

Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 40 (1953)
Heft: 18: Ziel christlicher Erziehung ; Praktischer Rechenunterricht

Artikel: Rechnen mit gemeinen Brüchen [Fortsetzung]
Autor: Hutter, Jakob
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-537093>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

und multiplizierte mit Hilfe dieser Tabelle, denn das Einmaleins konnte es noch nicht. Das Ermitteln des Restes brachte es mit Hilfe von Ellbogen, Handgelenk und Fingern fertig, indem es 1 um 1 vorwärtszählte. Das gute Kind hatte eben noch nicht gelernt, die Differenz von 4 auf 12 durch einmaliges Ergänzen zu bestimmen.

Mich erschreckte eine solch ausgeklügelte »Methode« des Rechnens. Ich erinnerte mich, daß irgendwo in der welschen Schweiz

eines meiner Kinder am Anfang des 2. Schuljahres Additionen mit 7- und 8stelligen Zahlen zu lösen hatte.

Die französische Methode kam mir seelenlos vor. Ist es nicht richtiger, die Geisteskräfte zu üben und solange zu warten, bis sie ausreichen, auch schwerere Aufgaben aus eigener Kraft zu lösen?

Fragen wir uns ernsthaft, ob wir nicht auf andern Gebieten ähnliche Sinnlosigkeiten begehen.

RECHNEN MIT GEMEINEN BRÜCHEN

(Fortsetzung)

Von Jakob Hutter

In Heft Nr. 8, Jahrgang 1953, habe ich versucht, einen Weg aufzuzeigen, der bei der Einführung der gemeinen Brüche im wesentlichen auf die Begriffsbildung Rücksicht nimmt. Bei den bisherigen Anwendungen der »neuen Zahlen« auf die metrischen Maße lag darum das Hauptgewicht auf dem Bestreben, den Erfahrungskreis der Schüler zu vergrößern. Diese Arbeit konnte nicht ausgeschöpft werden. Sie verlangt eine weitere Anwendung auf die unregelmäßigen Maße. Ich benütze diese Sachgebiete, um neue Bruchbilder und -vorstellungen zu gewinnen.

Diese Absicht bedeutet unterrichtlich genau das Entgegengesetzte des Vorgehens gewisser Lehrmittel, wo es dem Unterrichtenden anheim gestellt ist, die Drittel, Sechstel, Zwölftel einzuführen, und dann mit diesen Brüchen am Dutzend oder am Zeitmaß zu rechnen.

Bei den dekadischen Maßen, besonders bei den kleinen Münzsorten, benützten wir die gebräuchlichen Münzsorten-Bruchstücke. Es gibt keine 25-Räppler; darum zählten wir vorläufig auch nicht mit Viertels-Franken. — Bei den nächsten Übungen ist es merkwürdig und doch auch sinnge-

mäß, zu unterscheiden, welche Bruchsorten allgemein gebräuchlich und welche nicht gezählt werden. So sagt etwa die Mutter: »Mein Kind ist vierteljährig; — $\frac{3}{4}$ Jahr alt; — es wird demnächst halbjährig.« Noch nie konnte ich hören: »Es ist $\frac{1}{3}$ Jahr alt; — $\frac{5}{6}$ Jahr; — $\frac{7}{12}$ Jahr« . . . usw. Natürlich fallen Semester und Quartal mit den Jahreszeiten zusammen, während das Trimester keine Naturerscheinung ist. Ebenso zählen wir Monate (Mondwechsel), aber nicht Zwölfteljahre.

Diese Bruchformen ergeben sich alle am Dutzend. Das Maß ist bekannt, auch der Gruppenbegriff: Was gibt es dutzendweise? Was bedeutet:

Ich habe dich schon dutzendmal gewarnt.

Löst einige Dutzend Rechnungen!

Eine Schar munterer Buben, gewiß ein volles Dutzend, balgt sich im Schnee.

Wo ist die Zahl »zwölf« auffallend?

»Zwölf, das ist das Ziel der Zeit . . .«

Zwölf Apostel; zwölf Ziffern am Uhrblatt.

Der zwölfjährige Jesusknabe.

Zwölf Monate des Jahres.

Zwölf Dutzend bilden ein Gros.

Beim Sport-Toto gewinnt man mit einem »Zwölfer«.

