

# Einiges über den Geometrieunterricht

Autor(en): **Gonseth, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **24 (1938)**

Heft 6

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-526922>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

doch von einer Klasse in die andere mitbringen. Wenn sie für frühere Unterlassungen etwas büssen müssen, schadet es nicht. Der Lehrer möge selbst für seinen Unterricht den goldenen Mittelweg suchen: Nicht zu schnell, nicht zu langsam! Wenn ein Schüler mehr Zeit braucht als viele andere, um etwas zu begreifen, kann man deswegen nicht die ganze Klasse warten und sich langweilen lassen. Zu einem langsamen Schüler könnte man mit dem Mathematiker d'Alembert sagen: „Allez en avant, la foi vous viendra.“ Man kann sein Verständnis nicht plötzlich erzwingen, aber ihm vielleicht privat etwas nachhelfen. Mit der Zeit wird ihm auch manches klarer werden.

So erfüllt der Geometrieunterricht eine grosse Aufgabe, wenn die jungen Menschen dabei *denken lernen, ihr Anschauungsvermögen und die genaue Beobachtung schulen, ihren Willen stählen, ihren Sinn für*

*Ebenmass, Ordnung und Gesetzmässigkeit fördern.* Sie werden zum Suchen und Finden geometrischer Wahrheiten angeleitet: das fördert die *Arbeitslust*, hebt das richtige *Selbstgefühl* und pflegt den *Sinn für Genauigkeit und Wahrheit.* Das alles sind Bildungswerte, die bleiben, wenn der ehemalige Schüler die Einzelheiten der geometrischen Wissenschaft vergessen haben wird.

*Wir Lehrer aber wollen den Unterricht in Geometrie mit innerer Hingabe, mit Liebe, Freude und Geduld erteilen.* Der Mathematiker Kummer sagte zu einem seiner Schüler, der in das Lehrfach eintrat: „Sie haben den edelsten Beruf erwählt. Der Goldschmied arbeitet nur in Gold und Juwelen, wir Lehrer aber in Menschenseelen.“ Leibniz aber schrieb einst das Wort: „Der Mensch ist eine Asymptote Gottes.“

Engelberg.

P. Basil Buschor.

## Einiges über den Geometrieunterricht

1. Ist nicht seit Euklid schon alles über dieses Thema gesagt worden? Können diesem etwas spröden Stoffe immer noch neue Seiten abgewonnen werden? Ist nicht im Geometrieunterricht die Lehrmaterie so bestimmt, der Aufbau so vorgeschrieben, sind nicht die Methoden so klar und eindeutig, dass an eine wesentliche Erneuerung nicht gedacht werden kann? Die folgenden Ausführungen werden einen andern Standpunkt darlegen.

Ich habe diesem Gegenstand seit Jahren manche Arbeitsstunden gewidmet. So z. B. bei der Vorbereitung und der Ausführung des gemeinsam mit Dr. P. Marti (damals Mathematiklehrer am Berner Stadtgymnasium, heute Sekundarschulinspektor des Kantons Bern) herausgegebenen *Leitfadens der Planimetrie*; oder anlässlich der Vortragsreihe über Grundlagen und Grundfragen der Geometrie, die ich 1924 im Kreise des Lehrervereins Bern-Stadt hielt, oder auch bei meinen Vorlesungen an der E. T. H. über den Unterricht der elementaren Geometrie. Erwähnt sei noch die Vortragstournee, unter Leitung von Dr. P. Marti und Mitwirkung der

Herren Dr. Leuenberger und Schuler, die uns nach Biel, Bern, Burgdorf und Spiez führte, und an der die Frage des Geometrieunterrichts auf der Sekundarschule mit der bernischen Sekundarlehrerschaft erörtert wurde. Ich darf wohl sagen, dass ich manche Erfahrungen gesammelt habe. Nicht selten waren sie aber ziemlich betäubend.

