Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 33 (1946)
Heft: 3

Artikel: Kleine Beiträge zur Kombinatorik
Autor: Schwegler, Theodor
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-527959

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Verfassers selber verneigte: an der entscheidenden Sitzung beschloss man grossmehrheitlich — mit 12½ gegen 2½ Stimmen —, beim bewährten Alten zu bleiben. Sieg und Niederlage waren also eindeutig.

L. R.

Mittelschule

Kleine Beiträge zur Kombinatorik

I. Die Formeln, die in der Kombinatorik zumeist gebraucht werden, werden aus der lexikographischen Art, nach der die Permutationen, Variationen und Kombinationen gebildet werden, verhältnismässig leicht und durchsichtig abgeleitet. Nur die Zahl der Kombinationen mit Wiederholung scheint mit grösserer Schwierigkeit gewonnen werden zu können. In dem interessanten Buche «Vom Einmaleins bis zum Integral» (Deutsche Buchgemeinschaft, Berlin, 1934), in dem der Verfasser, Egm. Colerus, es im allg. glücklich versteht, dem Nichtmathematiker den Schrecken vor gewissen mathematischen Rechenverfahren, Algorithmen genannt, zu nehmen, steht S. 62 der Satz: «Die Ableitung der Formel, die uns die Zahl solcher Kombinationsmöglichkeiten (mit Wiederholung) angibt, ist schwierig und langwierig; wir wollen bloss das Ergebnis anführen». Sieht man die üblichen Lehrbücher der Algebra ein, z. B. Senn-Wildhaber-Gyr (Einsiedeln, 1916; S. 133) oder Stohler, 3. Teil (Unterrichtswerk des Vereins schweiz. Mathematiklehrer; S. 78), so scheint jener Colerus recht zu haben.

Gleichwohl gibt es einen leicht gangbaren Weg, zur genannten Formel zu kommen, besonders wenn die Summenformeln für die ersten, zweiten und dritten Potenzen, wie Stohler (S. 39) tut, ebenfalls behandelt werden. Die Summenzahlen, die sich bei den Kombinationen mit Wiederholung ergeben, sind nämlich sog. figurierte Zahlen: Dreiecks-, Pyramiden- und Pyramiden-Reihen-Zahlen, die aus der natürlichen Zahlenfolge unmittelbar gewonnen werden können.

Die nachfolgende Ableitung umfasst drei Stufen.

1. Aus der natürlichen Zahlenreihe bilden wir vorerst die aufeinanderfolgenden höhern Reihen.

1. Reihe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	... $\binom{n}{1}$
2. Reihe:	1	3	6	10	15	21	28	36	45	54	... $\binom{n}{2}$
3. Reihe:	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	... $\binom{n}{3}$
4. Reihe:	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	... $\binom{n}{4}$

usw.

Zu diesen Reihen bemerken wir:

a) Ihr Bildungsgesetz zeigt, dass etwa das 5. Glied der 2. Reihe gleich der Summe der 5 ersten Glieder der 1. Reihe ist, das 5. Glied der 3. Reihe die Summe der 5 ersten Glieder der 2. Reihe usw. ist; allgemein: Das r^{te} Glied der p^{ten} Reihe ist die Summe der r ersten Glieder der $(p-1)^{ten}$ Reihe.

b) Für das allgemeine Glied, von der Form der von n an steigenden geteilten Faktoriellen von der p^{ten} Klasse brauchen wir, statt des bisher üblichen Symbols $\binom{n+p-1}{p}$, das Symbol $\left[\begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix}\right]$, und lesen «n tief p», indem wir den Ausdruck «n über p» für die fallende, geteilte Faktorielle, also für $\binom{n}{p}$, vorbehalten.

c) Für die 1. und 2. Reihe leuchtet die Richtigkeit dieser Formel ohne weiteres ein. Um deren Richtigkeit auch für die 3., 4. und weitern Reihen nachzuweisen, benutzt man die Summenformeln für die Quadratzahlen, Kuben usw.

