

Ueber die geometrischen Grundbegriffe

Autor(en): **Hauser, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **24 (1938)**

Heft 1

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-525003>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

chen wir einmal Uebungen, um dem Kinde in erster Linie bewusst werden zu lassen, welche Eigenschaftswörter etwas erzählen und dann, um zu zeigen, was davon dem Aufsatz dient.

Wir machen Rätsel!

Sucht Eigenschaftswörter, die uns in den Stand stellen, das Ding zu erraten. Fünf Wörter müssen genügen, um den Gegenstand derart genau zu umschreiben, dass er entdeckt werden kann. Die beste Arbeit ist, im Gegensatz zu den gebräuchlichen Rätseln, jene, die am raschesten zur Lösung führt. Solche Aufgaben nehmen den Schüler immer gefangen und werden, selbst wenn man sie als Hausaufgabe erteilt und dabei die ganze Familie mithilft, Erfolg versprechen. Statt langer Erklärungen mögen einige bessere und schlechtere Arbeiten von Schülern, berichten:

hoch	lang	gütig
zerklüftet	staubig	gerecht
steil	geplästert	liebepoll
unbewachsen	endlos	hilfsbereit
zackig	gewunden	kinderliebend
Berge	Strasse	Mutter
dunkel	vierbeinig	langohrig
still	langhaarig	vierbeinig
unheimlich	treu	grauhaarig
sternenlos	wachsam	diensttauglich
gespensterhaft	hühnerfromm	bockbeinig
Nacht	Hund	Esel
	(unser Rex)	

stachelig	warm	klein
länglich	flaumig	blond
grün	überzogen	wehleidig
blühend	mollig	brav
mehrrmig	beliebt	massleidend
Kaktus	Bett	Unser Agnesli

Die letzte Lösung weist darauf hin, dass die Aufgabe auch enger gefasst werden kann: Wir suchen durch Eigenschaftswörter einen Mitschüler zu erraten, wobei im einen Falle äussere, im andern „innere“ Eigenschaften genannt werden:

halblond	klein	frech
grünbekleidet	schlau	grob
klein	dunkelhaarig	lügenrisch
braunumgürtet	zart	schwatzhaft
rundköpfig	gescheit	flegelhaft

Zuletzt setzt die Kritik ein: Was ist treffend — was gesucht — was lässt sich im Aufsatz verwenden — was sagt etwas Selbstverständliches? Sind die besten Wörter des Rätsels auch die besten in einer schriftlichen Arbeit? Der weisse Schnee — Das rote Blut — Die schwarze Kohle — Der vierbeinige Hund — Werturteile werden gefunden und eine Auslese getroffen, die einem unbedachten Verwenden von Eigenschaftswörtern vorbeugt.

Johann Schöbi.

Mittelschule

Ueber die geometrischen Grundbegriffe

„Die Geometrie kann entsprechend ihrem ehrwürdigen Alter als Wissenschaft auch auf eine so alte Tradition als Unterrichtsfach zurückblicken. Ist diese Tradition nach der einen Seite hin ein Vorzug, so birgt sie doch in anderer Hinsicht schwere Gefahren; in

der Tat krankt der geometrische Unterricht heute geradezu an der Last der Ueberlieferung, denn es sind in ihn viele nicht mehr eigentlich lebensfähige Bestandteile jetzt so fest eingenistet, dass sie schwer zu beseitigen sind und sogar das Herankommen

neuer gesunder Gebiete auf alle Weise erschweren."

Mit diesen Worten äusserte sich Felix Klein, der einstige prominente Mathematikprofessor an der Universität Göttingen, im Jahre 1908¹ zum damaligen Stande der Schulgeometrie. Jeder heutige Lehrer dieses Faches sollte wissen, dass unter der ange deuteten, hemmenden „Tradition“ das mehr als 2000 Jahre lange Festhalten am Vorbild der „Elemente“ des Euklid² gemeint ist. Diese beharrliche Treue, die auf einer falschen Einschätzung der griechischen Kultur beruht, gipfelte im letzten Jahrhundert in einem wahren Kultus der euklidischen „Elemente“, der z. B. durch den folgenden Satz aus dem Anfang von Tropicke „Geschichte der Elementarmathematik“ drastisch illustriert wird: „Stolzer als ein Denkmal von Stein, schärfer und reiner in der Linienführung als irgend ein Kunstwerk hat das System Euklids sich der Jetztzeit erhalten.“

