Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 30 (1943)
Heft: 22

Artikel: Beiträge zur Analytischen Geometrie des Dreiecks [Fortsetzung]
Autor: Schwegler, Theodor
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-542097

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Mittelschule

Beiträge zur Analytischen Geometrie des Dreiecks*

3) Nach dem zweiten Satze von Guldin ist die Oberfläche eines Drehkörpers gleich dem Produkt aus dem rotierenden Umfang und dem Weg des Schwerpunktes dieses Umfanges. Der Schwerpunkt des Umfanges eines Dreieckes ist zugleich Inkreiszentrum des Dreiecks der Seitenmitten des ursprünglichen Dreiecks. Für das Inkreiszentrum eines Dreiecks findet der Schüler an Hand des Lehrers unschwer die Formel

$$I = \frac{a \cdot P_1 + b \cdot P_2 + c \cdot P_3}{a + b + c}$$

Daraus bekommt er für das Dreieck der Seitenmitten, durch selbstverständlichen Ersatz der Koordinatenwerte, das Inkreiszentrum

$$K = \frac{a(P_2 + P_3) + b(P_3 + P_1) + c(P_1 + P_2)}{2(a + b + c)}$$

Dieser Ausdruck gibt aber auch — mittels der allgemeinen Schwerpunktsformel von Nr. 1 direkt nachweisbar — den Schwerpunkt des Dreieckumfanges a, b, c. Man kann sich mühelos davon überzeugen, indem man das ursprüngliche Dreieck um die x- oder y-Achse dreht und die von den Seiten a, b, c beschriebenen Kegelstumpfmäntel auf den analytischen Ausdruck bringt:

$$2\pi x(a + b + c) = 2\pi \left[\frac{a(x_2 + x_3)}{2} + \frac{b(x_3 + x_1)}{2} + \frac{c(x_1 + x_2)}{2}\right]$$

Die grosse praktische Schwierigkeit sowohl für I wie für K besteht darin, dass man in der Regel mit irrationalen Zahlen zu rechnen hat; denn bei rationaler Wahl der Ecken oder Seiten sind allgemein die Seitenlängen oder Eckenkoordinaten irrational. Wollte man das vermeiden, so müsste man sog. Heron'sche Dreiecke wählen und deren Grundlinien erst noch parallel zu einer der beiden Achsen laufen lassen.

Ein anderes Verfahren, das Inkreiszentrum eines Dreieckes zu bestimmen, bedient sich der Winkelhalbierenden. Das Inkreiszentrum I ist Schnittpunkt der Halbierenden w_i der Innenwinkel; die beiden Halbierenden w_i' und w_{i+1}' zweier Aussenwinkel schneiden sich im Ankreiszentrum I_{i-1}. Nun findet man die Winkelhalbierenden der Dreiecksseiten a und b bekanntlich dadurch, dass man die auf die Hesse'sche Normalform gebrachten Gleichungen von a und b addiert bzw. subtrahiert. Um dies den Schülern gleichsam handgreiflich zu zeigen, bringt man die aus

$$x \cdot \cos\varphi_1 + y \cdot \sin\varphi_1 - p_1 = 0 \text{ und } x \cdot \cos\varphi_2 + y \cdot \sin\varphi_2 - p_2 = 0$$

abgeleiteten Summen und Differenzen auf die Form:

$$L_3 = 2 \cdot \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\left[x \cdot \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \cdot \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{p_1 + p_2}{2\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}\right] = 0$$

$$L_3' = 2 \cdot \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\left[-x \cdot \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \cdot \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{p_1 - p_2}{2\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}\right] = 0$$

---

* siehe Nr. 21.

Der Richtungswinkel der Normalen auf L_3 ist also gleich dem arithmetischen Mittel der Richtungswinkel der Normalen auf die Geraden a und b, wogegen sich der Richtungswinkel der Normalen auf L_3' davon um 90^0 unterscheidet. L_3 und L_3' halbieren somit die von den Seiten a und b gebildeten Winkel. Ob aber L_3 oder L_3' den an P_3 gelegenen Innen- oder Aussenwinkel des Dreieckes $P_1P_2P_3$ halbiert, bedarf noch einer nähern Untersuchung. Wenn der Nullpunkt des Achsenkreuzes im Innern des Dreieckes $P_1P_2P_3$ liegt, so vergewissert man sich leicht, dass L_i' die Innenwinkel, L_i die Aussenwinkel des Dreiecks halbieren. Liegt dagegen der Nullpunkt ausserhalb und müsste z. B. nur die Seite b verschoben werden, damit der Nullpunkt ins Innere des Dreiecks zu liegen käme, so werden die Innenwinkel α und γ von L_1 und L_3, nicht aber von L_1' und L_3' halbiert. Im allgemeinen wird indessen auch dieses Verfahren nicht gerade bequem sein, weil irrationale Zahlen miteinander zu multiplizieren sind.

