

Beitrag zur Kegelschnittlehre

Autor(en): **Schwegler, Theodor**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **26 (1939)**

Heft 22

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-539395>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

des Schülers, leitet ihn auf das Vergessene hin und erspart die lange Frage: „Wie stellt sich Ruben zum Verkauf des Bruders?“

Ich erzähle. Da sehe ich, wie dem einen Kerlchen die Augen aufleuchten; es weiss schon, was ich sagen will. Warum soll ich da nicht abbrechen, auch mitten im Satze, und ihn ohne weiteres von dem Kleinen vollenden lassen, ohne erst noch eine Frage zu dreheln! Wie oft genügt ein Stimmeheben

am Schlusse eines Satzes, selbst wenn es kein Fragesatz ist, um die Kinder zum Fortfahren, zum Antworten zu bringen, ohne dass noch eine Frage darangeknüpft zu werden braucht.

Es ist eine alte pädagogische Weisheit: Die Schule ist die beste, wo die Schüler viel sprechen, der Lehrer aber wenig. Die Einschränkung der Frage muss das ihre dazu beitragen.
A. B.

Mittelschule

Beitrag zur Kegelschnittlehre

Gegeben sei die vollständige quadratische Gleichung in x und y :

$$f(x, y) \equiv a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0. \quad I.$$

Schon durch blosser Lösung von I auf y

$$y = \frac{1}{a_{22}} \left[-(a_{12} x + a_{23}) \pm \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) x^2 + 2(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) x + (a_{23}^2 - a_{22} a_{33})} \right]$$

gewinnt man die Bedingungen, unter denen $f(x, y) = 0$ einen reellen oder entarteten oder imaginären Kegelschnitt darstellt. Der Ausdruck $\delta \equiv a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ entscheidet über die Art der (reellen) Kegelschnitte. Mit einfachsten Mitteln ist es ferner möglich, bei Ellipse und Hyperbel die Mittelpunktskoordinaten (m, n) , den Winkel α der Achsendrehung und die Grösse der (Halb-)Achsen darzustellen. Zieht man ausserdem noch die Determinanten in dem Umfang heran, wie es in der von Erwin Voellmy (Basel) im Auftrag des Vereins schweiz. Mathematiklehrer herausgegebenen Logarithmen- und Zahlentafel geschieht (S. 156—158), so gestalten sich die Formeln ausserordentlich einfach.* Die Schwierigkeiten kommen erst bei der Parabel. Da hier $\delta = 0$, gibt es keine Mittelpunktsgleichung mehr; auch ist es nicht ohne weiteres ersichtlich, welcher der beiden Werte zu wählen ist, die sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

*) Wenn
$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \delta \equiv A_{33} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad A_{13} \equiv \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{23} \equiv \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix},$$

so ist
$$m = \frac{A_{13}}{A_{33}} \quad \text{und} \quad n = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

In der Normallage der Kurve lautet deren Gleichung:

$$S_1 \xi^2 + S_2 \eta^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

wobei S_1 und S_2 die Wurzeln der Gleichung

$$S^2 - (a_{11} + a_{22}) S + \delta = 0$$

sind. Von selbst kommt weiter:

$$a^2 = \frac{\Delta}{\delta S_1}; \quad b^2 = \frac{\Delta}{\delta S_2}; \quad \varepsilon^2 = \frac{S_2 - S_1}{S_2}; \quad \text{Fläche der Ellipse} = \frac{\pi \Delta}{\delta^{3/2}}.$$

ergeben. Im folgenden seien nun zwei leicht und sicher zu handhabende Verfahren gezeigt, um von der allgemeinen Form I zur Scheitelgleichung und zu den Koordinaten des Scheitelpunktes zu gelangen.

1. Nach Einführung der Determinanten-Schreibweise lautet die auf y gelöste Gleichung I nunmehr

$$y = \frac{1}{a_{22}} [-(a_{12}x + a_{23}) \pm \sqrt{2A_{13}x - A_{11}}].$$

Wird in diesem Ausdruck $a_{22} > 0$ angenommen (nötigen Falles durch Multiplikation der Gl. I mit (-1) leicht zu bewerkstelligen), so lassen sich zwei wichtige Folgerungen ziehen.

a) Je nachdem $a_{12} \cong 0$, verläuft die (Haupt-) Achse der Kurve von links $\left\{ \begin{array}{l} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right\}$ nach rechts $\left\{ \begin{array}{l} \text{unten} \\ \text{oben} \end{array} \right\}$. Dies gilt auch von Ellipse und Hyperbel.

b) Je nachdem $A_{13} \cong 0$, erstreckt sich die Kurve nach $\left\{ \begin{array}{l} \text{rechts} \\ \text{links} \end{array} \right\}$ ins Unendliche, — ist also offen nach $\left\{ \begin{array}{l} \text{rechts} \\ \text{links} \end{array} \right\}$.

