

Ein anderer Weg zur Volumenberechnung : zur Geometrie für die 3. Klasse Sekundarschule

Autor(en): **Pfister, Friedrich**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **38 (1951)**

Heft 14: **Johann Michael Sailer ; Fröhliches Trennen**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-532748>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Als Zahlungsmittel benützen wir entweder Spielgeld oder lassen selbst Geldscheine anfertigen.

Die Einzahlungsscheine aber sollen echt sein.

Es läßt sich nun ein reger Geschäftsverkehr durchführen. Die Rollenträger der Schuldner machen bei Konto-Inhabern Bestellungen aller Art. Diese stellen ihnen Rechnungen aus (Transport, Porto, Verpackung, Wust usw. mitberechnen!).

Die Schuldner zahlen an der Post mit E-

Scheinen. Der Posthalter nimmt sie nur an, wenn sie richtig ausgefüllt sind. Er leitet sie an die Checkämter weiter, diese an die Konto-Inhaber. Die Konto-Inhaber fertigen Zahlungsanweisungen, Rückzüge, Selbsteinlagen, die Checkämter melden die Gutschriften an die Konto-Inhaber.

Auf diese Weise erhalten wir eine geradezu verwirrende Fülle von Übungsmöglichkeiten. Selbst Bar-Quittung, Schuldschein, Mahnung, Bürgschaft, Postanweisung usw. lassen sich einbeziehen.

EIN ANDERER WEG ZUR VOLUMENBERECHNUNG

Zur Geometrie für die 3. Klasse Sekundarschule

Von Friedrich Pfister

Im Geometrieunterricht der Sekundarschule wird der Schüler mit den geometrischen Körpern vertraut gemacht. Er muß diese nicht nur kennenlernen, sondern sie auch konstruieren, berechnen, flächenhaft und körperlich darstellen können.

Hier sei nur einmal die Körperberechnung herausgegriffen, und zwar nur die Berechnung des Volumens eines geometrischen Körpers.

Verschiedene Wege können da zum Ziele führen. Damit, daß dem Schüler Formeln vorgelegt werden, die zu verwenden er verstehen lernen soll, ist es aber nicht getan. Natürlich muß der Schüler auch nach vorgelegten Formeln Berechnungen ausführen können. Der Berufsmann rechnet ja vielfach nur nach Formeln, deren Anwendung er sich in vielen Übungen zu eigen macht. Bildend aber ist diese Art von Unterricht aber gewiß nicht, denn sie ist zu oberflächlich, obwohl sie bestimmt einen Zweck erfüllt: Sie befähigt den Schüler tatsächlich, Körper berechnen zu können. Extrem wäre es andererseits, wollte man von jedem Schüler verlangen, daß er jede Volumformel selbst ableite. Bestimmt ist aber auf die Formelableitung Wert zu legen. Formelableiten ist Denkschulung, Formeleinsetzen Praxis; das

erste müssen wir pflegen, auf das zweite müssen wir hinarbeiten.

Voraussetzung für die Volumenberechnung geometrischer Körper ist, daß der Schüler weiß: Die Körper sind dreidimensional. Drei Ausdehnungen ergeben drei Maße für die Berechnung. Wir wiederholen und ergänzen:

1. Der Punkt hat keine Ausdehnung und kann deshalb auch nicht berechnet werden.
2. Die Linie hat eine Ausdehnung, die Länge. Diese kann man messen.
3. Die Fläche hat zwei Ausdehnungen, Länge und Breite. Man kann sie berechnen nach der Grundformel $F = l \cdot b$.
4. Der Körper hat drei Ausdehnungen, Länge, Breite und Höhe. Die Grundformel zur Berechnung muß lauten $V = l \cdot b \cdot h$.

Hier können wir nun anschließen und dann versuchen, in mehr oder weniger glücklicher Reihenfolge die nicht prismatischen Körper anzuschließen.

Hier sei nun einmal ein anderer Weg vorgeschlagen, der fruchtbarer zu sein scheint, obwohl sich letzterer durchaus bewährt hat. Wir wollen von einer Formel ausgehen, deren Richtigkeit der Schüler erst allmählich zu erfassen hat. Wir nehmen die Prismatoid-

formel als Grundformel für alle Volumenberechnungen.

$$V = \frac{h}{6} (G + D + 4M)$$

G sei die Grundfläche, D die Deckfläche, M die Mittelfläche und h die Höhe des gegebenen Körpers.