Es ist mir klar geworden, dass der Geometrieunterricht, und ganz speziell in den elementarsten Teilen, bedeutenden Schwierigkeiten begegnet. Oft begnügt man sich mit einer ganz oberflächlichen, billigen und ungenügenden Behandlung. Ein bisschen Zeichnen, ein bisschen Messen, ein bisschen Papierfalten und ein bisschen Schwindeln sollen über die unangenehmen Hindernisse helfen. Hat man einmal die Kongruenzsätze hinter sich, so eröffnet sich die breite Strasse der Routine. Wenn auch von diesem Punkte an der Unterricht straffer wird, so täuscht man sich sehr darin, dass alles jetzt in schöner Ordnung sei. Ich eröffne jeweils die schon erwähnte Vorlesung über den Unterricht der ele-

mentaren Geometrie mit einem Gespräch mit den Studenten und lasse sie über ihre ersten geometrischen Eindrücke berichten. Jedesmal tritt ein allgemeines Gefühl der Unsicherheit und der Unzufriedenheit zu Tage. Ich habe es nur einmal erlebt, dass die Erklärung abgegeben wurde: „Der Geometrieunterricht hat mich befriedigt und überzeugt.“ Sollte ich verschweigen, dass der Lehrer dieses glücklichen Schülers Dr. Marti gewesen ist?

Das ehrliche Streben nach Sauberkeit und Gründlichkeit führt aber leicht zum andern Extrem. Der Schüler vermag eine abstrakte Begründung mit Definitionen, Axiomen, Postulaten und strenger Beweisführung nicht wirklich zu verstehen. Dabei kann es auch vorkommen, dass der Lehrer sich selber in die heraufbeschworenen Schwierigkeiten verstrickt.

2. Kurz gesagt: Der heutige Zustand ist nicht befriedigend. Ich bin überzeugt, dass die Mehrzahl der Mathematiklehrer diese Ansicht teilen, und dass sie die Notwendigkeit einer gründlichen Abklärung aller dieser Fragen lebhaft empfinden.

Allerdings ist dies keine so „simple“ Sache, dass einige Zeilen dazu genügen würden. Es ist nicht ganz einfach einzusehen, welche Schwierigkeiten hier im Wege stehen, warum eine solche Unsicherheit in der Behandlung der ersten Grundlagen andauern kann. Jedenfalls ist es gut, von vornherein auf die Hoffnung zu verzichten, die Frage könnte mit einigen gut gewählten Definitionen erledigt werden. Die Schwierigkeiten sind nicht so oberflächlicher Natur, dass einige Redewendungen zu ihrer Beseitigung ausreichen könnten. Es sind hier einige ganz prinzipielle Fragen, die klar ins Auge gefasst werden müssen. Ohne etwas Denkarbeit und aufrichtige Konzentration ist ihnen nicht beizukommen.

Ich betone also, dass die vollständige Kenntnis des Stoffes und ein pädagogisch einwandfreier Unterricht noch keine genü-

gend breite Plattform liefern zur sachgemäßen Behandlung dieses Problems. Das Gesichtsfeld muss so weit erweitert werden, dass es etwas Kritik des Denkens und des Wissens überhaupt umfasst. In diesem erweiterten Rahmen vermögen dann einige konsequent durchgeführte Ueberlegungen in überraschend einfacher Weise zu einer befriedigenden Stellungnahme zu führen.

3. Wir beginnen mit einer für jedes Fach gültigen Bemerkung: Jede Unterrichtsfrage hat zwei Seiten, die Seite des Lehrers und die Seite des Schülers. Je nach der betrachteten Seite ist unter Umständen diese Frage nach ganz verschiedenen Grundsätzen zu prüfen. Jede Seite besitzt ihr eigenes Gesicht und ihre eigenen Notwendigkeiten.

Betrachten wir das Problem zunächst von der Seite des Lehrers! Es handelt sich hier um das Verhältnis des Lehrers selbst zum Lehrstoff, um seine eigene Auseinandersetzung mit all dem, was er an den Schüler zu bringen gedenkt. Die Frage lautet hier noch nicht: „Was darf man vom Schüler verlangen?“, sondern umgekehrt: „Was darf billigerweise von jedem Lehrer erwartet werden? Was hat jeder Lehrer von sich selbst zu verlangen?“

Ich fordere nun die Anerkennung des folgenden Grundsatzes: „Das Wissen des Lehrers soll vorerst für ihn selbsteinbefriedigendes Ganzes bilden.“ Oder mit andern Worten: „Der Lehrer hat sich zuerst für sich selbst mit dem Lehrstoff zu beschäftigen, als Bestandteil des eigenen Wissens, nach eigenem Maßstab.“ Er soll ihn nicht nur wie ein hervorragender Schüler kennen, sondern eben . . . wie ein Lehrer!