Der Tierkreis wechselt zwölfmal das Sternzeichen.

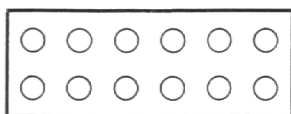
Zwölf ist in der Zählreihe zuletzt mit selbständigem Namen . . . usw.

Setzt 12 zusammen; bildet Malsätzchen, die 12 ergeben; — mit 12; teilt 12 auf!

Setzt ein Dutzend Knöpfe verschiedenreihig zusammen (aufnähen auf Halbkarton oder ausschneiden und aufkleben, eventuell nur zeichnen und ausmalen; Farbenwechsel)!

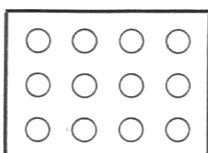


$$1 \text{ Dtzd.} = 12 \text{ St.}$$



$$\frac{1}{2} \text{ Dtzd.} = 6 \text{ St.}$$

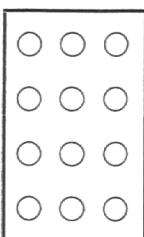
$$\frac{2}{2} \text{ Dtzd.} = 1 \text{ Dtzd.} = 12 \text{ St.}$$



$$\frac{1}{3} \text{ Dtzd.} = 4 \text{ St.}$$

$$\frac{2}{3} \text{ Dtzd.} = 8 \text{ St.}$$

$$\frac{3}{3} \text{ Dtzd.} = 1 \text{ Dtzd.} = 12 \text{ St.}$$

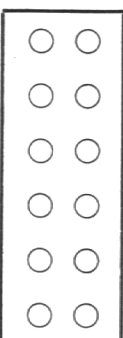


$$\frac{1}{4} \text{ Dtzd.} = 3 \text{ St.}$$

$$\frac{2}{4} \text{ Dtzd.} = \frac{1}{2} \text{ Dtzd.} = 6 \text{ St.}$$

$$\frac{3}{4} \text{ Dtzd.} = 9 \text{ St.}$$

$$\frac{4}{4} \text{ Dtzd.} = \frac{2}{2} \text{ Dtzd.} = 1 \text{ Dtzd.} = 12 \text{ St.}$$



$$\frac{1}{6} \text{ Dtzd.} = 2 \text{ St.}$$

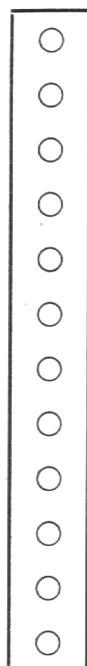
$$\frac{2}{6} \text{ Dtzd.} = \frac{1}{3} \text{ Dtzd.} = 4 \text{ St.}$$