Für die 3. Reihe gilt offenbar:

$$\sum_1^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_1^n (k^2 + k) = \frac{1}{12} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4} \cdot n(n+1)$$

$$= \frac{1}{12} n(n+1)(2n+1+3 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2) \equiv \left[\begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$$

Entsprechend erhält man für die 4. Reihe:

$$\sum_1^n \frac{k(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^n (k^3 + 3k^2 + 2k) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot n(n+1)(2n+1) + n(n+1) \right]$$

$$= \frac{1}{24} \cdot n(n+1)(n^2+5n+6) = \frac{1}{24} \cdot n(n+1)(n+2)(n+3) \equiv \left[\begin{smallmatrix} n \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$$

Aus der Summenformel für die Biquadrate, die man analog den Summenformeln für die Quadrate und Kuben erhält, würde man für die 5. Reihe das allgemeine Glied $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ bekommen.

2. Dass die 2. Reihe die sog. Dreieckszahlen liefert, ist ohne weiteres ersichtlich. Betrachten wir eine Seite des Dreiecks als 1. Zeile mit n Gliedern (Elementen, z. B. Kugeln), so enthält die 2. Zeile noch (n — 1) Glieder, die 3. Zeile (n — 2) Glieder, die letzte Zeile noch 1 Glied.

Die 3. Reihe liefert dann die Summe der Dreiecke, von denen jedes folgende eine Zeile weniger hat als das vorangehende; werden die Dreiecke als Schichten übereinander gelegt, so bilden sie eine dreiseitige Pyramide oder ein Tetraeder.

Die 4. Reihe endlich liefert eine Reihe solcher Pyramiden, von denen jede folgende eine Schicht weniger hat als die vorangehende. — Geometrisch gesehen, lässt sich dieses Verfahren weitersetzen, nur werden die Gebilde immer unübersichtlicher.

3. Dass diese Verhältnisse bei der Kombination mit Wiederholung vorliegen, lässt sich leicht zeigen. Der Einfachheit halber wählen wir die 5 Elemente a, b, c, d, e und bilden die Amben und Ternen.

Die Amben sind offenbar:

aa				
ab	bb			
ac	bc	cc		
ad	bd	cd	dd	
ae	be	ce	de	ee

Das Ergebnis ist: 5 Zeilen, von denen jede folgende ein Glied weniger hat als die vorangehende. Diese Zeilen geben ein Dreieck; es liegt die 2. Reihe vor; die Zahl der Amben ist also die entsprechende Dreieckszahl, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$

Die Ternen sind dann:

aaa
aab abb
aac abc acc
aad abd acd add
aae abe ace ade aee
(Ein Dreieck, unterste vollzählige Schicht)

bbb
bbc bcc
bbd bcd bdd
bbe bce bde bee
(Ein Dreieck, aber mit 1 Zeile weniger, 2. Schicht)

ccc
ccd cdd
cce cde cee
(Ein Dreieck, wieder eine Zeile weniger)

ddd
dde dee
(Ein Dreieck, wieder eine Zeile weniger)

eee
(Oberste Schicht)

Die als Schichten übereinander gelegten Dreiecke geben nun offenbar als figurierte Zahl die Pyramidenzahl: Die Anzahl der Ternen die entsprechende Zahl der 3. Reihe oder die entsprechende Pyramidenzahl, also $\left[\begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix}\right]$.

Die mit a beginnenden Quaternen würden dann die erste Pyramide einer Reihe liefern; die Pyramide der b-Quaternen enthielte eine Schicht weniger als die vorige, die Pyramide der c-Quaternen wieder eine Schicht weniger als die zweite Pyramide usw. Die Summe ist dann, wie oben gezeigt wurde, gleich der 4. Reihe oder $\left[\begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix}\right]$. Die Fortsetzung dieses Verfahrens würde die Summenformeln für die höhern Klassen der Kombinationen mit Wiederholung liefern.

Werden bei den (arithmetischen) Reihen auch die höhern Reihen, wenigstens jene, die sich aus der natürlichen Zahlenreihe ohne weiteres ergeben, behandelt und werden die erhaltenen Summenformeln geometrisch gedeutet oder, w. d. i., als figurierte Zahlen definiert, so bleibt vom obigen Ableitungs- und Beweisverfahren nur die dritte Stufe.

