 und Satz 16.)

Satz 28. Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass ein äusserer Winkel dem auf derselben Seite innen gegenüberliegenden gleich oder innen auf derselben Seite liegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich werden, dann müssen diese geraden Linien einander parallel sein.

Das 5. Postulat muss jetzt herangezogen werden zum Beweis von Satz 29, der Umkehrung von Satz 27:

Satz 29. Beim Schnitt einer geraden Linie mit (zwei) parallelen geraden Linien werden (innere) Wechselwinkel einander gleich, jeder äussere Winkel wird dem innen gegenüberliegenden gleich, und innen auf derselben Seite entstehende Winkel werden zusammen zwei Rechten gleich. (Nach Satz 13, Post. 5, Def. 23.)

Dabei bedeutet das Wort parallel nach Euklids 23. Definition (siehe oben) nicht-schneidend. Hieraus folgt

Satz 30. Derselben geraden Linie parallele sind auch einander parallel. (Nach Satz 29 und 27.)

Das ist nichts anderes als die bekannte, an unseren Schulen ausnahmslos gegebene Fassung des Parallelenaxioms, die sich auch in den klassischen „Grundlagen der Geometrie"⁵ von David Hilbert, vorfindet:

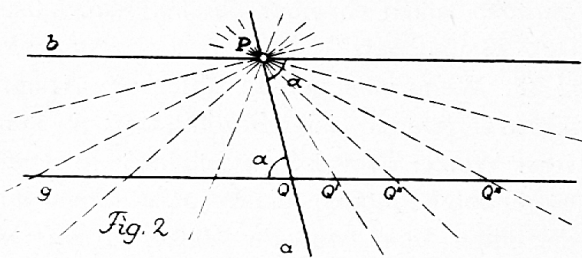
Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden eine und nur eine Parallele.

II. Kritische Betrachtungen.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal den Wortlaut der Sätze 27 und 28. Ihr Inhalt lässt sich durch folgenden Satz kurz zusammenfassen: Durch einen Punkt P ausserhalb einer Geraden g kann man stets (mindestens) eine Gerade ziehen, welche g nicht schneidet. Jene Sätze geben dazu noch an, wie man eine solche Parallele konstruieren kann. Verbindet man nämlich den Punkt P mit irgend einem im Endlichen liegenden Punkt Q der Geraden g durch eine

⁵ Grundlagen der Geometrie. Von Geh. Reg.-Rat Dr. D. Hilbert, Prof. a. d. Univ. Göttingen. 7. umgearb. u. verm. Aufl. mit 100 i. d. Text ged. Fig. (VII u. 326 S.) 1930. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Gerade a und trägt man z. B. den einen Winkel zwischen den Geraden g und a , etwa α (siehe Figur 2), in P an die Gerade a nach der andern



Seite ab, so entstehen zwei gleiche innere Wechselwinkel. Die dritte Gerade b ist dann nach Satz 27 parallel g . Die Existenz mindestens einer Parallelen lässt sich also ganz ohne Zuhilfenahme des Parallelenaxioms beweisen, welches ja von Euklid zum erstenmal zur Herleitung von Satz 29 verwendet wurde.

Sofort drängt sich jetzt die Frage auf: Gibt es durch einen Punkt P ausserhalb einer Geraden g nur eine einzige Parallele zu g oder gibt es mehrere? Wie sich aus dem 29. Satz ergibt, hat sich Euklid durch Annahme seines 5. Postulates für die erste Möglichkeit entschieden: Es gibt eine und nur eine Parallele.