Ist das nicht eine selbstverständliche, harmlose Forderung? Es ist aber eine offenkundige Tatsache, dass sie für das Fach Elementargeometrie — von den andern Fächern will ich nicht sprechen — nicht erfüllt ist. In diesem Fach ist, wie schon gesagt, der Lehrstoff nicht sehr umfangreich, sogar in



der Reihenfolge und in der Methode einigermaßen vorgeschrieben. Tradition und Routine haben daraus ein trockenes Pensum gemacht, das in keinem Verhältnis mehr zum heutigen Geistesleben steht. Die Elementargeometrie ist eine blosser Schulangelegenheit geworden, für den Lehrer ist sie kein Bildungsfach mehr. Also: Der Lehrer hat zur Elementargeometrie meistens kein eigenes, sondern nur das schulmässige Verhältnis.

4. Es ist daher nicht verwunderlich, dass der tiefe und reiche Bildungsgehalt dieses Faches ungenutzt bleibt. Und doch sollte meiner Meinung nach in die Augen springen, dass bei Begriffen wie Definition, Anschauung, Evidenz, Postulat, Axiom, etc., alle Grundprobleme der Erkenntnis und der Methodik in echter Bedeutsamkeit, in wahrer Grösse in Diskussion gestellt werden. Hier ist der Ort einer ersten und erfolgreichen Auseinandersetzung des erkennenden Geistes mit der Aussenwelt. Hier ist die Stelle, wo die Anwendung des abstrakten Denkens auf die konkrete Realität am einfachsten geprüft werden kann. In der gleichen Weise, wie die einfachste Rede auch Prosa genannt werden kann, ist jede noch so einfache Einführung in die Geometrie auch Erkenntnistheorie. Es ist nicht zu ändern: Hier wird schon eine Lösung des Grundproblems der Uebereinstimmung unserer Gedankenwelt mit der Welt der ausser uns stehenden Gegenstände vorweggenommen, präjudiziert. Man sagt: Das Verständnis für die wissenschaftliche Erfassung der Natur soll angestrebt werden. Man vergisst aber, dass die ersten präzisen Vorstellungen über das Zusammenwirken von menschlichem Geist und Natur in der elementaren Geometrie erweckt werden. Was da geschieht, beeinflusst die ganze Weiterentwicklung. Hier liegt ein echtes, tiefes Problem, das nicht mit einer Nebenbemerkung abgetan werden sollte.

Es sei nochmals betont: Ich behaupte

nicht, dass die Grundbegriffe: Anschauung, Axiom, etc., sorgfältiger mit den Schülern besprochen werden sollten. Das steht nicht zur Diskussion, wenn wir das Problem auf der Seite des Lehrers studieren. Hier soll vielmehr verlangt werden dürfen, dass diese gefährlichen Ausdrücke vor jedem Gebrauch auf ihre Bedeutung geprüft werden. Daneben bleibt es immer noch offen, ob es nicht die erste Pflicht des Lehrers seinen Schülern gegenüber ist, seine diesbezüglichen Ueberlegungen für sich selber zu behalten.

Folgendes steht aber für mich fest:

Die elementare Geometrie ist der Vorraum der Wissenschaft, der von allen betreten werden muss. Hier wird man mit den ersten methodischen Vorstellungen versehen oder belastet. Vorsicht und Umsicht sind hier besonders am Platz.

5. Man wird vielleicht einwenden: „Sind nicht diese ersten Vorstellungen eindeutig und notwendig bestimmt?“ Zugegeben, dass bei den ersten Erklärungen pädagogische Fehler gemacht werden können. Werden aber diese Fehler nicht bald durch die Uebungen in Zeichnen, Konstruieren und Schliessen beseitigt? Das Endergebnis kann mit mehr oder weniger Geschick erreicht werden. Ist aber dieses Endergebnis nicht immer dieselbe, einzig mögliche bereinigte Raumvorstellung?