Wie steht es nun heutzutage in dieser Sache, fast 30 Jahre nach jenen kritischen Bemerkungen des berühmten Göttinger Gelehrten? Wie fast immer, wenn es sich um einen wesentlichen Fortschritt in der Kulturgeschichte handelt, hinkt auch hier die konkrete Verwirklichung weit hinter der theoretischen Einsicht nach. Denn erst in der Gegenwart fängt man ernsthaft an, sich von den Fesseln der euklidischen Tradition zu befreien. Sichtbare Spuren dieser Emanzipation lassen sich auch in der Schweiz erkennen. So stellt in erster Linie der in den letzten Jahren vom „Verein Schweizerischer Mathematiklehrer“ herausgegebene „Leitfaden der Geometrie“ eine entschiedene und vorbildliche Neugestaltung der elementaren Einführung in die Geometrie dar. Aus

¹ In der Sommervorlesung: „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 2. Teil: Geometrie“. (Erschienen bei B. G. Teubner, Leipzig, 1909.)

² Vergl. den Anfang meines Artikels: „Das skandalöse Parallelenaxiom“ in der „Schweizer Schule“, Nr. 1, Jahrgang 1936.

einem Konferenzbericht in Nr. 1 des laufenden Jahrgangs der „Schweizer Schule“, S. 35, ist ferner zu entnehmen, dass auch das neue zürcherische Geometrielehrmittel von Gassmann-Weiss an dieser Gegenströmung teilnimmt.

Kurz gesagt, besteht die nun endlich einsetzende, bewusste Abkehr von den „Elementen“ Euklids neben einem Verzicht auf den früheren trockenen Beweisschematismus im Anfangsunterricht — durch immer stärkeres Streben nach Anschaulichkeit und direkter Verknüpfung mit den Objekten der wirklichen Welt! — vor allem in einer konsequenten Berücksichtigung einer neuen Auffassung der Grundlagen der Geometrie, d. h. der Grundbegriffe und Grundsätze, wie sie durch die Ergebnisse der modernen Grundlagenforschung bedingt ist.

Das Studium der vorhandenen Literatur über diesen Gegenstand ist gar nicht leicht. Im allgemeinen verfügt nur der geschulte Fachmathematiker über die nötige Vorbildung sowie über genügend Ausdauer, um massgebende Werke — wie etwa diejenigen von Hilbert³ oder von Gosseth⁴ — vollständig und mit Gewinn durcharbeiten zu können. Es gibt aber auch „Laien“, welche sich aus beruflichen oder privaten Interessen in diesen Fragenkomplex einleben und zunächst einmal die Gründe und die Notwendigkeit des Umschwunges einsehen möchten. Der vorliegende Artikel will diesem Wunsche (wenigstens teilweise) entgegenkommen. Der Verfasser stellt sich nämlich die Aufgabe, die Schwierigkeiten aufzuzeigen, welche auftreten, wenn man die geometrischen Grundbegriffe auf die früher übliche Weise definieren will. Diesen ergebnislosen Definitionsversuchen soll dann die neue Auffassung gegenübergestellt werden, welche den modernen Menschen befriedi-

³ „Grundlagen der Geometrie“, 7. Aufl., 1930. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin.

⁴ „Les Fondements des mathématiques“, A. Blanchard, Paris, 1926 (jetzt vergriffen).

gen kann. — Um allfälligen Missverständnissen vorzubeugen, sei ausdrücklich betont, dass es sich nicht um eine methodische Bearbeitung des Gegenstandes für den Gebrauch in der Schule handelt, sondern um eine kritische Darstellung für reife Leser.

Welches sind nun die geometrischen Grundbegriffe? — Es ist naheliegend, dabei zunächst an die Begriffe Punkt, Linie und Fläche zu denken. Während es nur eine Sorte von Punkten gibt, unterscheidet man bei den Linien und Flächen mannigfaltige Arten, von denen die Gerade und die Ebene die aller-einfachsten sind. Punkt, Gerade und Ebene gelten daher in erster Linie als die elementaren „Bausteine“, als die Grundbegriffe der Geometrie.