Wie steht es nun mit der Berechtigung dieser Forderung? Ist ihr Inhalt ebenso einfach und unmittelbar einleuchtend wie die Aussagen der übrigen Postulate und der Grundsätze der euklidischen Geometrie? — Schon vom Standpunkt der praktischen Geometrie lässt sich leicht zeigen, dass dies keineswegs der Fall ist. Hier hat man es ja, streng genommen, nie mit der Geraden selbst zu tun, sondern immer nur mit Strecken. Das Nichtschneiden kann ferner durch Erfahrung und Anschauung niemals festgestellt werden, bei kilometerweiter Verlängerung nicht einmal das Schneiden. Ausserdem fehlt unserer Raumanschauung jene absolute Genauigkeit, die zur Entscheidung der vorliegenden subtilen Frage unbedingt nötig ist. Hier wie in jedem andern Gebiet sinnlicher Wahrnehmung lassen sich vielmehr Grössen (Strecken, Winkel etc.), deren Unterschied unter einer gewissen Grenze, der sogenannten Reizschwelle,

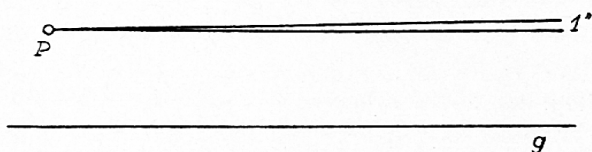


Fig 3

liegt, nicht mehr als verschieden auffassen. So können z. B. Richtungen, die um weniger als eine Sekunde voneinander abweichen, nicht mehr voneinander unterschieden werden. Es wird also schwer sein, aus der unmittelbaren Anschauung zu entscheiden, ob es denn durch einen Punkt P zu einer Geraden g wirklich genau eine Parallele gibt, oder zwei nur um einen solchen kleinen Winkel voneinander abtastende (siehe Figur 3). Man wird diese Schwierigkeit noch deutlicher empfinden, wenn man sich P von g ungeheuer weit entfernt denkt, z. B. auf einem Planeten oder in Fixsternweiten. Auf solche Distanz verliert die Anschauung ganz die Schärfe, die man ihr sonst zutraut. Es ist also gewiss nicht wahr, dass uns die unmittelbare sinnliche Anschauung die Existenz genau einer Parallelen lehrt. Daher ist es nicht zu verwundern, wenn das 5. Postulat bei den Mathematikern, insbesondere den „angewandten“, den Feldmessern, Astronomen, Ingenieuren usw., Anstoss erregt hat.

Gegen die Meinung, dass das euklidische Parallelenaxiom eine Denknöwendigkeit sei, lassen sich aber noch rein logische, also theoretische Bedenken aufführen. Denke man sich wiederum, wie in Figur 2, in der Ebene eine Gerade g von unendlicher Länge und ausserhalb derselben einen Punkt P . Durch diesen Punkt P sei aber diesmal ein Strahlenbüschel gelegt. Wenn der Strahl PQ in der einen oder andern Richtung gedreht wird, erreicht er schliesslich eine Grenzlage, nämlich dann, wenn er mit der Geraden g nicht mehr zum Schnitt kommt. Die zugehörige Grenzgerade nennt man also nach Euklid eine Parallele. Dabei ist es nun keineswegs von vornherein gesagt, dass sich der Strahl PQ derselben Grenzlage nähert, wenn er einmal in der einen und das andere Mal in der andern Richtung gedreht wird. Es besteht also a priori die Möglichkeit der Existenz von wenigstens zwei verschiedenen Geraden durch P parallel zu g .

Man erhält eine noch schärfere Erfassung des Problems, wenn man nach Jakob Steiner⁶, dem grossen Geometer, die aufeinander folgenden Schnittpunkte Q, Q', Q'', \dots (siehe Figur

⁶) Geboren 1796 in Utzensdorf, Kt. Bern, gestorben 1863 als Professor der Mathematik in Berlin.

2) des Strahles PQ mit der Geraden g ins Auge fasst. Jeder Strahl PQ, der g im Endlichen schneidet, ist eine Schneidende. Eine Parallele zu g erhält man dagegen, wenn P mit einem unendlich fernen Punkt von g durch eine Gerade verbunden wird. Das euklidische Parallelenaxiom ist daher inhaltlich gleichbedeutend mit der Behauptung: Die Gerade g hat einen und nur einen unendlich fernen Punkt. Sobald nämlich auf g mehr als ein unendlich ferner Punkt vorhanden wäre, müssten deren Verbindungsgeraden mit dem Punkte P auch mehr als eine Parallele ergeben. Da nun sowohl eine Bewegung des Punktes Q nach links als auch eine Bewegung nach rechts hin ins Unendliche führt, erscheint die Annahme eines einzigen unendlich fernen Punktes als willkürlich, als gekünstelt. Die Anschauung weist eher darauf hin, dass die Gerade g wenigstens zwei voneinander verschiedene, unendlich ferne Punkte hat. Die Annahme eines einzigen unendlich fernen Punktes setzt ferner voraus, dass sich die Gerade in diesem Punkte schliesse, also gleichsam einen Kreis mit unendlich grossem Radius darstelle. Dies widerspricht aber eigentlich, der Auffassung der euklidischen Geraden.