Diesen Einwänden möchte ich entgegenhalten — und im Folgenden auseinandersetzen — dass die heutigen Vorstellungen

- a) keineswegs notwendig, sondern traditionsgebunden sind,
- b) nicht mehr mit dem heutigen Wissen im Einklang sind,
- c) verhältnismässig leicht im Sinne einer bessern Anpassung korrigiert werden können.

Und es scheint mir, dass man von jedem Lehrer die wenigen einfachen Kenntnisse verlangen dürfte, welche den drei Behauptungen



tungen gerecht werden können. Diese Kenntnisse liessen sich der Reihe nach als historische, philosophische, erkenntnistheoretische, psychologische, physiologische, physikalische, geometrische und logische bezeichnen. Das sind aber im Grunde genommen hochtönende Wörter für ganz naheliegende Tatsachen.

Uebrigens muss man bemerken, dass in dieser Hinsicht der Unterricht auf der Universität keineswegs fehlerfrei ist. Auch auf der akademischen Stufe hat jede Unterrichtsfrage ihre zwei Seiten, die Seite der reinen Wissenschaft, für die sich der Lehrer verantwortlich fühlt, und die Seite des Studenten. Ist der Student ein angehender Lehrer, so sollte die ihm zugewandte Seite des Universitätsunterrichts in einem natürlichen Zusammenhang mit der Seite des Lehrers im Mittelschulunterricht stehen, d. h. der Lehrstoff des Mittelschullehrers sollte an der Universität als Lernstoff behandelt werden. Es mutet aber sonderbar an, dass die meisten Hochschulen für diesen Stoff kein Interesse aufbringen. Der Lehrstoff der Mittelschule ist nur in seltenen Fällen ein Gegenstand der akademischen (mathematischen) Lehrtätigkeit.

6. Die drei vorangehenden Behauptungen sollen jetzt kurz begründet werden. Wir begegnen der elementaren Geometrie in dreifacher Form:

a) Wenn zur Prüfung des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck jeder Schüler ein Dreieck sauber zeichnet, dessen drei Winkel sorgfältig misst und ihre Summe berechnet, so ist dies *Experimentalgeometrie*. Diese Form der Geometrie ist mit der Experimentalphysik verwandt. Man könnte versuchen, alle bekannten elementargeometrischen Sätze vom Thalesatz bis zur Kreislehre auf diese Weise zu begründen. Man könnte z. B. auch so feststellen, dass für „jeden“ Kreis das Verhältnis der Peripherielänge zum Durchmesser die gleiche Zahl,

nämlich  $\pi$  liefert. Allerdings wäre  $\pi$  nur approximativ bestimmt.

Die Konstanz dieses Verhältnisses erschiene uns dann als Naturgesetz. Also: Experimentalgeometrie in möglichst reiner Form ist ein Kapitel der Experimentalphysik und vermittelt uns die Kenntnis von sogenannten Erfahrungstatsachen.

b) Geometrische Eigenschaften können auch unmittelbar, ohne jegliches Experiment, erfasst werden. Wir wollen uns z. B. eine Kreislinie vorstellen, mit dem von ihr umfassten Gebiet. Jeder normale Mensch wird ohne weiteres zugeben, dass jedes geradlinige Liniensegment, das einen inneren Punkt mit einem äusseren Punkt verbindet, die Kreislinie schneiden muss. Diese Art der geometrischen Erkenntnis nennen wir *intuitiv* oder *anschauungsmässig*. Neben der Erfahrung ist somit die Anschauung auch eine Quelle unserer geometrischen Kenntnisse.

c) Nun ist aber die Schulgeometrie weder reine Erfahrungs- noch reine Anschauungsgeometrie. Der Satz des Pythagoras z. B. wird im Gegenteil „bewiesen“. Gewisse Eigenschaften und Sätze lassen sich aus andern Eigenschaften und Sätzen deduktiv ableiten. Es gibt eine dritte Form der Geometrie, die zwar auch nicht in reiner Form in der Schule gepflegt wird, die *abstrakte* oder *axiomatische Geometrie*, die das ganze geometrische Gebäude auf der Basis von einigen Grundbegriffen und Axiomen durch „logisches Schliessen“ errichtet.

Mit dieser einfachen Feststellung offenbart uns die Elementargeometrie sofort die drei Hauptquellen unserer wissenschaftlichen Erkenntnis: Die Erfahrung, die Anschauung und die Abstraktion.