Diese zwei Folgerungen dienen dazu, den Drehungswinkel α eindeutig zu bestimmen. Es ist demnach

$$\begin{aligned} 0^\circ < \alpha < 90^\circ, & \text{ wenn } a_{12} < 0 \text{ und } A_{13} > 0 \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ, & \text{ wenn } a_{12} > 0 \text{ und } A_{13} < 0 \\ 180^\circ < \alpha < 270^\circ, & \text{ wenn } a_{12} < 0 \text{ und } A_{13} < 0 \\ 270^\circ < \alpha < 360^\circ, & \text{ wenn } a_{12} > 0 \text{ und } A_{13} > 0 \end{aligned} \quad \text{II}$$

2. Durch die bekannte Transformation

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned}$$

geht Gl. I über in

$$f(\xi, \eta) \equiv a^{111} \xi^2 + 2a^{112} \xi \eta + a^{122} \eta^2 + 2a^{113} \xi + 2a^{123} \eta + a^{133} = 0, \quad \text{III}$$

wobei $a^{111} = a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \cos \alpha \sin \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha$

$$a^{122} = a_{11} \sin^2 \alpha - 2a_{12} \cos \alpha \sin \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha$$

$$a^{112} = 2a_{12} \cos 2\alpha - (a_{11} - a_{22}) \sin 2\alpha$$

$$a^{113} = a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha$$

$$a^{123} = -a_{13} \sin \alpha + a_{23} \cos \alpha$$

$$a^{133} = a_{33}.$$

Soll nun Gl. III eine Parabel von der Normalform

$$(\eta - b)^2 = 2p(\xi - a)$$

darstellen, so müssen die Koeffizienten a^{111} und a^{112} Null werden. Aus $a^{112} = 0$ folgt die für alle Kegelschnitte gültige Formel

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

$a^{111} = 0$ aber führt (unter Berücksichtigung der für die Parabel charakteristischen Gleichung $\delta = 0$) auf die Ausdrücke

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}. \quad \text{IV}$$

Hieraus kommt

$$\sin \alpha = \mp \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{22}^2}}; \quad \cos \alpha = \pm \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{22}^2}}.$$

Berücksichtigt man die Vorzeichen von a_{12} , $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ (letztere je nach den verschiedenen Quadranten), so erhält man leicht die Formeln*):

$$\left. \begin{aligned} a^{1_{22}} &= a_{11} \mp a_{22} \\ a^{1_{13}} &= \pm \frac{a_{13} a_{22} - a_{23} a_{12}}{\sqrt{a^2_{12} + a^2_{22}}} \\ a^{1_{23}} &= \pm \frac{a_{13} a_{12} + a_{23} a_{22}}{\sqrt{a^2_{12} + a^2_{22}}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} + \text{ im 1. und 4.} \\ - \text{ im 2. und 3. Quadranten.} \end{array} \quad \text{V}$$

Aus Gl. III erhalten wir nach einigen einfachen Umformungen

$$\left(\eta + \frac{a^{1_{23}}}{a^{1_{22}}} \right)^2 + 2 \frac{a^{1_{13}}}{a^{1_{22}}} \left(\xi + \frac{A^{1_{11}}}{2a^{1_{13}} a^{1_{22}}} \right) = 0. \quad \text{IIIa}$$

Der Parameter p ist somit $-a^{1_{13}} : a^{1_{22}}$, und die Koordinaten des Scheitelpunktes S sind

$$-\frac{A^{1_{11}}}{2a^{1_{13}} a^{1_{22}}}, \quad -\frac{a^{1_{23}}}{a^{1_{22}}}$$

Statt von der vollständigen quadratischen Gleichung $f(x, y) = 0$ kann man auch von der Normalform $(\eta - b)^2 = 2p(\xi - a)$ ausgehen, die durch Drehung des Achsenkreuzes um den Winkel $(-\alpha)$ in $f(x, y) = 0$ überzuführen ist. Der oben angegebenen Transformation entspricht in diesem Fall die neue

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \equiv \frac{sx + ry}{t} \\ \eta &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \equiv \frac{-rx + sy}{t} \end{aligned} \right\} \text{VI}$$

wenn $r = t \sin \alpha$, $s = t \cos \alpha$, $t = \sqrt{r^2 + s^2}$ (die Wurzel — wie bisher immer! — positiv genommen).

