Zeitschrift: Schweizer Schule
Band: 24 (1938)
Heft: 3

Artikel: Ueber die geometrischen Grundbegriffe [Fortsetzung]
Autor: Hauser, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-525463

Unterricht" (Heft Europa und Heft Aussereuropa) entstanden Schülerhefte, die mich befriedigten und offensichtlich auch den Schülern Freude machten.

Doch das Abschreiben ist so eine Sache! Ungleiche Schreibfertigkeit der Schüler, fehlerhaftes Abschreiben infolge Sehschwäche oder weiter Entfernung bei grossen Klassen, hemmen, und oft benötigen wir die Tafel für andere Abteilungen in Mehrklassen und Gesamtklassen. Gegen das Diktieren bestehen noch mehr Bedenken, und nicht mit Unrecht, wegen Zeitverlust und vor allem wegen der vielen Fehler.

Was lag also näher, als die Texte auf irgendeine Art zu vervielfältigen, und zwar, von Kollegen mehrfach aufgemuntert, drucken zu lassen? Es wurde das Loseblättersystem gewählt. Nun bekommt jeder Schüler den Text in die Hand und nach dem Abschreiben wird er wieder eingesammelt zur Benützung für spätere Jahrgänge. Wo genügend Mittel zur Verfügung stehen, wird man es vielleicht vorziehen, die Blätter sogar ins Heft zu kleben; die ganze Rückseite ist frei gelassen oder wenigstens ein genügend breiter Rand. Ein Beispiel:

Skandinavien.

Norwegen	8×Schweiz	3 Millionen
Schweden	11×Schweiz	6 Millionen

1. **Land.** Grösste Halbinsel Europas. Langes Gebirge, steil aus dem Meere im W, Terrassenabfall im O. Im W vorgelagerte Inseln (= Schären), Wellenbrecher; aber auch gefährliche Klippen. Fjorde = bis 200 km lange, schmale Einschnitte des Meeres mit schroffen Felswänden und hohen Wasserfällen. Im SO grosse Seen und weite Ebenen.
2. **Klima.** Sk. reicht bis in die kalte Zone. Jedoch Golfstrom. Westküste: eisfreie Häfen. Regenreiche Sommer, milde Winter. Talböden: wenig bebaut (Kartoffeln, Gerste und einige Obstsorten). Höhen: 70% Felsen und Gletscher, rauh und stürmisch. Schweden: 50% Wald. Strenge Winter, heisse Sommer.
3. **Volk.** Abgehärtet, kräftig, ernst, nachdenklich. Volksbildung auf hoher Stufe. — Evangelisch. — Im N die Lappen, Renntierzüchter, Nomaden.
4. **Erwerb.** N: Fischfang (Heringe, Kabeljau, Walfische, Lebertran) und Schiffahrt. Sch: Holzindustrie (Papier, Zündhölzer), Bergbau (Silber, Kupfer, bes. Eisen). Im S Getreidebau und Viehzucht.
5. **Städte.** Sch: Stockholm, Hauptstadt. Upsala: Universität. Malmö. N: Oslo (Kristiania) Hauptstadt. Bergen, Fischerei. Drontheim. Hammerfest, nördlichste Stadt der Erde. Im Sommer 2 Monate keinen Sonnenuntergang, im Winter 2 Monate keinen Sonnenaufgang.

Nicht immer genau gleich, aber ähnlich, wurden auch die übrigen Länder bearbeitet. Dass entfernt liegende Staaten, bes. solche, die zur Schweiz nur lockere Beziehungen haben oder im Völkergeschehen überhaupt eine unbedeutende Rolle spielen, weniger ausführlich behandelt wurden als etwa Italien oder Deutschland, liegt auf der Hand. Zuweilen wurden auch ganze Staatengruppen, z. B. jene des Balkans, zusammen auf ein Blatt genommen.