Die erste Frage, die sich aufdrängt, ist natürlich: In welchem Verhältnis stehen diese drei Pole unseres Wissen zueinander? Und in welchem Masse vermögen sie uns eine getreue Kenntnis der Aussenwelt zu vermitteln?

7. Ein bequemer Weg, an diese Frage her-

anzutreten, ist die Analysis der Bedeutung des Wortes Axiom. Wie schon erwähnt, ist ein Axiom ein Satz, der nicht bewiesen wird, sondern ohne weiteres als wahr zu gelten hat. Woher ist uns aber diese Wahrheit bekannt? Etwa durch bloße Erfahrung? Kann z. B. das Experiment für die Richtigkeit des bekannten Postulates Euklid's bürgen:

Durch einen Punkt  $P$  außerhalb einer Geraden  $p$  gibt es nur eine Parallele zu  $p$ .

Zur Entscheidung dieser Frage sollen einige unserer physikalischen Kenntnisse herangeholt werden. Wollen wir diese Behauptung experimentell prüfen, so sind vorerst der Punkt  $P$  und die Gerade  $p$  und die eventuelle Parallele durch physikalische Gegenstände zu realisieren. Ebenso sollte für jede Gerade durch  $P$  die Möglichkeit einer entsprechenden Verwirklichung bestehen. Nun wissen wir aber, dass es weder für einen Punkt, noch für eine Gerade, noch für irgendwelche abstrakte geometrische Figur eine vollkommene physikalische Verwirklichung gibt. Die Kante eines Lineals z. B. ist für eine Gerade eine ziemlich grobe Verwirklichung. Unter dem Mikroskop wäre von der schönen Geradheit fast keine Spur mehr. Die Kante eines Kristalls oder ein feiner Lichtstrahl würden dem abstrakten Ideal besser entsprechen. Und doch besteht von da zu diesem Ideal ein wahrer Abgrund. Denn es genügt, die Sache vom Standpunkt der Atomphysik aus zu beurteilen, um alles wieder in Frage zu stellen. Die Kante eines Kristalls ist dann eine diskrete Folge von kleinen Energiepaketen und keine Linie mehr. Bei diesem neuen Bild verschwindet einfach alles, was an die Gerade erinnert. Der Lichtstrahl eignet sich zur vollkommenen Verwirklichung nicht besser; er kann als Strahl nur mit einer gewissen „Dicke“ existieren.<sup>1</sup>

Und doch werden wir uns hüten, auf das

<sup>1</sup> Vgl. auch den Aufsatz von G. Hauser: „Ueber die geometrischen Grundbegriffe“ in Nr. 1 und Nr. 3, 1938, dieser Zeitschrift. (Red.)

Merkmal „gerade“ bei der Beschreibung eines Lineals oder einer Kristallkante zu verzichten. Ist das nicht ein logischer Fehler? Nein, vorausgesetzt, dass wir dieses Merkmal nicht für vollkommen adäquat, sondern nur für summarisch, schematisch halten.

Wir dürfen von dem Verhältnis zwischen einem abstrakten Begriff und einer möglichen Verwirklichung nie mehr als das erwarten:

Die konkrete Verwirklichung ist nur angenäherte Wiedergabe des abstrakten Begriffs; der Begriff liefert nur eine schematische Darstellung des konkreten Gegenstandes.

Und zwar besteht prinzipiell nicht die Möglichkeit, dieses unvollkommene Entsprechen gegen ein vollkommenes immer mehr konvergieren zu lassen. Das Beispiel des Lichtstrahles z. B. zeigt, dass, wenn man die Genauigkeit über gewisse Grenzen forcieren will, das ganze Verfahren versagt.

Jetzt ist die Antwort auf unsere Frage klar: Die Erfahrung kann die „Wahrheit“ eines geometrischen Axiomes nicht beweisen. Höchstens kann sie zeigen, dass dieses ein summarisches, schematisches Naturgesetz ausspricht.