$$\frac{3}{6} \text{ Dtzd.} = \frac{1}{2} \text{ Dtzd.} = 6 \text{ St.}$$

$$\frac{4}{6} \text{ Dtzd.} = \frac{2}{3} \text{ Dtzd.} = 8 \text{ St.}$$

$$\frac{5}{6} \text{ Dtzd.} = 10 \text{ St.}$$

$$\frac{6}{6} \text{ Dtzd.} = 1 \text{ Dtzd.} = 12 \text{ St.}$$



$$\frac{1}{12} \text{ Dtzd.} = 1 \text{ St.}$$

$$\frac{2}{12} \text{ Dtzd.} = \frac{1}{6} \text{ Dtzd.} = 2 \text{ St.}$$

$$\frac{3}{12} \text{ Dtzd.} = \frac{1}{4} \text{ Dtzd.} = 3 \text{ St.}$$

$$\frac{4}{12} \text{ Dtzd.} = \frac{1}{3} \text{ Dtzd.} = 4 \text{ St.}$$

$$\frac{5}{12} \text{ Dtzd.} = 5 \text{ St.}$$

$$\frac{6}{12} \text{ Dtzd.} = \frac{1}{2} \text{ Dtzd.} = 6 \text{ St.}$$

$$\frac{7}{12} \text{ Dtzd.} = 7 \text{ St.}$$

$$\frac{8}{12} \text{ Dtzd.} = \frac{2}{3} \text{ Dtzd.} = 8 \text{ St.}$$

$$\frac{9}{12} \text{ Dtzd.} = \frac{3}{4} \text{ Dtzd.} = 9 \text{ St.}$$

$$\frac{10}{12} \text{ Dtzd.} = \frac{5}{6} \text{ Dtzd.} = 10 \text{ St.}$$

$$\frac{11}{12} \text{ Dtzd.} = 11 \text{ St.}$$

$$\frac{12}{12} \text{ Dtzd.} = 1 \text{ Dtzd.} = 12 \text{ St.}$$

Scheinbar wurden hier die Brüche gekürzt. Wir fanden die andere Schreibform durch Vergleich der einzelnen Kartons. Warum können wir $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$ nicht in anderer Form schreiben? Merke dir: Die Zwölftels-Dutzend sind Stücke.

1. Suche die Stückzahl:

$$2 \frac{1}{2} \text{ Dtzd.} = 24 + 6 = 30 \text{ St.}$$

$$1 \frac{2}{3} \text{ Dtzd.} =$$

$$3 \frac{3}{4} \text{ Dtzd.} =$$

$$5 \frac{1}{6} \text{ Dtzd.} =$$

$$4 \frac{5}{12} \text{ Dtzd.} =$$

2. Suche die Dutzend-Zahl:

$$19 \text{ St.} = 12 + 7 = 1 \frac{7}{12} \text{ Dtzd.}$$

$$34 \text{ St.} =$$

$$42 \text{ St.} =$$

$$32 \text{ St.} =$$

$$39 \text{ St.} =$$

Diese Aufgabengruppen sind eifrig zu üben. Sie bereiten vor:

1. a) Das Einrichten des Bruches:

$$4 \frac{5}{12} \text{ Dtzd.} = 48 + 5 = 53 \text{ St.}$$

$$4 \frac{5}{12} = \frac{53}{12}$$

b) Das Vervielfachen:

$$2 \frac{1}{2} \text{ Dtzd.} = 24 + 6 = 30 \text{ St.}$$

$$2 \frac{1}{2} \cdot 12 = \frac{5}{2} \cdot 12 = \frac{60}{2} = 30$$

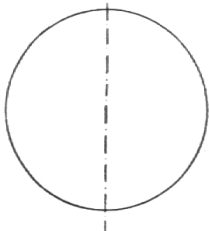
2. a) Das Umrechnen in die gemischte Zahl:

$$34 \text{ St.} = 24 + 10 = 2 \text{ Dtzd.} + \frac{5}{6} \text{ Dtzd.} \\ = 2\frac{5}{6} \text{ Dtzd.}$$

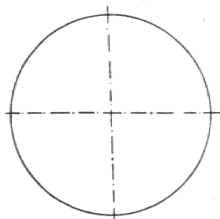
$$\frac{34}{12} = \frac{24}{12} + \frac{10}{12} = 2\frac{10}{12} = 2\frac{5}{6}$$

In Gruppen- und Einzelarbeit lösen die Schüler Aufgaben mit den Dutzend-Bildern. Sie steigern die Schwierigkeiten selbst; aber sie rechnen immer noch zählend. Ohne eine einzige Regel zu wissen, kennen sie die meisten und wenden sie an. Das ist wichtig!

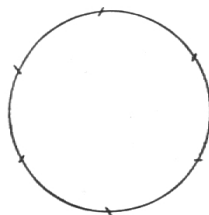
Ich verwies zu Anfang dieses Abschnittes auf gebräuchliche und nichtgebräuchliche Bruchwerte. — Um diese Ausführungen zu kürzen, übergehe ich den rechnerischen (zählenden) Teil zu den Zeitmaßen. Das Wesentliche ist in den Dutzendbildern enthalten. — Von Bedeutung ist aber die zeichnerische Lösung zu diesem Übungsbeispiel. Ich vermied absichtlich bislang die Aufteilung von »Fladen«. Jetzt aber benütze ich den Kreis, das Ziffernblatt der Uhr, um die neuen Bruchsymbole zu gewinnen:



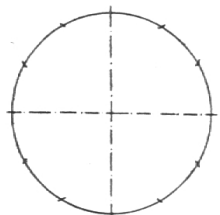
Die Senkrechte
Mittelsenkrechte
Halbe Ziffern 12, 6



