Zeitschrift: Schweizer Schule

Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz

Band: 24 (1938)

Heft: 8

Artikel: Ueber die geometrischen Grundsätze [Fortsetzung]

Autor: Hauser, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-530054

Vom Sinn und Gebrauch der Massbezeichnungen*

Der „Kritikus" schliesst mit dem Satz: „Für die Volksschüler und zur Einführung ist dies aber wesensfremd und daher zu verwerfen; oder ist jemand anderer Meinung?"

Hier eine andere Ansicht:

Bei den Längen-, Flächen- und Körperberechnungen ist w e s e n t l i c h, dass der Schüler gründlich in den Unterschied von Längen, Flächen und Körpern eingeführt wird, und dass er klar erkennt, dass Längen mit Längen, Flächen mit Flächen und Körper mit Körpern gemessen werden.

Eine Linie hat nur e i n e Ausdehnung, also wird sie mit m, dm, cm oder mm gemessen. Eine Fläche hat z w e i Ausdehnungen, nämlich in die Länge und in die Breite, muss also auch mit einem Masse mit zwei Ausdehnungen gemessen werden; dazu dienen m^2, dm^2, cm^2 und mm^2.

Folgerichtig gelangen wir dann bei den Körpern zu den Massbezeichnungen: m^3, dm^3, cm^3, mm^3. Dem Schüler ist also die Angabe der Zahl der Ausdehnungen eine sichere Orientierung und erinnert ihn an etwas sehr Wesentliches.

Wie hierin ein „mathematischer Unsinn" herausgefunden werden kann, ist mir unbegreiflich.

„Der Irrtum, der immer noch in den Schülerköpfen sitzt", kommt von der falschen oder ungenügenden Einführung in die Flächen- und Körperberechnungen.

Beispiele:

1. Ein Landstreifen ist 12 m lang.
   a) Wieviel m^2 misst er bei 1 m Breite?
   b) Wieviel m^2 misst er bei 5 m Breite?
   c) Wieviel m^2 misst er bei $6\frac{1}{2}$ m Breite?

Bei anschaulichem Verfahren ist doch die Lösung gegeben:

a) 12 mal 1 $m^2 = 12\ m^2$.
b) 5 mal 12 $m^2 = 60\ m^2$.
c) $6\frac{1}{2}$ mal 12 $m^2 = 78\ m^2$.

2. Eine Steinplatte ist 1,5 m lang, 0,8 m breit und 1 dm dick.

Inhalt = Länge mal Breite mal Dicke.

Wenn nun der Schüler angeleitet wird, alle drei Dimensionen mit der gleichen Masseinheit zu bezeichnen oder anzugeben, so ist es ganz abseits, ihm den „Irrtum" beizubringen:

m mal m mal m $= m^3$,
oder dm mal dm mal dm $= dm^3$.

(Was natürlich auch der Fall ist, wenn statt dm^3 cdm oder statt cm^3 ccm etc. geschrieben wird.)

Die klare Anschauung ergibt folgende Lösung:

15 mal 1 dm^3 mal 8,
oder 8 mal 1 dm^3 mal 15,
oder 15 mal 8 mal 1 dm^3.

Es ist selbstverständlich hier nicht der Ort, näher auf die Flächen- und Körperberechnungen einzugehen; für den beabsichtigten Zweck mögen diese Beispiele genügen.

St. Gallen. *A. Baumgartner.*

* Siehe Nr. 6 der „Schweizer Schule".

Mittelschule

Ueber die geometrischen Grundsätze*

Aus meinen Erläuterungen zu den einzelnen Axiomgruppen von Hilbert im letzten Heft der „Schweizer Schule" geht hervor, dass es nicht sinnlos und daher berechtigt ist, zu fragen: Welche geometrischen Sätze muss man letzten Endes als unbeweisbare Axiome ansehen? Wir haben nämlich eingesehen, dass das Axiomensystem (AS) der Geometrie n i c h t e i n d e u t i g festzulegen ist. Die Auswahl der notwendigen Grundsätze unterliegt vielmehr einer gewissen Willkür. So sind denn auch während der letzten Jahrzehnte mehrere wesentlich von einander verschiedene AS aufgestellt worden, unter denen allerdings dasjenige von Hilbert die Rolle des k l a s s i s c h e n Axiomensystems spielt, weil es vorbildlich ist. Eine Aussage, welche in