Durch diese Transformation geht die Normalform in folgende Gleichungen über (Vorzeichen bereits berücksichtigt, so dass nur die absoluten Werte für r und s einzusetzen sind):

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} r^2 x^2 - 2rsxy + s^2 y^2 \pm 2xt(rb - sp) \mp 2yt(sb + rp) + (b^2 + 2ap)t^2 = 0 \\ \quad \text{oberes Vorzeichen im 1., unteres im 3. Quadranten;} \\ r^2 x^2 + 2rsxy + s^2 y^2 \pm 2xt(rb + sp) \pm 2yt(sb - rp) + (b^2 + 2ap)t^2 = 0 \\ \quad \text{oberes Vorzeichen im 2., unteres im 4. Quadranten;} \\ a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0. \end{cases} \quad \text{VII}$$

Da sich nach den aufgestellten Regeln aus a_{11} , a_{12} und a_{22} die Grössen r , s und t bestimmen lassen (sowohl nach dem Wert wie nach dem Vorzeichen), so haben wir zur Berechnung von b und p (je nach dem Quadranten) die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} t(rb - sp) \text{ bzw. } t(rb + sp) &= \pm a_{13} \\ t(sb + rp) \text{ bzw. } t(sb - rp) &= \pm a_{23}. \end{aligned}$$

Die Abszisse a des Scheitelpunktes ergibt sich aus der Identität

$$(b^2 + 2ap)t^2 = a_{33}.$$

Diese zwei Verfahren sollen an zwei Beispielen erprobt und erläutert werden.

*) Die erste der drei Formeln ergäbe sich übrigens auch aus der sogen. S-Gleichung.

Beispiel 1.

$$f_1(x, y) = 25x^2 + 120xy + 144y^2 + 676x - 1014y + 5746 = 0.$$

Da $a_{12} = 60 > 0$ und $A_{13} = \begin{vmatrix} 60 & 144 \\ 338 & -507 \end{vmatrix} = -36 \cdot 13^3 < 0$, so gilt nach Formelgruppe II: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Ferner ist (nach Gl. IV)

$$\operatorname{tg} \alpha = -60/144 = -5/12,$$

$$\text{also } r=5, s=-12, t=13.$$

Erstes Verfahren. Nach den Formeln V ist

$$a_{122} = 169 = 13^2,$$

$$a_{113} = -\frac{338 \cdot 144 + 507 \cdot 60}{\sqrt{60^2 + 144^2}} = -\frac{169 \cdot 12(2 \cdot 12 + 3 \cdot 5)}{12\sqrt{5^2 + 12^2}} = -3 \cdot 13^2$$

$$a_{123} = -\frac{338 \cdot 60 - 507 \cdot 144}{\sqrt{60^2 + 144^2}} = -\frac{169 \cdot 12(2 \cdot 5 - 3 \cdot 12)}{12\sqrt{5^2 + 12^2}} = 2 \cdot 13^2.$$

Ausserdem ist (nach den Gleichungen III)

$$A_{111} = \begin{vmatrix} 169 & 2 \cdot 13^2 \\ 2 \cdot 13^2 & 5746 \end{vmatrix} = 13^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 34 \end{vmatrix} = 13^4 \cdot 30.$$

Die gesuchte Normalform der Parabel ist also

$$\left(\eta + \frac{2 \cdot 13^2}{13^2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3 \cdot 13^2}{13^2} \left(\xi - \frac{30 \cdot 13^4}{2 \cdot 3 \cdot (13^2)^2}\right) = 0,$$

oder vereinfacht

$$(\eta + 2)^2 = 6(\xi - 5).$$

Daraus wird

$$S(5, -2); p=3.$$

Zweites Verfahren. Nach Gl. VII ist

$$5b + 12p = \frac{338}{13} = 26$$

$$12b - 5p = -\frac{507}{13} = -39.$$

Durch Verwendung der Determinantenmethode kommt

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 12 \\ -39 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{vmatrix}} = -2 \text{ und } p = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 26 \\ 12 & -39 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{vmatrix}} = 3.$$