Aber auch die Auffassung von 2 unendlich fernen Punkten ist nicht restlos befriedigend, denn der „unendlich ferne Punkt“ ist ja kein eigentlicher Punkt; „unendlich fern“ ist nur eine Redeweise, die besagt, dass die Entfernung des Punktes grösser sei als irgendeine noch so gross gewählte endliche Entfernung. Beim Durchlaufen der Geraden wird man nie einen Endpunkt, „den unendlich fernen Punkt“, erreichen, ebenso wenig wie man beim Durchlaufen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, ... nach oben irgend einmal „anstösst“. Es liegt sehr nahe anzunehmen, dass die Gerade sowohl nach rechts als auch nach links zu unendlich vielen „unendlich fernen Punkten“ führt. Diese Ueberlegung spricht also für die Existenz von unendlich vielen Parallelen.

Schliesslich ist noch die folgende, durch Bernhard Riemann⁷ begründete Auffassung denkbar: Gewöhnlich schreibt man der

⁷) Geboren 1826 in Hannover, von 1859 bis zu seinem im Jahre 1866 erfolgten Tode Professor der Mathematik in Göttingen.

Geraden, ohne viel dabei zu denken, eine unendliche Länge zu. Diese Annahme liegt ja sehr nahe, ist aber durch nichts bewiesen. Der enge Blick des Menschen vermag immer nur Strecken, niemals aber die vollständige Gerade zu umfassen. Man kann allemal nur ein endliches Stück der Geraden übersehen und verfolgen. Selbst wenn man ein ganzes Menschenleben lang, ja sogar mehrere Siriusweiten eine Gerade verfolgen könnte, so wäre damit ihre unendliche Länge doch noch nicht bewiesen. Man verlässt also hier den Boden der sicheren Erfahrung und stellt kühn eine Hypothese auf. Das einzige, was man von den Geraden mit Sicherheit sagen kann, ist, dass sie in unserer Anschauung keine natürliche, ihr eigentümliche Grenze hat, also unbegrenzt ist. Unendlich und unbegrenzt sind aber durchaus nicht identische Begriffe. Um dies klar einzusehen, erinnere man sich an die Kugeloberfläche; diese ist unbegrenzt, jedoch durchaus endlich.

Wenn man der Geraden eine unendliche Länge zuschreibt, muss auch die Ebene, in welcher ja die Gerade liegen kann, von unendlicher Ausdehnung sein. Und aus der Annahme der unendlichen Ausdehnung von Gerade und Ebene muss unmittelbar auf die Unendlichkeit des Raumes geschlossen werden. Die unendliche Ausdehnung der Geraden, der Ebene und des Raumes ist daher als ein einziges Problem aufzufassen.

Riemann nimmt nun den Raum nur als unbegrenzt und nicht als unendlich an. Dann wird die Gerade zu einer geschlossenen Kurve, auf der die Punkte wie auf einem Kreise angeordnet sind. Lässt man jetzt, wie vorhin, einen Punkt Q auf einer Geraden g in bestimmter Richtung immer weiter laufen, wird er schliesslich wieder zum Ausgangsort zurückkehren, und der Strahl PQ wird überhaupt keine Grenzlage haben. Nach dieser Auffassung gibt es überhaupt keine parallele Gerade durch P zu g .

Alle diese Ueberlegungen führen zur Einsicht, dass das Parallelenaxiom nicht eine ohne weiteres als richtig anzuerkennende Tatsache aussagt und aus verschiedenen Gründen sogar abgelehnt werden kann.

(Der 2. Teil folgt im nächsten Heft.)

Luzern.

Dr. G. Hauser.