Senkrechte u. Waagrechte
das Achsenkreuz
Viertel Ziffern 12, 3, 6, 9



Die Zirkelöffnung
6 × abtragen:
Sechstel
Ziffern 2, 4, 6, 8, 10, 12

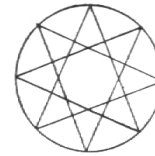
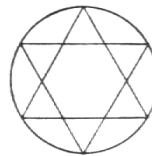
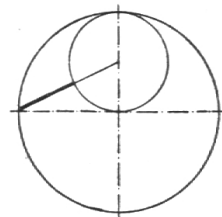


Achsenkreuz und die Zirkelöffnung abtragen von den Punkten 12, 3, 6, 9 aus.
Zwölftel alle Ziffern

Wir basteln ein Ziffernblatt aus eingefärbtem Holzkarton. Ausschneiden der Ziffern und der Zierelemente nach Entwurf des Schülers (Vorübung zum Kerbschnitzen). Aufkleben des Ziffernblattes auf Käslischachtel. Befestigen drehbarer Zeiger. Verwendung zum zählenden Rechnen.

Die Zehneckseite ergibt sich nach nebenstehender Figur (der größere Abschnitt des nach dem Goldenen Schnitt geteilten Radius).

Wir zeichnen und formen Weihnachtssternchen.



Welche Minutenzahl geben die Sternzacken an?

$$(\text{Doppelbruch: } \frac{1}{8} \text{ Std.} = 7\frac{1}{2} \text{ Min.} = \frac{7\frac{1}{2}}{60} \text{ Std.})$$

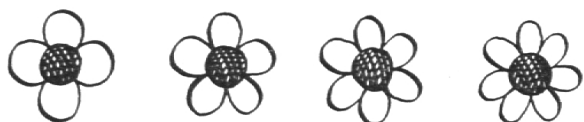
Ausschneiden der Formen; auf farbiger Aluminiumfolie ($\frac{1}{10}$ mm stark) mit Hornstift (Stricknadel) nachfahren, ausschneiden, schmücken mit Zeichnung. Sternform in Fadenspule (stirnseits) einkerben. Abdrücken auf dünne Lehmschicht. Bemalen der lufttrockenen Tonscheibchen. Verwendung als Kerzenständerchen — Tischdekoration.

Diese Kreisauflteilung benützen wir, um kreisrunde Gegenstände zu schmücken.

Knaben: Kerbschnitzerei an einer Holzunterlage.

Mädchen: Bemalen einer runden Schachtel oder Büchse. Am reizvollsten sind die keramischen Malereien auf kleinen, flachen Tellern (siehe Kommentar zum Schulwandbild »Töpferei«).

Ich messe diesen gestalterischen Übungen zur ganzheitlichen Begriffsbildung, aber auch in erzieherischer Absicht, große Bedeutung zu. Für das ästhetische Erlebnis ist die Aufteilung des Kreises so reizvoll, wie sie für das Bruchrechnen interessant und lehrreich sein mag. — Einzig schön ist ja erst der Siebenstern!



Wie verschiedenartig wirken diese Sternblümchen je nach der Zahl der Blütenblätter. Sie beanspruchen ihre bestimmten Plätzchen am »Wunderbaum der Blumen«. Welche Sorgfalt und Geduld verlangt die Gliederung des Tellerrandes!

Brüche als Zählwerte sind uns nun genügend bekannt geworden. Die neuen Zahlen sind uns zum zählenden Rechnen geläufig genug, um einen neuen Schritt zu wagen. Wir bereiten uns für das abstrakte Rechnen mit gebrochenen Zahlen vor:

- a) durch kurze Wiederholungsübungen;
- b) durch einige unerläßliche sprachliche Formulierungen.

III. Das abstrakte Rechnen.

Denkgesetzlichkeit — Die Rechenmaschine.

Bevor wir in der Lage sein werden, diesen ergänzenden Teil des Bruchrechnens anzutreten, ist es angebracht, einige Begriffe in klarer sprachlicher Form festzulegen.

Wir stellen erst einmal die Frage: *Was ist ein Bruch?*

1. Die neuen Zahlen gebrauchten wir zuerst bei der Blattreihe, wo wir eines der Blätter fortgesetzt halbierten. Die Teile nannten wir: Halbe, Viertel, Achtel . . . usw.