* Siehe Nr. 6, 7.

dem einen System als Axiom auftritt, erscheint im andern als ableitbarer Satz. Es kann ferner das eine System mehr Axiome enthalten als ein anderes, wenn in ihm z. B. kräftigere Axiome jenes andern Systems in zwei oder mehr einfachere Grundsätze aufgelöst werden. Die obige Fragestellung lässt sich also wie folgt verbessern und präzisieren: Wie muss ein AS beschaffen sein, damit es als brauchbare Grundlage der Geometrie gelten kann? Oder mit anderen Worten: Welches sind die allgemeinen Eigenschaften eines einwandfreien AS, aus dem sich das ganze Lehrgebäude der Geometrie rein formal durch logische Deduktion entwickeln lässt?

1. Die wichtigste und selbstverständlichste Eigenschaft, die ein System von Axiomen besitzen muss, ist seine Vollständigkeit. Unter einem vollständigen AS versteht man ein solches, bei dem alle zum Aufbau der Geometrie nötigen Axiome wirklich aufgezählt sind. Es sollen keine Grundsätze stillschweigend eingeführt werden. Es darf nicht vorkommen, dass man sich nachträglich aufs neue auf die Anschauung berufen muss, um im Aufbau der Theorie weiterzukommen, sondern alle weiteren geometrischen Urteile sollen sich nur durch logisches Schliessen allein folgern lassen. Es wäre also ein grober Verstoss gegen die Sauberkeit des Verfahrens, wenn man nach der Erstellung des Fundamentes immer noch die anschauungsgemässe Evidenz mitspielen lassen wollte. Erst wenn es mit der Vollständigkeit ganz in Ordnung ist, kann man mit Recht sagen, dass in gewissem Sinne in den Grundbegriffen und Grundsätzen der ganze Tatsachengehalt der Geometrie — wie in einem Samenkorn — bereits enthalten sei.

2. Eine weitere unerlässliche Forderung ist die Unabhängigkeit der Axiome. Es dürfen keine überflüssigen Bestandteile im AS enthalten sein, d. h. keine Sätze, die sich aus anderen Aussagen dieses Systems herleiten lassen. Es muss hier ein unerbittliches Entweder-Oder herrschen: Wenn man sich einmal für ein bestimmtes AS entschieden hat, so muss jeder geometrische Satz alsdann entweder ein Axiom oder eine ableitbare Beziehung sein. Bei der Feststellung der Unabhängigkeit eines Grundsatzes hat man sich somit zu vergewissern, dass die noch so weit getriebene Kombination der gegebenen Aussagen niemals den betreffenden Satz als Schlussfolgerung liefert.

3. Schliesslich muss man an ein AS unter allen Umständen noch die Forderung der Widerspruchslosigkeit stellen. Es muss gewiss sein, dass sich aus den Grundlagen nie zwei Folgesätze ergeben, wovon der eine das Gegenteil des andern behauptet. Die Forschungsarbeit des Axiomatikers befasst sich in erster Linie mit der Prüfung der Axiome auf diese Eigenschaft. Wie lässt sich aber die Widerspruchslosigkeit überhaupt nachweisen? Wenn die Anzahl der sämtlichen Folgerungen aus einem Axiomensystem endlich und nicht allzu gross wäre, könnte man sich darauf beschränken, eine Folgerung nach der andern bis zur letzten zu prüfen, um absolute Gewissheit zu gewinnen. In Wirklichkeit ist dieser Weg ungangbar. Es ist jedoch fraglich, ob irgend ein anderes Verfahren eine gleichwertige Sicherheit gewähren könnte.