Soll das Wesen eines Begriffes erklärt werden, so sucht man in der Regel nach seiner Definition. Es ist nun interessant zu sehen, dass diese Bemühung hier zu keinem befriedigenden Ergebnis führt. Das scheinbar Einfachste verursacht die schwierigsten Probleme. Die Beschäftigung mit ihnen ist nicht nur von mathematischem, sondern auch von ganz allgemeinem Interesse.

Die formale Logik definiert bekanntlich einen Begriff durch den übergeordneten Gattungsbegriff und den artbildenden Unterschied. Hier zwei Beispiele: Das *Parallelogramm* ist ein Viereck mit zwei Paar parallelen Seiten. — Die *Weisstanne* ist ein Nadelholz mit immergrünen Nadeln in zweizeiliger Anordnung (die auf der Unterseite je zwei weisse Streifen besitzen).

Aehnliche Definitionen der geometrischen Grundbegriffe lassen sich nun nicht aufstellen. An Versuchen, dies zu tun, hat es nicht gefehlt. Die berühmtesten stammen schon von Euklid, dem Begründer unserer Schulgeometrie, der um 300 v. Chr. in Alexandria (Aegypten) lebte. Man findet sie auf der ersten Seite des 1. Buches seines schon erwähnten unsterblichen Hauptwerkes „Die Elemente“. Sie lauten:

Der Punkt ist das, was keine Teile hat.

Die Linie ist Länge ohne Breite.

Die Gerade ist jene Linie, die gleichmäßig durch ihre Punkte geht.

Die Ebene ist eine Fläche, die gleichmäßig liegt zu ihren Geraden.

Schon vor Euklid hatte der griechische Philosoph Plato, 427—347 v. Chr., versucht, die Gerade zu definieren, indem er den Satz aufstellte: Die Gerade ist jene Linie, deren Mittleres die Enden beschattet, also der Weg des Lichtstrahles.

Keine dieser Definitionen kann uns befriedigen. Bei den zwei ersten vermischen wir vor allem den übergeordneten Gattungsbegriff. Allerdings wird bei allen eine charakteristische Eigenschaft hervorgehoben. Diese kann jedoch nirgends Anspruch erheben, Attribut nur dieses Begriffes allein zu sein, also den entscheidenden artbildenden Unterschied anzugeben. Es gibt z. B. ausser dem Punkt noch sehr viele Dinge, die keine Teile haben. Ich weise auf die fünf modernen physikalischen Begriffe Elektron, Positron, Neutron, Proton und Photon hin, welche nach dem heutigen Stand der Naturforschung die elementaren, unteilbaren Bausteine der Materie bezeichnen. Noch zu Beginn dieses Jahrhunderts hätte man an dieser Stelle den Begriff Atom (vom griechischen Wort *átomos* = unteilbar) anführen können. Ferner stellen die sogenannten Abstrakta, d. h. die allgemeinen Begriffe wie Existenz, Ursprung, Hoffnung usw. ebenfalls Dinge dar, die keine Teile besitzen. (Die gute „Laune“ z. B. lässt sich nicht halbieren.) Auch von der Linie kann man nicht behaupten, dass sie Teile habe, sondern höchstens, dass sie teilbar sei. Für die euklidische Definition der Linie müssten erst die Begriffe „Länge“ und „Breite“ definiert sein. Dies wäre wohl kaum möglich, ohne einen Zirkelschluss, einen *circulus vitiosus* zu begehen.

Es ist überraschend, dass bis gegen Ende des letzten Jahrhunderts kein wesentlicher Fortschritt in der logischen Erfassung der

geometrischen Grundbegriffe erreicht worden ist. Der grosse französische Geometer A. M. Legendre (1753—1834) hat ein Lehrbuch mit dem Titel „Eléments de géométrie“ geschrieben, welches verschiedene Auflagen erlebte. Sehen wir uns einmal genauer an, wie noch in der Ausgabe vom Jahre 1877 die geometrischen Grundbegriffe erläutert werden:

1. *Definition:* Jeder Körper nimmt im unbegrenzten Raum einen bestimmten Ort ein, den man Volumen nennt.