Brüche bedeuten also Teile von Ganzen.

Diese Teile erhalten je nach Sorte einen Namen: Den vierten Teil nennen wir *Viertel*, den achten Teil *Achtel* . . . usw. In der Bruchziffer steht die Namenszahl unter dem

Bruchstrich; sie heißt *Nenner*. Der *Bruchstrich* ist das Merkmal oder Kennzeichen der Bruchzahl (fehlt der Bruchstrich, bedeuten die Zahlen einen ganz anderen Wert. ⁸/₃ lies: acht tief drei, ist zwar auch ein Bruch, aber von der Form $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$). Die Ziffer auf dem Bruchstrich gibt die Anzahl Teile an: fünf, sieben oder elf Zwölftel. Sie zählt die Teile und heißt darum *Zähler*.

2. Bei den Geldmünzen wechselten wir bestimmte Beträge in lauter gleichwertige Geldstücke möglichst verschiedener Sorten, wie zum Beispiel:

1 Fünzigger = 5 Zehner = 10 Fünfer = 25 Zweier = 50 Einer.

$$\frac{1}{2} \text{ Fr.} = \frac{5}{10} \text{ Fr.} = \frac{10}{20} \text{ Fr.} = \frac{25}{50} \text{ Fr.} = \frac{50}{100} \text{ Fr.}$$

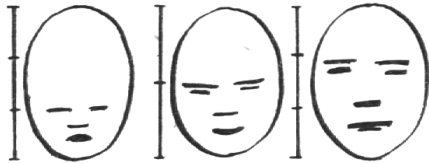
Vergleichen wir an den Brüchen Zähler und Nenner, so beobachten wir, daß sie immer im gleichen Verhältnis stehen: Der Zähler ist überall die Hälfte dieser Nenner, oder umgekehrt: Die Nenner sind doppelt so groß als ihre Zähler. Solche Verhältnisse lernten wir auch beim Planzeichnen. Dort nannten wir sie den Maßstab der Karte: Wirkliches Maß im Verhältnis zum Maß der Zeichnung wie 1:2, 1:4, 1:10 1:100... Jedes Maß der Zeichnung war $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ der Wirklichkeit.

Jeder Bruch hält ein Verhältnis fest.

Die Sportresultate werden mit solchen Verhältniszahlen angegeben (Romanshorn I : St. Gallen II 18 : 6). Suche den Bruchwert und erkläre seine Bedeutung: Zwei von fünf Aufgaben waren richtig gelöst. Ich gebe 4 (Äpfel) für 1 (Orange). 1600 Eidgenossen gegen 40 000 Armagnaken! Kennst du das Büchlein »1:7«? Verdünne Sirup im Verhältnis 1:10! Zeichne verschiedene Vierecke mit dem Seitenverhältnis 3 zu 5, oder ein Dreieck mit den Seitenverhältnissen 3:4:5!

Die Figuren gleichen sich in der Form; sie haben gleiches Format.

Vergleiche die Verhältnisse an folgenden Skizzen:



Was drücken diese Verhältnisse bildlich aus?

3. Messen heißt Vergleichen. Längen vergleichen wir mit dem Meter, Gewichte mit dem Kilogramm, den Inhalt eines Gefäßes mit dem Liter.

Wir vergleichen Stückreihen mit dem vollen Dutzend.

$$5 \text{ St.} : 12 \text{ St.} = \frac{5}{12}$$

$$9 \text{ St.} : 12 \text{ St.} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Jeder Bruch ist auch eine Meßrechnung.

$$4 : 7 = \frac{4}{7} \quad \frac{5}{9} = 5 : 9 \quad 4 : 4 = \frac{4}{4} = 1$$

Das Meßzeichen hat also gleiche Bedeutung wie der Bruchstrich. Auch die Umkehrung ist richtig!