Bemerkenswert ist nun der Umstand, dass Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit auf das engste zusammenhängen. Denn ein Satz ist von einem Axiomensystem unabhängig, wenn seine Negation mit dem Axiomensystem nicht in Widerspruch steht. Daraus folgt, dass dieselben Methoden, die für den Nachweis der Widerspruchslosigkeit Verwendung finden, auch für Unabhängigkeits-Untersuchungen in Betracht kommen. Man verfügt über verschiedene derartige Methoden. Die wichtigste und erfolgreichste ist die sogenannte Modellmethode, die sich wie folgt kurz beschreiben lässt: Es bedeute A_1 ein Axiomensystem, dessen Widerspruchslosigkeit nachgewiesen werden soll. Ferner sei A_2 ein Axiomensystem, von dem wir wissen, dass es widerspruchslos ist. Gelingt es nun, durch geeignete Namengebung — durch einen passenden „Schlüssel" — die Axiome von A_1 umkehrbar eindeutig auf die Axiome von A_2 „abzubilden", so ist auch das System A_1 widerspruchslos. Man sagt dann, das Axiomensystem A_2 sei ein Modell des Axiomensystems A_1. Die Modellmethode führt also die Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems A_1 auf die eines andern A_2 zurück.

Will man ferner die Unabhängigkeit eines Satzes S von einem Axiomensystem A beweisen, so führt die Anwendung der Modellmethode ebenfalls zum Ziel. Man hat nur nach einer Gruppe von Begriffen und Beziehungen zu suchen, welche bei passender Namengebung sämtliche Axiome von A, jedoch nicht die Aussage S erfüllen. Gelingt die Konstruktion eines solchen Modells, und ist dieses widerspruchslos, so ist S von A unabhängig. Das berühmteste Beispiel ist der Unabhängigkeitsbeweis nach der Modellmethode für das Parallelenaxiom von Euklid. Er wurde vor ungefähr einem Jahrhundert von Lobatschewsky und Bolyai (fast gleichzeitig und ganz unabhängig von einander) geleistet und gab Anlass zur weittragenden Entdekkung einer ersten Nichteuklidischen Geometrie[14].

Die Modellmethode gibt aber auf die Frage nach der Widerpruchslosigkeit eines AS nur insofern Antwort, als sie das Problem von einem AS auf ein anderes überträgt. Aber einmal muss der Beweis für ein AS direkt geführt werden. Für die gesamte Mathematik kommt zu diesem Zweck das Axiomensystem der Arithmetik in Frage. Die axiomatische Methode eignet sich nämlich auch für den Aufbau der Arithmetik. Man geht hier wiederum von einem System von Dingen aus, die man „Zahlen" nennt. Diese Zahlen denkt man sich in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die Axiome der Verknüpfung, der Rechnung, der Anordnung und der Stetigkeit geschieht. Wie in den Grundlagen der Geometrie, so sind auch hier die „Zahlen" inhaltsleere Begriffe, blosse Symbole, die keine andere Aufgabe zu erfüllen haben, als den Grundsätzen der Arithmetik zu genügen. Auch die Arithmetik ist vom formal logischen Standpunkt aus reine Beziehungslehre. — Ferner liegt die Möglichkeit der Abbildung des AS der Geometrie auf dasjenige der Arithmetik in dem Umstande, dass nach Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems jedem Punkte der Ebene ein Zahlenpaar x, y umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann. Man drückt diese Tatsache bekanntlich symbolisch durch P (x;y) aus.

David Hilbert hat nun das Problem der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik ebenfalls in Angriff genommen. Der erste zusammenfassende Bericht über diese Untersuchungen ist im Jahre 1934 in dem ersten Bande der „Grundlagen der Mathematik" von D. Hilbert und P. Bernays erschienen. Einen wichtigen Vorstoss in dieser Richtung stellt ferner eine kürzlich erschienene Arbeit von G. Gentzen, „Die Widerspruchslosigkeit der reinen Zahlentheorie" (Math. Annalen, Bd. 112) dar, in welcher tatsächlich die Widerspruchsfreiheit der gesamten Arithmetik auf Grund eines Teiles der Arithmetik bewiesen wird. Die endgültige Abklärung und Erledigung dieser brennenden Frage steht noch aus, trotzdem Leonard Nelson schon im Jahre 1927 in einem Vortrag [15] zuversichtlich verkündete: „Die Krönung des ganzen Werkes der modernen Axiomatik ist der lange Zeit für unmöglich gehaltene Beweis der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik, wie er von Hilbert erbracht worden ist."

Nach diesen Ausführungen über die Be-

[14] Siehe „Schweizer Schule", Heft Nr. 2, Jahrgang 1936, S. 98/99.