2. *Definition:* Die Oberfläche eines Körpers ist die Grenze, die ihn vom umgebenden Raume trennt.

3. *Definition:* Unter Linie versteht man den Ort, wo die Oberfläche von zwei Körpern aneinander grenzen.

4. *Definition:* Ein Punkt ist der Ort, wo sich zwei Linien schneiden.

Wie schon F. Gonseth („Les Fondements des Mathématiques“, page 1) bemerkt, sind diese Formulierungen auf den ersten Blick sehr verblüffend und verführerisch. Ihre Geschlossenheit scheint die Klarheit der Gedanken zu garantieren. Mit einem Schlage beherrschen wir die grundlegenden Begriffe: Volumen, Oberfläche, Linie, Punkt.

Wenn wir aber näher prüfen, stossen wir bald auf schwerwiegende Mängel. Zunächst beachten wir, dass der Begriff des Punktes an letzter Stelle erscheint, während wir sonst gewohnt sind, diesen Begriff als den aller-einfachsten zu betrachten. Ist es wirklich unmöglich, den umgekehrten Weg einzuschlagen? Man könnte doch z. B. die Linie als die Spur eines beweglichen Punktes einführen. Die Verschiebung einer Linie würde die Fläche erzeugen, usw. Dann wäre man aber genötigt, den Punkt auf unmittelbare Weise zu definieren, was eben nicht ohne grosse Schwierigkeiten durchführbar ist.

Die beiden geschilderten Wege zur Einführung der Grundbegriffe der Geometrie sind übrigens nur scheinbar voneinander verschieden. Denn beide Verfahren stimmen

darin überein, dass sie die geometrischen Grundgebilde wie konkrete, materielle Gegenstände beschreiben. Dies ist vor allem bei der ersten Definition von Legendre zu erkennen. Es wird hier nämlich vorausgesetzt, dass der wahrnehmbare Raum sich vor unseren Augen ausbreite und die Körper enthalte, deren Form und Eigenschaften wir beschreiben. Geben wir ferner der zweiten Legendreschen Definition etwa die Form: „Es ist möglich, eine scharfe Grenze zwischen einem Körper und dem ihn umgebenden Raume wahrzunehmen;“ — dann ist sie zu einer Aussage geworden, die in allen ihren Teilen einem physikalischen Gesetze gleicht, z. B. dem Satze: Die Oberfläche eines Kristalls besteht aus lauter ebenen Flächen.

Es ist nach einiger Ueberlegung nicht schwer, einzusehen, dass die geometrischen Sätze, die man auf Grund von derart definierten Grundbegriffen aufstellt, keine absoluten Gesetze von sicherem Wahrheitsgehalt mehr sind, dass solche Aussagen vielmehr nur annäherungsweise gelten, wie jedes andere physikalische Gesetz. Und stellt man sich gar auf den Standpunkt der modernen Atomphysik, so ist es geradezu absurd, sich eine scharfe Trennungsfäche zwischen zwei materiellen Medien, wie etwa zwischen Luft und Wasser, vorstellen zu wollen. Von hier aus gesehen, wird auch der Hinweis auf die scharfe Kante eines guten Lineals als eine konkrete Realisierung der mathematischen Geraden sinnlos. Denn auch die schärfste Kante, welche den Begriff der Geraden am besten zu verwirklichen scheint, besteht in Tat und Wahrheit aus einer nicht kontinuierlichen, also diskreten Folge von Molekülen oder Atomen, die viel eher an eine Perlenschnur als an eine mathematische Gerade erinnert.

Wenn man also die Geometrie konsequent in dem angedeuteten Sinne aufzubauen vermöchte, würde sie zu einer experimentellen Wissenschaft werden. Jeder geo-

metrische Lehrsatz würde alsdann nur diese oder jene Eigenschaft eines bestimmten konkreten Gegenstandes — mit beschränkter Genauigkeit — zum Ausdruck bringen. Es wäre überdies nicht zulässig, dabei von einer stets fortschreitenden Annäherung bis zur asymptotischen Anpassung von Gegenstand und Gesetz zu reden. Wie gesagt, genügt es, bis zu den Dimensionen von der Grössenordnung eines Atoms hinunterzusteigen, um alles in Frage zu stellen.