8. Wir wollen jetzt nach historisch-philosophischen Anknüpfungspunkten suchen. In etwas grober Vereinfachung darf man als *naiven Realismus* die Lehre bezeichnen, die zwischen dem Gegenstand und dem „entsprechenden“ Begriff eine einigermaßen endgültige Aequivalenz postuliert. Die wenigen Ueberlegungen, die wir gerade gemacht haben, zeigen, dass diese Lehre in ihrer einfachsten Formulierung den heutigen Anforderungen nicht mehr genügt. Sie gibt keine genügende Rechenschaft mehr über das Nebeneinanderstehen der Experimentalgeometrie und der abstrakten Geometrie.

Uebrigens ist in den üblichen Vorstellungen über das Verhältnis zwischen „konkret“ und „abstrakt“ in der Elementargeometrie nicht so sehr der naive Realismus vertreten,



als die abgeänderte Form desselben, wonach man mit der Möglichkeit von immer besseren „konkreten Realisierungen“ gedanklich operiert, die gegen eine vollkommene Realisierung konvergieren würden. So schmerzlich es auch ist, der Tatsache ist nicht auszuweichen, dass auch diese durch die Mitwirkung des Grenzbegriffs „verbesserte“ Form des geometrischen Realismus den durch die Entwicklung der atomaren Physik blossgelegten Abgrund zwischen „konkret“ und „abstrakt“ nicht zu überbrücken vermag.

9. Prüft man die erwähnten „üblichen Vorstellungen“ etwas eingehender, so wird einem klar, dass sie auf einem vagen, unsauberen Kompromiss zwischen historisch entgegengesetzten Auffassungen beruhen. Neben dem mehr oder weniger bewussten Realismus, der für die Möglichkeiten der Anwendungen bürge soll, lebt in ihnen der platonische Idealismus weiter, mit dem Ideenkreis um die absolute Wahrheit, um die „an sich wahren, evidenten“ Ideen. Wie oft wird noch ein Axiom als „an sich wahrer, evidenter Satz“ erklärt! In der elementaren Geometrie konnte sich der Geist der miteinander eng verknüpften griechischen Mathematik und griechischen Philosophie am treuesten erhalten. Durch die Benutzung der „Elemente“ von Euklid als Unterrichtsmittel bis in unsere Zeit, oder durch die Nachahmung dieses berühmten Modells, konnte sich die platonische Lehre immer weiterpflanzen. Dies ist um so erstaunlicher, als jeder Geometrielehrer die „geometrischen Ereignisse“ kennt, welche diese Entwicklungslinie tatsächlich unterbrochen haben. Ich meine natürlich die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien. Jeder Lehrer weiss jetzt, dass es Geometrien gibt, in denen das Vte Postulat von Euklid nicht anerkannt und durch ein anderes Axiom (z. B. durch das Axiom von Lobatschewsky) ersetzt wird. Diese beiden Axiome können nicht beide „evident“ im alten Sinne sein; denn in einem und demselben deduktiven Aufbau schliessen sie einander aus. Mit

der Anerkennung der nicht-euklidischen Geometrien wurde also der Begriff der Evidenz in seiner ursprünglichen Bedeutung preisgegeben. Man weiss es . . . und zieht die Konsequenzen nicht.

In den „üblichen Vorstellungen“ ist nicht selten die Idee der Intuition eng verknüpft mit der traditionellen Idee der Evidenz: Ist nicht, sagt man, die Intuition das Vermögen eines aufgeklärten Geistes, die Evidenz gewisser Urwahrheiten zu erkennen? Damit glaubt man das Verhältnis zwischen „abstrakt“ und „intuitiv“ in echter Weise erfasst zu haben. Wenn wir nicht die Augen vor den Tatsachen verschliessen wollen, müssen wir auch hier zugeben, dass diese Vorstellung nicht mehr dem heutigen Stand des geometrischen Wissens entspricht. So wenig der naive (oder durch den Grenzbegriff „verbesserte“) Realismus das Nebeneinanderbestehen der Experimental- und der abstrakten Geometrie begründen kann, so wenig kann auch der platonische Idealismus das Nebeneinanderbestehen der abstrakten und der intuitiven Geometrie erklären. Dass man zur Rechtfertigung des Vorhandenseins aller drei geometrischen Erscheinungsformen oft zu gleicher Zeit Realismus und Idealismus anrief, mutet merkwürdig an. Aus den eben erwähnten, wohlbekanntesten Tatsachen dürfte es aber klar geworden sein, dass weder die eine noch die andere dieser zwei Lehren (in ihrer einfachen, überlieferten Form) noch beide zusammen eine genügende Basis für eine zeitgemässe Begründung der Elementargeometrie mehr liefern können.