Mosnang. *P. Mazenauer.*

Mittelschule

Ueber die geometrischen Grundbegriffe *

Suchen wir nun nach dem tieferen Grund, weshalb eine Definition der geometrischen Grundgebilde nicht möglich ist. Es wurde bereits daran erinnert, dass man zur Definition eines Begriffes allgemein den nächst höheren Gattungsbegriff verwendet. Man umschreibt also einen Begriff mit Hilfe eines andern, der umfassender ist. Und dieser einfachere Begriff wird seinerseits auf einen noch einfacheren Begriff zurückgeführt, usw. Die Gesamtheit all dieser Definitionen bildet

* Siehe Nr. 1.

daher eine Kette, jede einzelne Definition eines seiner Glieder. Schliesslich gelangt man — und zwar nach e n d l i c h vielen Schritten! — zum Schluss dieser Kette. Dies ist dann der Fall, wenn ein Begriff sich nicht mehr mit Hilfe eines noch umfassenderen, einfacheren Begriffes erklären lässt. Ein solcher Begriff heisst nun eben ein U r b e g r i f f oder G r u n d b e g r i f f. Diese sind so einfach, dass eine Definition von üblicher Art nicht mehr möglich ist. Es sind freie und unmittelbare Schöpfungen des menschlichen Geistes.

Auch die geometrischen Grundbegriffe sind uralter Geistesbesitz der Menschheit! Diese wichtige Einsicht wird heutzutage im ersten Geometrieunterricht berücksichtigt. Es wird wohl immer seltener vorkommen, dass ein ahnungsloser Lehrer in allem Ernst die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene den Schülern durch vermeintliche „Definitionen" zu erklären versucht und diese gar noch auswendig lernen lässt.

Eine richtige Einführung geht vielmehr darauf aus, die schon im jungen Menschen schlummernde Idee der geometrischen Grundbegriffe zu wecken und zu entwickeln. Es handelt sich ja darum, von vornherein vorhandene, aber noch verschwommene Vorstellungen allmählich zu präzisieren. (Deswegen spricht man in diesem Zusammenhang auch von w e r d e n d e n Begriffen.) Im I. Teil des neuen, vom „Verein Schweizerischer Mathematiklehrer" herausgegebenen L e i t f a d e n s d e r P l a n i m e t r i e ist nun dargestellt, wie man diesen geistigen Prozess auf geschickte Weise einleiten kann. Der Begriff des geometrischen P u n k t e s z. B. wird hier als „b e s t i m m t e S t e l l e" oder „p r ä z i s e r O r t" aufgefasst und wie folgt eingeführt [5]:

„Wenn wir auf der Erdoberfläche eine b e s t i m m t e S t e l l e finden sollen, so werden wir uns zu ihrer Bezeichnung der vorhandenen Landeseinteilungen bedienen. Ist der Ort z. Beispiel in der Schweiz, so gibt uns die Nennung des Kantons, der Ortschaft, des Quartiers, der Strasse oder des Platzes usw. eine immer genauere, wenn auch noch grobe Beschreibung der Lage.

Nehmen wir nun an, es soll auf einem Zeichenblatt eine Stelle möglichst genau angegeben werden, so müssen wir uns eine Gebietseinteilung selbst herstellen. Durch einen Strich teilen wir das Blatt so in zwei Teile, dass die Stelle in einem dieser Teile liegt. Dieser Teil wird neuerdings durch einen Querstrich so geteilt, dass sich die Stelle in einem der zwei Teile befindet. An ihm wiederholen wir das Teilungsverfahren. Wir können damit so lange fortfahren, als uns dies die Beschaffenheit des Blattes und des Bleistiftes erlaubt. Bei einem glatten Blatt Papier und mit einem besonders fein gespitzten harten Stift können wir die Teilung mit einer Lupe etwas weitertreiben. Wenn dann unsere besten Hilfsmittel ein Weiterteilen nicht mehr gestatten, braucht unsere Vorstellung nicht halt zu machen. Wir denken uns einfach das Teilungsverfahren immerfort weitergeführt. So kommen wir zum B e g r i f f d e s v o l l s t ä n d i g g e n a u a n g e g e b e n e n S t e l l e, zum g e o m e t r i s c h e n P u n k t.

Ein geometrischer Punkt kann eigentlich nicht gezeichnet werden. Es wird aber immer genügen, einen Punkt durch ein kleines Zeichen darzustellen. Das Wort ‚Punkt' kommt ja vom lateinischen p u n c t u m oder p u n c t u s = Stich. Euklid braucht das Wort s e m e i o n = Z e i c h e n."