Trotz des ganzen logischen Apparates, dessen sich die Geometrie von jeher bedient hat, trotz ihres guten Rufes als exakte Wissenschaft war sie, die Geometrie, während langer Zeit und fast bis auf den heutigen Tag eigentlich nichts anderes als der älteste Zweig der experimentellen Physik. Beim ruhigen Nachdenken über die unleugbare Tatsache des empirischen (d. h. erfahrungsgemässen) Charakters der bisherigen Elementargeometrie wird man von einem lebhaften Gefühl des Erstaunens erfasst. Man

kann es gar nicht mehr begreifen, dass man die Geometrie stets als das Muster einer abstrakten Wissenschaft hingestellt hat, welche rein nach den strengen Gesetzen der formalen Logik aufgebaut sein sollte. Die übliche Redensart: „Logisch streng wie ein geometrischer Beweis“ war bis in die jüngste Vergangenheit unzutreffend. Es hätte vielmehr heissen sollen: „So anschaulich wie ein geometrischer Beweis.“

Der Definitionsversuch von Legendre befriedigt also keineswegs. Aber auch die neueste Zeit ist nicht imstande, die geometrischen Grundbegriffe in gewohnter Weise einwandfrei zu definieren. Ihre Hilflosigkeit diesem hartnäckigen Problem gegenüber kommt etwa in folgenden scherzhaften Wendungen zum Ausdruck: „Ein Punkt ist ein Winkel, dem man die Schenkel ausgerissen hat.“ — „Die Linie ist ein davongelaufener Punkt.“

(Schluss folgt.)

Luzern.

G. Hauser.

Umschau

Unsere Toten

Fräulein Thekla Braun, Lehrerin, Rorschach.

Sie hat es wohl verdient, dass ihrer auch in der „Schweizer Schule“ gedacht wird.

Ihre Jugendjahre verlebte sie in St. Gallen, besuchte die Kantonsschule zur weitem Ausbildung und trat dann ins Lehrerseminar Mariaberg ein, da sie Lehrerin der Kleinen werden wollte. Ihre erste Lehrstelle fand sie in Degersheim, wo sie noch in bester Erinnerung gehalten wird. Im Jahre 1909 begab sie sich nach Florenz und Spezia, um die italienische Sprache geläufig zu erlernen. 1910 wurde Fräulein Braun als Lehrerin an die überfüllte Unterschule nach Rorschach gewählt. Hier wirkte sie unermüdlich und segensreich. Mit grossem Eifer erfüllte sie ihre Pflichten als Lehrerin und wusste sich die Liebe und Anhänglichkeit der Kinder, sowie die Achtung der Eltern und die Anerkennung der Schulbehörde zu sichern. Keine Arbeit war ihr zu viel. In den Vereinen wurde sie als tätiges Mitglied sehr geschätzt. Das

Vertrauen der Uebrigen übertrug ihr allerlei Aemter, die sie immer bereitwillig ausübte. Besondere Hingabe widmete sie dem Jugendbund des kath. Abstinentsvereins. Sie leitete ihn während mehr als 20 Jahren. Die Kolleginnen wählten sie als ihre Vertreterin in die Geschäftsprüfungskommission des K. L. V. Ferner amtierte sie als Aktuarin der Sektion Gallus des Vereins kath. Lehrerinnen der Schweiz und später als Kreispräsidentin des Kreises Rheintal-Fürstentum. Sie übernahm in den letzten Jahren das Präsidium des Vereins zur Hebung der Volksgesundheit in Rorschach.

Zu Sport und grösseren Reisen fand unsere Kollegin ebenfalls noch Zeit.

Sie war unermüdlich tätig, bis der liebe Gott ihrem Wirken ein Ziel setzte. Seit dem hohen Donnerstag dieses Jahres war sie an das schwere Leidenslager gefesselt, von dem sie sich nicht mehr erheben