Aus $a_{33} = (b^2 + 2ap)t^2$ (siehe am Schluss der allgemeinen Ableitung) folgt

$$a = \frac{a_{33} - b^2 t^2}{2pt^2} = \frac{34 \cdot 13^2 - 4 \cdot 13^2}{2 \cdot 3 \cdot 13^2} = 5,$$

alles in Uebereinstimmung mit den oben gefundenen Werten.

Beispiel 2.

$$f_2(x, y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 115x - 70y + 275 = 0.$$

Der Gang der auszuführenden Rechnungen entspricht genau dem des ersten Beispiels. Es werden darum nur noch die notwendigsten Zahlen mitgeteilt.

Erstes Verfahren.

$$a_{122} = 25; a_{113} = -\frac{5^3}{2}; a_{123} = 5^2; A_{111} = 2 \cdot 5^5.$$

Die Parabel hat also die Normalform

$$\left(\eta + \frac{25}{25}\right)^2 - \frac{5^3}{5^2} \left(\xi + \frac{2 \cdot 5^5}{-5^3 \cdot 5^2}\right) = 0,$$

oder vereinfacht

$$(\eta + 1)^2 = 5(\xi - 2).$$

Daraus kommt: $S(2, -1)$; $p = 2^{1/2}$.

Zweites Verfahren.

Aus $4b - 3p = -11,5$

$$3b + 4p = 7$$

findet sich

$$b = \frac{\begin{vmatrix} -11,5 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -1; \quad p = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -11,5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = 2,5.$$

Schliesslich ist

$$a = \frac{275 - 25}{5 \cdot 25} = 2.$$

In Linien-Koordinaten, d. h. in der Form

$$F(u, v) = A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0$$

geschrieben, lauten, nach Weghebung gemeinsamer Faktoren, die Kurvengleichungen

$$F_1(u, v) = 1125u^2 - 2036uv + 58v^2 - 312u + 130v = 0,$$

$$F_2(u, v) = 8u^2 + 68uv + 7v^2 + 12u + 16v = 0.$$

Für die zur x-Achse parallele Tangente ist $u = 0$, also

im Falle F_1 : $58v^2 + 130v = 0$, oder $v_1 = 0$, $v_2 = -\frac{130}{58} = -\frac{65}{29}$.

Daraus kommt $y_0 = -1/v = \frac{29}{65} = 0,446$;

im Falle F_2 : $7v^2 + 16v = 0$, oder $v_1 = 0$, $v_2 = \frac{16}{7}$.

Mithin ist $y_0 = \frac{7}{16} = 0,4375$.

Die diesen Tiefstwerten (Minima) entsprechenden Abszissen sind $x = -14,59$ in der ersten und $x = 3,94$ in der zweiten Kurve. Zu den gleichen Ergebnissen wären wir auch gekommen, wenn wir die Gleichungen $f(x, y) = 0$ auf x gelöst hätten. Da $A_{33} = 0$, wird.

$$x = \frac{1}{a_{11}} \left[-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{2A_{23}y - A_{22}} \right].$$

Aus einer Skizze erkennt man sofort, dass der tiefste Punkt dort liegt, wo sich nur ein y -Wert für die zur x-Achse parallele Gerade errechnet. Der Wurzelausdruck muss also Null werden. Der Grenzwert der Auswertung liegt somit bei $y_i = A_{22} : 2A_{23}$.

Für f_1 ergibt sich $y = \frac{2 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 13^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13^3} = \frac{29}{65}$,

für f_2 analog $y = \frac{7/4 \cdot 5^4}{2 \cdot 2 \cdot 5^4} = \frac{7}{16}$.

Ganz gleich wäre die zur y-Achse parallele Tangente zu behandeln.

Dem Wertpaar $u = 0$, $v = 0$ entspricht die Tangente im unendlich fernen Punkt, d. h. im andern „Scheitelpunkt“.

Einsiedeln.

Dr. P. Theodor Schwegler.