Um die richtige Vorstellung der geometrischen L i n i e zu wecken, wird zunächst auf die Herstellung einer Sägemehl- oder Gipsspur bei der Gebietsabgrenzung für einen turnerischen Wettkampf hingewiesen. Will man genauer sein, so legt man in diese

[5] Seite 9.

Spur eine Leine[6] (Richtschnur). Damit die Abgrenzung noch genauer wird, denkt man sich schliesslich diese Leine durch einen Seidenfaden ersetzt.

Ferner werden ein straff gespannter Faden, eine scharfe Kante eines guten Lineals oder auch eine Visierlinie als gute Bilder für den Begriff der geometrischen geraden Linie (kurz „die Gerade" genannt) verwendet.

Bei der Einführung der geometrischen Grundbegriffe im Unterricht soll man also direkt an wahrnehmbare, konkrete Objekte anknüpfen. Dem Mathematiker genügen jedoch solche anschauliche, aber grobe „Bilder" nicht. Er ist vielmehr bestrebt, von bloss intuitiven zu logischen Begriffen fortzuschreiten. Ein einwandfreies Verfahren zur logischen Erfassung der geometrischen Grundbegriffe hat nun zum erstenmal David Hilbert[7] in seinem bereits erwähnten Buche „Grundlagen der Geometrie" dargestellt. Dieses epochemachende Buch ist zum Standardwerk der Grundlagenforschung, zum „Brevier" des Axiomatikers geworden. Die erste Ausgabe datiert vom Jahre 1899; bis heute hat es schon 7 Auflagen erlebt, obwohl seine gründliche „Durcharbeitung" grosse Ausdauer und viel mathematisches Verständnis und Abstraktionsvermögen erfordert. Denn es ist ein schwieriges und überaus trockenes, abstraktes Buch. Hilbert stellt sich darin die Aufgabe, die Geometrie aus den drei Grundbegriffen (Punkt, Gerade und Ebene) und aus einem vollständigen und möglichst einfachen System von Grundsätzen neu aufzubauen. (Schon die „Elemente" Euklids stellen ja einen ersten, aber noch sehr unvollkommenen Versuch dieser Art dar!) Dabei versteht man heutzutage unter einem geometrischen Grundsatz eine für den Aufbau der Geometrie unentbehrliche Forderung, die sich im Gegensatz zu den gewöhnlichen oder abgeleiteten Sätzen nicht beweisen lässt. Beispiel: „Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt." Man verwendet für die Grundsätze sehr häufig auch das Wort Axiom, das seit Proklus (410—485 n. Chr.), also seit dem 5. Jahrhundert unserer Zeitrechnung, in Gebrauch steht. „Axiom" kommt vom griechischen Wort axioo = fordere, glaube. Die moderne, axiomatische Behandlung der Geometrie, die sogenannte Axiomatik, besteht also darin, dass die Gesamtheit der geometrischen Erkenntnisse aus Grundbegriffen und Axiomen wie aus einem „Samenkorn" heraus durch die formale Logik allein entwickelt wird.

Hilbert beginnt nun seinen Aufbau der Geometrie mit der folgenden Erklärung: „Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: Die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C, ...; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade und bezeichnen sie mit a, b, c, ...; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit α, β, γ, ...". Hilbert fährt dann weiter: „Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen", „zwischen", „parallel", „kongruent", „stetig"; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie."

Hilbert geht somit von der oben begründeten Einsicht aus, dass sich die Grundbegriffe der Geometrie logisch gar nicht definieren lassen, und dass es ausserdem für den Aufbau der Geometrie ganz belanglos ist, was die Grundbegriffe überhaupt sind,

[6] „Linie" kommt von linea, das von linum (Flachs, Lein) abgeleitet ist und ursprünglich „Leine" bedeutet.