[15] Vortrag gehalten auf der 56. Versammlung Deutscher Philologen und Schulmännner zu Göttingen am 28. September 1927.

schaffenheit eines brauchbaren AS wird der aufmerksame Leser ahnen können, worin die Arbeit des Axiomatikers zur Hauptsache besteht. Diese wird beherrscht von dem Bestreben, die Grundlagen der Geometrie von allen Bestandteilen zu säubern, die nicht unbedingt hineingehören. Der Inhalt eines Axioms soll so einfach wie möglich sein, d. h. es soll darin das und nur das ausgesagt werden, was man wirklich fordern will. Für den heutigen Axiomatiker kommt es vor allem darauf an, das bloss Anschauungsmässige in den Grundsätzen auf ein äusserstes Minimum zu reduzieren und so in den Hintergrund zu stellen, dass es verblasst. Es ist seine vornehmste Aufgabe, das l o g i s c h e G e r ü s t, auf dem der ganze Inhalt der Geometrie ruht, möglichst rein herauszuarbeiten. Die Tätigkeit eines Axiomatikers ist also mit derjenigen eines Zoologen zu vergleichen, der etwa das Skelett oder irgend ein Organsystem eines Wirbeltiers sauber herauspräpariert, von allen störenden Bestandteilen, wie Muskelresten, Gewebefetzen oder Fettanhängseln befreien muss. Der Geometer kann aber sein AS nicht einfach in ein reinigendes Säurebad eintauchen. Er besitzt auch keine vollkommenen technischen Instrumente, kein scharfes Seziermesser für seine Arbeit wie der Naturwissenschafter. Er verfügt nur über seinen feinen Scharfsinn und eine geschulte Fähigkeit zum logischen Denken.

Die l o g i s c h e S t r u k t u r eines vollständig geklärten AS ist dagegen keine Schöpfung des Mathematikers. Sie wird ihm vielmehr (zum Teil bewusst, zum Teil unbewusst) durch die Intuition und die Erfahrung eingegeben. Hier ist die Kontaktstelle zwischen subjektiver Innenwelt und objektiver Aussenwelt. Hier ist der Ort, wo sich das abstrakte Lehrgebäude der Geometrie und die konkreten Realitäten des uns umgebenden physikalischen Raumes berühren und ineinander übergehen. Wohl versucht der menschliche Geist, die Abhängigkeit von der durch die Sinne wahrnehmbaren Wirklichkeit möglichst einzuschränken. Stets und überall wird er aber das Gepräge dieser Wirklichkeit empfangen; nie wird er sich ganz davon loslösen können.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die vorhin angedeutete F o r m a l i s i e r u n g d e r G e o m e t r i e die äusserste Zuspitzung des Gegensatzes darstellt, der von alters her zwischen der Mathematik als f o r m a l e r Wissenschaft gegenüber den e m p i r i s c h e n Wissenschaften bestand. Sie läuft darauf hinaus, die geometrischen Theoreme zu Sätzen der reinen Logik zu machen. Die Mathematik und die Logik treten also in immer nähere Beziehung zueinander. Es ist deshalb nicht verwunderlich, wenn umgekehrt die neuere Logik nach der mathematischen Methode kalkülmässig behandelt wird. Diese neue Logik hat den Namen s y m b o l i s c h e L o g i k oder L o g i s t i k erhalten.

Die grosse Bedeutung der Axiomatik besteht darin, dass sie nicht nur für die Geometrie, sondern auch für alle übrigen mathematischen Disziplinen und darüber hinaus noch für weitere Sachgebiete verwendbar ist. Kennt man von irgend einer exakten Wissenschaft ein AS, und hat man die Gewissheit, dass es vollständig, in sich widerspruchslos ist und dass die einzelnen Axiome voneinander unabhängig sind, so lässt sich das ganze Sachgebiet bis in die letzten Feinheiten hinaus rein deduktiv aus dem AS entwickeln. Die axiomatische Methode führt somit eine tiefgehende logische Klärung einer Wissenschaft herbei. Durch sie erhält jede Theorie eine logische Geschlossenheit, die ihr auf keine andere Art zu geben ist. Wie hoch Hilbert sie einschätzt, geht aus dem letzten Absatze seiner Abhandlung „Axiomatisches Denken" (Math. Annalen, Bd. 78) hervor. Er schreibt: „Ich glaube, alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit unmittelbar der Mathematik. Durch Vordringen zu immer tieferliegenden Schichten von Axiomen gewinnen wir auch in das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewusst. Im Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle der Wissenschaft überhaupt."