Der Würfel:

Durch Betrachten erkennen wir:

G und D und M sind gleich groß. Alles sind Quadrate mit der Seite s . h ist auch gleich s .

$$\text{also } V = \frac{h}{6} (G + D + 4M) = \frac{s}{6} (s^2 + s^2 + 4s^2)$$

$$\text{oder } V = \frac{s}{6} \cdot 6s^2 = \frac{s \cdot 6s^2}{6} = s \cdot s^2 = s^3$$

$$V = s^3 \text{ (} s \text{ hoch 3, also } s \cdot s \cdot s \text{)}$$

Dabei können wir algebraische Gesetze repetieren, wenn schon Algebra unterrichtet worden ist, oder wir können hier in unmittelbarer Weise einige algebraische Gesetze vermitteln:

Addition gleicher Ausdrücke.

Multiplikation eines Bruches mit einem Ausdruck.

Kürzen der Brüche.

Multiplikation von Potenzen.

Vielleicht vermutet jemand, daß dies alles viel zu weit gehe. Dem ist aber durchaus nicht so. Wir werden später wesentlich Zeit gewinnen, wenn wir hier etwas in die Breite gehen. Übrigens wird die hier unmittelbar vermittelte Algebra viel besser aufgenommen als die in der Algebra stunde mittelbar vermittelte.

Das Quadratprisma:

Der Schüler kann selbst feststellen:

G und D und M sind gleich groß. Wieder sind es Quadrate mit der Seite s .

$$\text{also } V = \frac{h}{6} (s^2 + s^2 + 4s^2) = \frac{h}{6} \cdot 6s^2 = h \cdot s^2 \text{ oder } s^2 \cdot h$$

Wir repetieren:

$$\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 5 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 5}{3} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 20$$

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 5 = 7 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \text{ etc.}$$

Und erweitern:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \text{ und } \frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{a \cdot b \cdot d}{b} = a \cdot d$$

$$x \cdot 2 \cdot z = z \cdot x \cdot 2 = 2 \cdot x \cdot z$$

Das Rechteckprisma:

$G = D = M$ alles sind Rechtecke $l \cdot b$.

$$\text{also } V = \frac{h}{6} (lb + lb + 4 \cdot lb) = \frac{h}{6} \cdot 6 \cdot lb = \frac{h \cdot 6 \cdot lb}{6} = h \cdot l \cdot b$$

$$V = l \cdot b \cdot h$$

Wieder können wir repetieren und erweitern oder z. B. hinweisen auf:

$$s^2 + s^2 + 4s^2 = 6s^2 \quad lb + lb + 4 \cdot lb = 6 \cdot lb$$

$$a + 2a + 3a = 6a \quad 2x + 5x + x = 8x$$

Der Schritt zur *allgemeinen Prismaformel* ist nur noch ein kleiner, denn der Schüler stellt fest, daß bei allen Prismen $G = D = M$ also immer $(G + D + 4M) = 6$ Grundflächen.

$$V = \frac{h}{6} \cdot 6G = h \cdot G \text{ oder } G \cdot h$$

Hinweisen möchte ich hier nur auf einige wenige Dinge, die mir wichtig erscheinen: Algebra und Geometrie sollen stärker verknüpft werden. Alles, was zum Beobachten und Denken anregt, soll man verwerten. Die entsprechenden Möglichkeiten gehen viel weiter, als hier erwähnt wird.

Im weiteren sei nur noch auf einige andere Vorteile dieser Methode hingewiesen.

Die Quadratpyramide:

$$G = s^2 \quad D = o \quad M = \left(\frac{1}{2}s\right)^2 = \frac{s^2}{4} \quad 4M = s^2$$

$$(G + D + 4M) = 2s^2$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot 2s^2 = \frac{h \cdot s^2}{3} = \frac{s^2 \cdot h}{3}$$

Die Rechteckpyramide:

$$G = l \cdot b \quad D = o \quad M = \frac{l}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{l \cdot b}{4} \quad 4M = l \cdot b$$

$$(G + D + 4M) = 2 \cdot l \cdot b$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot 2 \cdot l \cdot b = \frac{h \cdot l \cdot b}{3} = \frac{l \cdot b \cdot h}{3}$$

Aus diesen und weiteren Ableitungen stellen wir fest:

1. Die Mittelfläche ist bei Pyramiden immer $\frac{1}{4}$ der Grundfläche.

2. Die Rauminhalte der Pyramiden sind $\frac{1}{3}$ derjenigen von Prismen gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Die allgemeine Pyramidenformel:

$$G = G \quad D = o \quad M = \frac{1}{4}G \quad 4M = G$$

$$(G + D + 4M) = 2G$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot 2G = \frac{h \cdot G}{3} = \frac{G \cdot h}{3}$$

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß auch schiefe Körper nach den hier gefundenen Formeln berechnet werden können, wobei die Höhe immer senkrecht zur Grundfläche genommen werden muß.