[7] D. Hilbert war bis vor wenigen Jahren Professor der Mathematik an der Universität in Göttingen.

was ihr Inhalt bedeutet. Dies kommt übrigens schon in den „Elementen" Euklids zum Ausdruck, indem seine „Erklärungen" der Grundbegriffe nirgends im Verlaufe seiner Untersuchungen als Beweismittel auftreten. Nirgends heisst es z. B. in einem Beweise: „Weil der Punkt das ist, was keine Teile hat, so folgt daraus ..."; oder „weil die Linie Länge ohne Breite ist, so ergibt sich ...". Eine Definition der Grundbegriffe wäre also ohnehin unnütz. Von Wichtigkeit ist nur, dass die Grundbegriffe die durch die Axiome geforderten Beziehungen erfüllen. Die Axiomatik ist reine Beziehungslehre.

Erst die in den Axiomen festgelegten Verknüpfungsregeln bringen uns demnach Klarheit über sämtliche wesentlichen Eigenschaften der Grundgebilde, von denen die Geometrie handelt. Die Gesamtheit der Axiome, das Axiomensystem, kann man als einen „Ersatz" für die unmöglichen Definitionen, als eine Art Beschreibung der Grundbegriffe auffassen. Schlick hat die Axiome deshalb in seinem Buche über Erkenntnistheorie treffend als „implizite Definitionen" bezeichnet. Damit münden nun unsere Betrachtungen in ein neues Thema, welches den Gegenstand eines besonderen Artikels mit dem Titel „Ueber die geometrischen Grundsätze" darstellen könnte.

Zusammenfassung: Punkte, Gerade und Ebenen sind die elementaren Bausteine der Geometrie. Eine einwandfreie logische Definition dieser geometrischen Grundbegriffe ist nicht möglich, weil sie sich gar nicht auf noch einfachere Begriffe zurückführen lassen. Es kann sich nur darum handeln, eine Erläuterung dieser Begriffe auf Grund der Erfahrung zu geben. Hätte der Schüler nicht eine durch ungezählte Beobachtungen gefestigte Vorstellung von den Punkten, Geraden und Ebenen, so könnte sie ihm auch durch keine Definition vermittelt werden. Die erkenntnistheoretische Unbrauchbarkeit der auch heute noch im Unterricht gelegentlich versuchten Definitionen erhellt am besten aus der Tatsache, dass nirgends im Lehrgebäude auf den Inhalt der gegebenen Definitionen zurückgegriffen wird. Die „mathematische Präzision", die in vielen Lehrgängen von den ersten Begriffen an zu geben versucht wird, ist daher bloss eine scheinbare und nur geeignet, Verwirrung zu stiften. Die geometrischen Grundbegriffe sind als primitive Begriffe in die Geometrie einzuführen. Zum wissenschaftlichen Aufbau ist nur die Forderung der Existenz von Dingen nötig, die man Punkte, Gerade und Ebenen nennt. Das Wesen dieser Begriffe erschöpft sich alsdann in dem Umstande, dass sie den gegenseitigen Verknüpfungsmöglichkeiten genügen, welche durch die Aufstellung der geometrischen Grundsätze oder Axiome postuliert werden.

Luzern. *G. Hauser.*

Konferenz der kathol. Mittelschullehrerschaft der Schweiz

Das vor einem Jahr in Schwyz bestellte Aktionskomitee hatte in Nr. 24 dieser Zeitschrift die katholischen Mittelschullehrer der Schweiz auf Mittwoch, den 29. Dezember 1937, zu einer Konferenz nach Luzern (Hotel Union) einberufen und hiezu ein in der gleichen Nummer veröffentlichtes, reichhaltiges Programm vorbereitet. Der Vorsitzende, Hochw. Herr Prälat Dr. Jos. Scheuber, Rektor, Schwyz, konnte zur festgesetzten Stunde gegen 100 Kollegen und Kolleginnen geistlichen und weltlichen Standes begrüssen. Herr Ständerat Dr. Egli, Erziehungsdirektor des Kantons Luzern, Herr Ständerat Dr. Piller, Vorsteher des Departementes des Oeffentlichen Unterrichtes des Kantons Freiburg, Herr Studienrat Dr. Hiller aus Vorarlberg waren als Ehrengäste anwesend. Von Anfang an herrschte reges Interesse und aufmerksame Hingabe an das Gebotene.

Am Vormittag hörte man zuerst das Referat von Nationalrat Dr. Wick (in Verhinderung des Referenten von Hrn. Dr. Dom-