Um das Inkreiszentrum und die Ankreiszentren eines Dreieckes zu bestimmen, gibt es noch ein drittes Verfahren, das ganz der letzten Lösung des Umkreisproblems entspricht. Wir betrachten die Dreieckseiten als Tangenten an die Kreise mit den Radien ϱ bzw. ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Bei nicht zu spezieller Lage des Dreiecks können die Gleichungen der drei Seiten auf die Form $ux + vy + 1 = 0$ gebracht werden. Diese Gleichung ist dualistisch. Werden x, y festgehalten, so stellt sie — das wird in der Schule wohl weniger behandelt und hat für das Folgende keine grosse Bedeutung — den Punkt P(x, y) als Träger eines Geradenbüschels dar; bei festen Werten u, v definiert sie dagegen eine Gerade mit den Achsenabschnitten $-1:u$ und $-1:v$ als Träger der Punktfolge x, y. Bringen wir nun die Gleichungen auf die Hesse'sche Normalform und ersetzen wir x, y durch die Koordinaten ξ, η von l bzw. l_i, so ist

$$u_i \cdot \xi + v_i \cdot \eta \pm \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \cdot \varrho_{(i)} + 1 = 0$$

Ziehen wir noch die allgemeine Abstandsformel

$$u \cdot \xi + v \cdot \eta + 1 \pm \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \varrho = 0$$

heran, so erhalten wir für jedes Zentrum ein System von vier gleichgebauten Gleichungen mit den Unbekannten ξ, η und ϱ bzw. ϱ_i, geradeso wie bei der dritten Lösung der Umkreisaufgabe. Wir verfahren nun weiterhin ganz gleich wie dort. Freilich geht es auch hier nicht immer ohne irrationale Werte ab, denn

$$\sqrt{u_i^2 + v_i^2}$$

ist nur ausnahmsweise rational. Da aber diese Werte mit rationalen und zumeist einfachen Zahlen zu multiplizieren sind, so dürfte für einen, der mit Determinanten gut umzugehen weiss, dieses dritte Verfahren am bequemsten sein, wenngleich es grosse Vorsicht erfordert bei der Wahl der Vorzeichen von ϱ bzw. ϱ_i.

4) Von Zahlenbeispielen muss raumeshalber abgesehen werden. Wer gerne mit rationalen Koeffizienten rechnet, mag folgendes Dreieck wählen.

$$\begin{aligned} a &\equiv 24x + 10y + 120 = 0 \\ b &\equiv 8x - 15y - 120 = 0 \\ c &\equiv 3x + 4y - 120 = 0 \end{aligned}$$

Bei diesem Dreieck liegt der Koordinatenanfangspunkt im Innern. Wird die zweite Seite durch $b = 8x - 15y + 120 = 0$ ersetzt, so entsteht ein Dreieck, das den Ursprung nicht umschliesst. Leider führen beide Fälle auf ganz phantastische Zahlen, wie sie in der Schule mit Recht verpönt sind.

Zur Uebung der Determinantenrechnung wäre es wohl wertvoller, folgenden Satz zu beweisen: Wird das Dreieck $P_1\ P_2\ P_3$ mit der Fläche F durch den im Innern gelegenen Punkt $P(x, y)$ in die drei Teildreiecke $P\ P_2\ P_3 = F_1$, $P\ P_3\ P_1 = F_2$, $P\ P_1\ P_2 = F_3$ zerlegt, so gilt (unter Benutzung der mehrfach gebrauchten Schreibweise) die Beziehung:

$$P \cdot F = P_1\ F_1 + P_2\ F_2 + P_3\ F_3,$$

also auch die besondere Beziehung:

$$x \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Liegt P im Schwerpunkt, so ist $F_1 = F_2 = F_3 = {}^1/_3\,F$. Darum bekommt man wie oben: $3\,S = P_1 + P_2 + P_3$. Beim umschriebenen Kreis sind die Winkel im Zentrum 2α, 2β, 2γ. Es wird daher $2\,F_1 = r^2 \sin 2\alpha$ usw. Da überdies $F = 2\,r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, so ergibt sich $U = P_1 \sin 2\alpha + P_2 \sin 2\beta + P_3 \sin 2\gamma$. Durch I wird das Dreieck aufgeteilt in $2\,F_1 = a\varrho$ . . . Weiter ist $2\,F = (a + b + c)\,\varrho$. Somit ist $I\,(a + b + c) = a\,P_1 + b\,P_2 + c\,P_3$. Der angeführte Satz lässt sich auch für Punkte deuten, die ausserhalb des Dreiecks liegen. Es treten dann aber z. T. negative Zeichen auf. Unschwer zeigt sich, dass z. B. $I_1\,(-a + b + c) = -a\,P_1 + b\,P_2 + c\,P_3$.

Einsiedeln. *Dr. P. Theodor Schwegler.*

Lehrerin und weibliche Erziehung

Generalversammlung der Sektion „Luzernbiet" VKLS.

Donnerstag, den 24. Februar, fanden sich die Lehrerinnen der Sektion „Luzernbiet", darunter auch eine grosse Zahl ehrw. Lehrschwestern, zur ordentlichen Generalversammlung im Hotel Union, Luzern, zusammen.

Die Präsidentin, Frl. Rosa Naef, Sekundarlehrerin in Malters, hatte die Ehre, unter den Gästen den Erziehungsdirektor, Herrn Ständerat Dr. Egli, Herrn Sekundarlehrer Obrist, Präsident der Sektion Luzern des VKLS, Reussbühl, die Präsidentin des Kath. Frauenbundes, Frau Grossrat Hügli, Horw, und die Schriftstellerin Frl. Agnes von Segesser, Luzern, begrüssen zu dürfen.

Die Präsidentin orientierte in einem ausführlichen Jahresbericht über den Bestand und die Tätigkeit des Vereins, wobei besonders die Pfingstmontag-Versammlung des Kath. Lehrervereins, die 8. grosse Erziehungstagung in Luzern, die Exerzitien und der Einkehrtag und die Wallfahrt nach Sachseln hervorgehoben wurden. Auch die bestehenden Institutionen des Vereins, die Invaliditäts- und Alterskasse, die Kranken und Hilfskasse, die „Schweizer Schule" und der Schülerkalender „Mein Freund" wurden in empfehlende Erinnerung gebracht. Für das kommende Vereinsjahr wurden alle diese Tätigkeitsgebiete wieder neu ins Arbeitsprogramm eingesetzt, und die Kolleginnen zu treuer Mitarbeit ermuntert. Die geschäftlichen Traktanden wickelten sich in rascher Folge ab. Nach einem freundlichen Begrüssungsworte der neuen Kantonalpräsidentin des Kath. Frauenbundes, Frau Hügli, Horw, an die Lehrerinnen, die besonders die gemeinsamen idealen Arbeitsziele unterstrichen, und nach einer orientierenden Einführung über den Stand des heutigen Haushaltungsschulwesens durch Frl. J. Annen, Sekretärin des Kath. Frauenbundes, erfreute Frl. Dr. Egli, Luzern, mit ihrem flotten Referat über „Di alte Balbeler". Frl. Dr. Egli verstand es, aus der Person, dem Wirken und besonders dem Schrifttum des Pfarrers X. Herzog ein träfes Bild jener kämpferischen Sonderbundszeit zu zeichnen. Die vorzügliche Arbeit, belegt mit köstlichen Schriftproben aus den Werken des Dichters, brachte eine genussreiche Stunde und gereicht der jugendlichen Referentin zu hoher Ehre. Sie mag auch beitragen, dass der schweiz. „Alban Stolz" vermehrt gelesen wird.

Nach einem Stündchen geselligen Beisammenseins, das der Pflege der Kollegialität gewidmet war, trennten sich die Kolleginnen, um mit wiedergeweckter Freude zur lieben Berufsarbeit zurückzukehren. M F.