10. Endlich möchte ich noch einige naturwissenschaftliche und experimentalpsychologische Ergebnisse heranziehen. Zwar sollte in einer etwas vollständigen Darlegung des Sachverhalts der Name Kants nicht fehlen. Bekanntlich erhält im Kant'schen Idealismus das Wort Anschauung eine ganz andere Bedeutung als im platonischen Idealismus. Und der Einfluss dieser Lehre dürfte schon im Ausdruck „U n s e r e

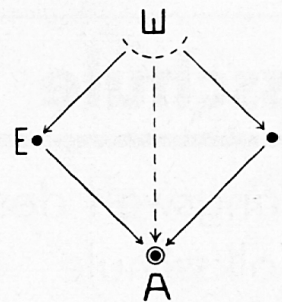


Raumanschauung", bei der Betonung des ersten Wortes „Unsere“ erblickt werden. Für unsere Zwecke dürfte es aber genügen, einerseits an die mannigfaltigen Versuche und an die sonderbaren Erfahrungen der letzten Jahrzehnte über die Sinneswelt der Tiere (insbesondere der Insekten), andererseits an die objektive Beobachtung der Entwicklung der Raumvorstellung bei den Kindern (über die Prof. Piaget im Mathematik-Lehrerverein in Baden berichtet) zu erinnern. Die heutige naturwissenschaftliche Denkweise würde es einem geradezu schwer machen, aus diesem Tatsachenmaterial keine Rückschlüsse auf die Natur unserer Anschauung zu ziehen. In dieser neuen Perspektive erscheint die Anschauung nicht mehr als ein Vermögen unseres Geistes, letzte Wahrheiten unmittelbar zu erkennen. Im Gegenteil, die durch die Anschauung gewonnenen Kenntnisse treten in gleiche Linie mit den durch Erfahrung erworbenen Tatsachen. Anschauung bedeutet ebenfalls eine durch unsere körperliche und geistige Menschenstruktur bedingte angenäherte, schematische Erfassung unserer Umwelt. Dass das Wort „Intuition“ in der Mathematik einer erweiterten Bedeutung fähig ist (mehrdimensionale Räume, z. B.!), tut nichts zur Sache. Es steht hier nur die gewöhnliche Rauman-schauung in Frage.

11. Und nun: Wie lässt sich das besser machen? „Bis jetzt wurden vor allem die Unzulänglichkeiten der überlieferten Auffassungen dargelegt. Jetzt aber, bitte, eine bessere Lösung! In der Tat gibt es eine merkwürdig einfache Lösung, die mit einem Schlag diese scheinbar komplizierte Sach-lage entwirrt. Sie ist im folgenden Schema enthalten (siehe Zeichnung rechts oben):

In dieser Figur soll W die an sich nicht gegebene Umwelt bedeuten; E die Erfahrung, I die Intuition, A die Abstraktion. Der senkrechte Pfeil von W zu A soll das Symbol eines nur schematischen Entsprechens, einer nicht vollkommenen

ad aequatio sein, wie z. B. zwischen einer gegenständlichen Geraden und einer „rein abstrakten“ Geraden. Mit andern Worten: Die abstrakte Geometrie ist ein Gedankenschema zur „schematischen“ Erfassung



des Umraumes<sup>2</sup>. Und die vier andern Pfeile? Ueber die zwei ersten, die das Verhältnis von W zu E, und W zu I symbolisieren, dürften wir schon im klaren sein. Wenn wir den oben erwähnten Erfahrungen Rechnung tragen wollen, können wir auch da nur von einem nicht ganz vollkommenen Entsprechen reden, das eine nicht ganz endgültig fertige Realität an den Tag bringt. Wer mir bis hierher gefolgt ist, wird bald einsehen, dass auch die zwei übrigen Pfeile zu einer ganz ähnlichen Auffassung Anlass geben.