In diesem Sinne sind wohl die berühmten Worte von Kant zu verstehen: In jeder Theorie steckt nur so viel echte Wissenschaft, als Mathematik darin ist.

Luzern. *G. Hauser.*

Umschau

Unsere Toten

† *Fräulein Anna Wick, alt Arbeitslehrerin, Niederuzwil (St. G.)*

An den Folgen eines Hirnschlages, der sie am Morgen des Josephstages auf dem Kirchweg überraschte, starb die oben Genannte im 63. Altersjahre. Es ist gerade ein Jahr her, seit sie mit wehem Herzen nach 33jährigem, vorbildlichem Wirken an der katholischen Schule ihre Resignation eingab. Mit voller Hingabe und grossem Geschick oblag sie ihrer schönen Aufgabe. Ihre ausgesprochene Mitteilungsgabe, gepaart mit einem frohen Gemüt, machte sie zu einer tüchtigen und beliebten Lehrerin. Während vielen Jahren wirkte sie auch mit denselben schönen Erfolgen an den Sekundarschulen Nieder- und Oberuzwil. Kein Wunder, dass sich die Verstorbene überall das volle Zutrauen der Behörden, Eltern und Kinder erwarb. Die liebe Heimgegangene wird an ihren Wirkungsorten in einem guten Gedenken verbleiben. R. I. P. +

Himmelserscheinungen im Monat April

1. *Sonne und Fixsterne.* Das Tagesgestirn finden wir im April in der Region der Fische und des Widders. Vom Aequator weicht es bis zum Monatsende um 15 Grad nach Norden ab, so dass die Tageslänge schon 14½ Stunden erreicht. Der Sonne steht um die Monatsmitte die Spica der Jungfrau fast diametral gegenüber. Von den winterlichen Sternbildern sind nur noch die Zwillinge, der kleine und der grosse Hund am Abendhimmel sichtbar. Die lichtschwache Region des Krebses trennt sie von den eindrucksvollen Gruppen des Löwen und der Jungfrau.

2. *Planeten.* Von den Wandelsternen sind im April vier zu sehen. Merkur erscheint am 2. kurz nach 19 Uhr mit der Venus aus der Abenddämmerung. Während aber Merkur bald wieder der Sonne zueilt, wird Venus von Tag zu Tag heller als Abendstern. Mars geht schon um 22 Uhr mit den Zwillingen unter. Jupiter ist hellglänzender Morgenstern in der Region des Wassermanns. Am Morgen des 25. geht die abnehmende Mondsichel nahe am Jupiter vorbei.

Dr. J. Brun.

Krankenkasse des Kathol. Lehrervereins der Schweiz

Jahresrechnung pro 1937.

Einnahmen.

1. *Krankengeldversicherung:* 1. Klasse 89 Mitglieder, Prämien Fr. 606.—; 2. Klasse 41 Mitglieder, Prämien Fr. 563.20; 3. Klasse 212 Mitglieder, Prämien Fr. 5694.20; 4. Klasse 36 Mitglieder, Prämien Fr. 1303.60; 5. Kl. 45 Mitglieder, Prämien Fr. 2017.20. Total Fr. 10184.20. 2. *Krankenpflegeversicherung:* 255 Männer, Prämien Fr. 4042.80; 82 Frauen, Prämien Fr. 1321.40; 22 Kinder, Prämien Fr. 260.60. Total Fr. 5624.80. 3. *Rückstände des Vorjahres* Fr. 117.80. 4. *Vorausbezahlte Prämien pro 1938* Fr. 809.—. 5. *Bundesbeitragsvergütung durch Mitglieder* Fr. 88.50. 6. *Eintrittsgelder* Fr. 28.—. 7. *Bundesbeitrag* ordentlicher Fr. 2350.—; ausserordentlicher Fr. 273.05. Total Fr. 2623.05. 8. *Tuberkulose-Rückversicherung:* Guthaben pro 1936 Fr. 777.—; Prämienrückvergütung