Arten der Brüche.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{67} \dots$$

Von jeder Bruchsorte ist immer nur ein Teil gezählt. (Nenne mehr Teile dieser Sorten!) Im Zähler steht überall die Zahl »eins«; der Bruch heißt *Stammbruch*. Von ihm stammen die übrigen ab.

$$\frac{3}{5} \dots \frac{7}{12} \dots \frac{11}{25} \dots \frac{39}{50} \dots$$

Der Zähler ist kleiner als der Nenner. Diese *echten Brüche* sind weniger als 1 Ganzes.

$$\frac{5}{3} \dots \frac{9}{4} \dots \frac{37}{12} \dots \frac{124}{100} \dots$$

Der Zähler ist größer als der Nenner. Die *unechten Brüche* sind mehr als 1 Ganzes. Wir suchen für sie die gemischte Zahl:

$$\frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}; \quad \frac{9}{4} = 2 \frac{1}{4}; \quad \frac{37}{12} = 3 \frac{1}{12}; \quad \frac{124}{100} = 1 \frac{24}{100}$$

Wer merkt die Regel? Wende sie in selbstgestellten Aufgaben an!

Noch eine bedeutsame Beobachtung an der Blätterreihe:

Jene Bruchsorten lauteten: $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \dots$

Jedesmal wurden die Papierteile (Streifen — Streifchen) kleiner. Das kommt in

den Bruchzeichen durch eine größere Nenner- oder Meßzahl zum Ausdruck. *Je größer der Nenner, desto kleiner der Wert des Bruches.*

Wechsle die Geldbeträge 5 Rp., 30 Rp., 45 Rp., 95 Rp., 2.05 Fr. in lauter fünfrapige Frankenteile:

$$\frac{1}{20}, \quad \frac{6}{20}, \quad \frac{9}{20}, \quad \frac{19}{20}, \quad \frac{41}{20}$$

Je größer der Zähler, desto größer ist auch der Wert des Bruches.

Suche nach verschiedenen Bruchformen, die gleiches bedeuten!

An der Blätterreihe:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} \dots$$

An den Geldmünzen:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \frac{30}{50} = \frac{60}{100}$$

An den Gewichten:

$$1 \frac{1}{2} \text{ Pfd.} = \frac{1 \frac{1}{2}}{2} \text{ kg} = \frac{3}{4} \text{ kg} = \frac{6}{8} \text{ kg}$$

Am Dutzendmaß:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12} \text{ Dtzd.} = 6 \text{ St.}$$

Es gibt immer kleinere Teile, dafür größere Stücke; *der Wert bleibt gleich*. Große Stücke werden zerkleinert: Äpfel in Schnitze schneiden, Kartoffeln bröckeln, Zwiebeln häckseln, Fleisch hacken, Körner brechen oder mahlen (Bruch, Grütze, Gries, Mehl). Dieses Umformen der Brüche heißt man: *Erweitern*. Wer findet die Regel?

Welche Brüche bringst du leicht auf den gleichen oder gemeinsamen Nenner?

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}, \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \text{ (Dutzend!)}$$

Wir lesen obige Reihen in umgekehrter Reihenfolge. Wir fügen kleine Teilchen zu größeren Stücken; es ergibt weniger —, dafür aber größere Teile wie beim Zusammennähen, Verkitten, Verleimen, Verschrauben, Zusammenkneten, Spinnen, Weben, Betonieren.

Dieses »Zusammensetzspiel« bei den Brüchen, oder *Kürzen*, heißt: Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilen.

(Achte auf richtige Sprechweise: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; ich kürze 15 gegen 20 mit 5; oben 3, unten 4.)

Zur Repetition:

Erkläre die Redensarten:

Paul trägt $\frac{3}{4}$ lange Hosen.

$\frac{1}{4}$ fester Käse ist billiger als Rahmkäse.

Er leistete halbbatzige Arbeit.

Ich wette 1:100, morgen wird es regnen.

Groß- und Kleinbäckerei.

Kurzwarenhandlung.

Er macht wieder ein weites und breites mit dieser Erklärung. Sag's lieber kurz und bündig!

Hans ist ein rechter Grobschmied.

Größtenteils — kleinstenteils.

Mehrheitlich wurde beschlossen, . . .

Hole mir schnell »Münz« für . . .

Er bezahlte die Rechnung in kleinen Raten.

Hast wieder etwas abgezackt.

Er sieht den Splitter im fremden Auge; den Balken im eigenen Auge achtet er nicht.

Splitterfreies Glas.

Was kann man zerquetschen, zerreiben, zermahlen, zerstäuben — zusammenballen, zusammenrotten, verdichten?