Jeder Pfeil, jeder nach seiner Art, stellt ein schematisches Entsprechen dar. Damit sind auch die Forderungen, die uns der heutige Stand des objektiven Wissens stellt, erfüllt.

Welche philosophische Bezeichnung würde für diesen methodischen Standpunkt passen? Ich glaube, dass man ihn einen realistischen Intellektualismus nennen könnte. Und ich möchte nicht unerwähnt lassen, dass am letzten philosophischen Kongress von Paris (August 1937) der grosse katholische Philosoph J. Maritain gerade eine Grundlehre dieser Art als das Erfordernis unserer Zeit erklärte.

12. So viel über die Probleme, die auf der Seite des Lehrers mit dem Worte „Geo-

<sup>2</sup> Zur gründlicheren Beschreibung dieses Verhältnisses verweise ich auf die Oberstufe des Buches von G o n s e t h und M a r t i : Planimetrie II.

metrie" untrennbar verknüpft sind. Vielleicht könnte ich in einem späteren Aufsatz das Bild so beschreiben, wie es auf der Seite des Schülers aussieht.

Die praktische, objektiv gerechtfertigte Gestaltung des Unterrichts kann dann nur aus einem Vergleich beider heraustreten.

Zürich.

F. Gonseth.

---

# Volksschule

---

## Der Bildungswert des Mathematikunterrichtes in der Volksschule

Das vorliegende Heft der „Schweizer Schule“ ist dem Mathematikunterricht und speziell dem Geometrieunterricht gewidmet. Daher mag hier die Aussprache über den Bildungswert dieses Faches für den Volksschüler wohl angezeigt sein, da auch der Raumlehre-Unterricht zur Erreichung eines Zieles hinführen soll. Damit taucht schon die Frage auf:

1. Welches ist das Ziel des Mathematikunterrichtes (M.-U.) überhaupt?

Wenn aber diese Frage beantwortet ist, so ergibt sich sofort die andere:

2. Dient die Erreichung dieses Zieles der Bildung des jungen Menschen? Und wenn auch diese bejaht ist, wird man wissen wollen:

3. Auf welchem Weg kann dieses Ziel erreicht werden, sofern es also erstrebenswert ist?

Es steht also der Bildungswert des M.-U. überhaupt zur Diskussion, weshalb ich davon absehe, hier die Zielsetzung, die ich dem Rechenunterricht auf der Sekundarstufe gab, zu wiederholen\*, denn es betrifft hier alles, was immer mathematisches Denken fördert, sowohl im Rechnen, als in Algebra, Geometrie, Buchhaltung, Physik u. a. O.

---

\* Siehe: „Das Rechnen auf der Sek.-Schulstufe“, Verlag A. Francke, Bern, Fr. 1.50.

### 1. Das Ziel des Mathematikunterrichtes:

Die geistige Entwicklung des Kindes zeigt, dass sich zuerst die Sachbegriffe (Mama, Wauwau . . .), dann die Tätigkeitsbegriffe (essen, schlagen . . .), dann die Eigenschaftsbegriffe (gross, gut . . .), die Beziehungsbegriffe (in, auf, zu . . .) und also erst spät die mathematischen Begriffe (zuerst die unbestimmten: (viel, wenig . . .), dann die Zahlbegriffe (eins, zwei, vier . . .) und erst zuallerletzt die abstrakten Sprachbegriffe (bezüglich, hingegen . . .) bilden. Der Umstand, dass die Fassungskraft für die verschiedenen sachlichen Begriffe erst schrittweise zunimmt, führte dazu, dass mit dem Rechnen schon in der ersten Primarklasse, mit der Raumlehre jedoch erst in der fünften, mit Buchhaltung, Physik erst in der 7.—8. Klasse, mit Algebra erst in der 9. Klasse begonnen wird. Ob und wie diese Fächer dem gleichen Ziel zustreben, möchte ich durch die folgende Tabelle darstellen. (S. nächste S.)

Kühnel formuliert das Ziel des mathematischen Unterrichtes folgendermassen:

Ziel: Richtige Auffassung der Dinge und Erscheinungen nach ihren Massbeziehungen.

Zweck:

formal: Entwicklung der mathematischen Kräfte (Verstandesbildung)

material: Entwicklung der Fähigkeit, Aufgaben des praktischen Lebens selbständig zu lösen.