4. Anhangsweise sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass aus der 3. Reihe oder aus den sog. Pyramidenzahlen unmittelbar die Summenformel für die Quadratzahlen gewonnen werden kann.

Eine n-Dreieckzahl (d. h. eine mit n Gliedern in der 1. Zeile) wird durch die vorangehende Dreieckszahl zur n-Quadratzahl ergänzt, denn die beiden Dreiecke geben zusammen einen dem Quadrat gleichwertigen Rhombus. Werden die beiden Dreiecke als unterste Schicht je einer Pyramide betrachtet, so ergänzen sich die gleich hoch gelegenen Schichtdreiecke ebenfalls zu je einem Quadrate. Die beiden dreiseitigen Pyramiden, zur Doppelpyramide zusammengesetzt, geben dann die gleichwertige einfache Pyramide der n ersten Quadratzahlen. Also

$$\left[\begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix}\right] + \left[\frac{n-1}{3}\right] = \frac{n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lässt sich für die 3. und die höhern Potenzzahlen nur das sonst auch für die Quadratzahlen übliche Verfahren anwenden (Stohler, 3. Teil, S. 39), so hat die vorige Ableitung wenigstens den Vorteil, dass sie unmittelbar eine geometrische und damit leicht verständliche Deutung zulässt.

In einer weitern Anwendung der Summenbildung der Kombinationen mit Wiederholung besteht auch die Antwort auf die Frage: wie oft ein gegebenes Wort oder eine

Wortverbindung in der folgenden quadratischen Anordnung, im sog. Hexenquadrat, gelesen werden könne?

O 11	t 12	t 13	o 14	W 15	a 16	l 17	t 18
t 21	t 22	o 23	W 24	a 25	l 26	t 27	e 28
t 31	o 32	W 33	a 34	l 35	t 36	e 37	r 38
o 41	W 42	a 43	l 44	t 45	e 46	r 47	O 48
W 51	a 52	l 53	t 54	e 55	r 56	O 57	l 58
a 61	l 62	t 63	e 64	r 65	O 66	l 67	t 68
l 71	t 72	e 73	r 74	O 75	l 76	t 77	e 78
t 81	e 82	r 83	O 84	l 85	t 86	e 87	n 88

Die erste Zeile und die letzte Kolonne ergeben eine Möglichkeit. Die Elemente 11—17 der ersten Zeile, verbunden mit den zwei letzten Kolonnen (27—87 und 28—88) ergeben 7 Möglichkeiten. Die Elemente 11—16 der ersten Zeile verbunden mit den drei letzten Kolonnen (26—86, 27—87 und 28—88) ergeben

$7+6+5+4+3+2+1 \equiv \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ Möglichkeiten. Aehnlich ergeben die Elemente 11—15 der ersten Zeile mit den Kolonnen 25—85, 26—86, 27—87, 28—88 die folgenden Möglichkeiten:

$28+21+15+10+6+3+1 \equiv \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Das Gesetz der Summenbildung ist damit aufgehellt. Die Anzahl aller möglichen Lesungen ist:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = 3432.$$

II. Bekanntlich lässt sich jedes Wort als eine bestimmte Variation (mit Wiederholung) der Zahl der Elemente oder Buchstaben des Alphabetes der betreffenden Sprache auffassen. Die unter Umständen praktische Frage ist also: Wie kann durch eine bestimmte Zahl ein gegebenes Wort als Variation eines bestimmten Alphabetes eindeutig wiedergegeben werden?