Der Kreiszyylinder:

$$G = r^2 \pi = D = M$$

$$(G + D + 4M) = 6r^2 \pi$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot 6r^2 \pi = h \cdot r^2 \pi = r^2 \pi \cdot h$$

Der Kreiskegel: $\frac{1}{3}$ des entsprechenden Kreiszyinders!

Die Kugel:

$$G = o \quad D = o \quad M = r^2 \pi \quad 4M = 4r^2 \pi$$

$$h = 2r \quad (G + D + 4M) = 4r^2 \pi$$

$$V = \frac{2r}{6} \cdot 4r^2 \pi = 4r^3 \pi : 3 = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

So leicht läßt sich die Formel für das Volumen der Kugel finden. Man kann den Schülern mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aber auch zeigen, daß ein Restkörper aus Zylinder und Kegel gleiche Querschnitte aufweist wie die Kugel, wenn man in gleicher Höhe schneidet. Nach dem Satz von Cavalieri haben Körper mit gleichen Höhen und gleichen Querschnitten auf gleichen Höhen gleiche Volumen. Ob dies wohl besser erfaßt wird?

Nicht uninteressant ist die Ableitung einer Formel für das Kugelsegment. Weitere Kugelteile braucht man nicht unbedingt nach dieser Art zu behandeln, denn der Schüler soll da und dort auch einmal in gegebene Formeln einsetzen und ohne weitere Erklärungen berechnen können.

Wesentlich scheint mir, daß man versuche, mit den Schülern eine Formel für die genaue Berechnung von Stumpfen abzuleiten.

Der Pyramidenstumpf: z. B. Quadratpyramide:

$$G = s^2 \quad D = t^2 \quad M = \left(\frac{s+t}{2}\right)^2 = \frac{s^2 + 2st + t^2}{4}$$

$$4M = s^2 + 2st + t^2$$

$$(G + D + 4M) = s^2 + t^2 + s^2 + 2st + t^2 = 2(s^2 + st + t^2)$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot 2(s^2 + st + t^2) = \frac{h}{3} (s^2 + st + t^2)$$

Der Kegelstumpf: z. B. Kreiskegel:

$$G = R^2 \pi \quad D = r^2 \pi \quad M = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \pi$$

$$4M = R^2 \pi + 2Rr\pi + r^2 \pi$$

$$(G + D + 4M)$$

$$= \pi(R^2 + r^2 + R^2 + 2Rr + r^2)$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot 2\pi(R^2 + Rr + r^2)$$

$$= \frac{h \cdot \pi}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Eine allgemeine Formel für Stumpfe finden wir, wenn wir darauf hinweisen, daß in der ersten Formel

$$s^2 = G \quad t^2 = D \quad \text{und} \quad st = \sqrt{s^2 t^2} = \sqrt{G \cdot D}$$

oder in der zweiten Formel

$$R^2 \pi = G \quad r^2 \pi = D \quad \text{und}$$

$$Rr \pi = \sqrt{R^2 \pi r^2 \pi} = \sqrt{G \cdot D}$$

$$V = \frac{h}{3} (G + D + \sqrt{G \cdot D})$$

Wir haben da Gelegenheit zu zeigen, daß Berechnungen aus der Mittelfläche heraus, falls diese als arithmetisches Mittel zwischen Grund- und Deckfläche genommen wird, ungenau sind.

$$V = \frac{G + D}{2} \cdot h \quad \text{nur für annähernde Werte!}$$

Ich habe diesen andern Weg zur Körperberechnung hier mit einigen Beispielen und Hinweisen vorgezeichnet. Es bleibt dem Lehrer überlassen, da und dort vielleicht einmal einen Versuch zu unternehmen. Wenn der eine oder andere meiner Kollegen einen besseren Erfolg verspürt, ist der Zweck meiner Arbeit erreicht.