Wie da vorzugehen ist, zeigt der Aufbau unseres dekadischen Zahlensystems, worin die einzelne Ziffer einen sog. Stellenwert hat nach den steigenden Potenzen der Grundzahl 10. Die Elemente, die (mit Wiederholung) variiert werden, sind die Ziffern von 0—9. Werden, abweichend von der Praxis des Alltags, die fehlenden höhern Rangzahlen ebenfalls durch vorangesetzte Nullen bezeichnet, so liefern diese 10 Ziffern als Unionen 10 einziffrige Zahlen, als Amben 100 ($=10^2$) zweiziffrige Zahlen, als Ternen 1000 ($=10^3$) dreiziffrige Zahlen, usw. Greifen wir eine beliebige Terne heraus: z.B. $837 = 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$, so zeigt dieses Beispiel handgreiflich, dass

1. die Potenzen immer um 1 niedriger sind als die betreffende Stelle der hinten beginnenden Reihenfolge, und

2. die Koeffizienten (ausgenommen der letzte) ebenfalls um 1 kleiner sind, als der Stelle in der Ziffernfolge 0—9 entspricht.

Diese zwei Beobachtungen weisen den Weg, irgend eine Lautverbindung als Variation (mit Wiederholung) eines bestimmten Alphabetes durch eine Zahl darzustellen. Der Einfachheit halber sei ein Alphabet mit 25 Buchstaben gewählt; im Deutschen

werde also «I» von «J» nicht unterschieden. Der «Ziffern»-wert der einzelnen Buchstaben ist somit:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Die Stellen-Werte dagegen:

$25^2 = 625$
$25^3 = 15625$
$25^4 = 390625$
$25^5 = 9 \cdot 765625$
$25^6 = 244 \cdot 140625$
$25^7 = 6103 \cdot 515625$
$25^8 = 152587 \cdot 890625$
$25^9 = 3 \cdot\cdot 814697 \cdot 265625$
$25^{10} = 95 \cdot\cdot 367431 \cdot 640625$
$25^{11} = 2384 \cdot\cdot 185791 \cdot 015625$ usw.

Als Variation mit Wiederholung wäre demnach z. B.

«Uri» $= 19 \cdot 25^2 + 16 \cdot 25 + 9 =$ 12284

«Schwyz» $= 17 \cdot 25^5 + 2 \cdot 25^4 + 7 \cdot 25^3 + 21 \cdot 25^2 + 24 \cdot 25 + 25 =$ 166 · 920000

Diese Art der Umschreibung ist gewiss umständlich, und längern Wörtern würden wahre Zahlenungeheuer entsprechen. Immerhin wäre dies ein mathematisch sicherer Weg zu einer Art Geheimschrift.

Das hier eingeschlagene Verfahren, eine bestimmte Variation aus einer gegebenen Anzahl von Elementen zahlenmässig auszudrücken, lässt sich natürlich auch auf das Permutieren und Kombinieren mit oder ohne Wiederholungen umgestalten und anwenden. So wird z. B. «Heidelberg» in folgender Weise in «Geld herbei» übergeführt:

$g = 9 \cdot \frac{9!}{3!} =$	544320
$e = 1 \cdot \frac{8!}{3!} =$	6720
$l = 5 \cdot \frac{7!}{2!} =$	12600
$d = 3 \cdot \frac{6!}{2!} =$	1080
$h = 0 \cdot \frac{5!}{2!} =$	0
Uebertrag	564720

Uebertrag	564720
$e = 1 \cdot \frac{4!}{2!} =$	12
$r = 8 \cdot 3! =$	48
$b = 6 \cdot 2! =$	12
$ei = 1 \cdot 1! =$	1
	564793

Einsiedeln. Dr. P. Theodor Schwegler O. S. B.

Umschau

Unsere Toten

† Lehrer Hans Fürer, Gossau

So, mitten aus dem Leben heraus gerissen werden, wie es bei Lehrer Hans Fürer geschah, lässt alle die Nichtigkeit des Irdischen bewusst werden. Am Morgen des 13. Mai besuchte er noch wohlgemut die Schule, ging abends früher als sonst zu Bette, weil die Frau an einer Hochzeitsfeier auswärts war, und die Tochter die neue Wohnung fertig einrichten wollte, die sie am Samstag als Braut zu beziehen gedachte. Als diese heimkehrte, fiel ihr das Lichtlein im Zimmer des Vaters auf. Sie eilte ihm Gutnacht zu sagen, und traf ihn liegend, noch über ein Buch geneigt: «Dem bitteren