Suche Sammelwörter, wie *Rinnsal*, *Gefüge*!

Richte die Brüche ein!

$$2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$4\frac{3}{7} =$$

Suche die gemischte Zahl!

$$\frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$$

$$\frac{165}{13} =$$

Erweitere Brüche zu Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln (Übungen mit benannten Zahlen)!

$$\frac{1}{2} \text{ m} = \frac{5}{10} \text{ m} (= 5 \text{ dm})$$

$$\frac{1}{20} \text{ hl} = \frac{5}{100} \text{ hl} (= 5 \text{ l})$$

$$\frac{1}{8} \text{ km} =$$

usw.

Nach dieser Vorbereitung, die weitgehend dem sprachlichen Ausdruck diene

und neuerarbeitete Begriffe in die überlieferten Wortformen kleidete, kann auch mit einer fünften Primarklasse in Anlehnung an das weite Erfahrungsgebiet — aber nur so — das »Calcul« mit Bruchgrößen an den vier niedrigen Rechnungsarten nach Regel gezeigt und angewendet werden. Ich bin davon überzeugt, daß durch eine umfassende und ganzheitlich erarbeitete Form des Bruchrechnens der Schüler für alle Zukunft im Rechnen großen Nutzen gewinnt: Das Rechnen mit Dezimalbrüchen ist umfangreich vorbereitet; die Prozentaufgaben gehen daraus hervor; die Dreisatzlösung läßt sich vereinfachen; die Proportion ist schon angedeutet worden; auch die trigonometrischen Funktionen bedeuten nichts anderes als ein Rechnen mit Bruchwerten; sogar das Differenzieren baut wieder darauf weiter; und besonders der Gebrauch geometrischer und mathematischer Formeln ist durch den sichern Umgang mit den Bruchziffern im Rechnen durch diese Vorarbeit nur ermöglicht. Diese Bedeutung des Bruchrechnens für den Schüler betonen erfahrene Praktiker im Mathematikunterricht immer wieder. Deshalb, glaube ich, schulden wir den Schülern eine eher ausführliche Vorbereitung in diesem Teil der rechnerischen Weiterbildung. Die Sekundar- oder Berufsschule sollte keine Zeit mehr an die Einführung ins Bruchrechnen verlieren müssen.

Es erübrigt sich, die Regeln zum Bruchrechnen hier anzufügen. Das ist Sache der Lehrmittel. Die Klasse sammelt diese Ergebnisse, auch die sprachlichen Formulierungen, in einem Separatheftchen, das dem einzelnen Schüler als Gedächtnisstütze wie ein Rechtschreibe- oder Wörterheft frei zum Gebrauch jederzeit Hilfe leistet. Gewöhnlich sind die Kinder sehr bald in der Lage, ganz frei davon zu arbeiten.

Einige Hinweise sind aber angezeigt:

Wir lösten ja alle Rechnungsarten bereits zählend wie zum Beispiel:

$$\begin{array}{r}
3\frac{1}{2} \text{ Fr.} + \rightarrow 3.50 \text{ Fr.} + \rightarrow 3\frac{5}{10} \text{ Fr.} + \\
4\frac{1}{5} \text{ Fr.} \qquad \qquad 4.20 \text{ Fr.} \qquad \qquad 4\frac{2}{10} \text{ Fr.} \\
7\frac{7}{10} \text{ Fr.} \leftarrow 7.70 \text{ Fr.} \qquad \qquad 7\frac{7}{10} \text{ Fr.}
\end{array}$$

Wo wir früher den Bruchwert in den Rappenwert nach Münzsorten umdeuteten, ergänzen wir: Ich wähle für $\frac{1}{2}$ Fr. und $\frac{1}{5}$ Fr. die gleiche Münzsorte, die Zehn-räppler. Abschließend vereinfachen wir: Ich setze auf den *gemeinsamen Nenner*.

Suche den gemeinsamen Nenner für Halbe, Viertel, Drittel und Sechstel!

Stelle die Reihen auf

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ...
- 4, 8, 12, 16 ...
- 3, 6, 9, 12, 15 ...
- 6, 12, 18 ...

Wenn der Schüler später von Primfaktoren hört, erinnert er sich an diese gemeinsame Reihenzahl der Nenner:

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 1 \cdot 2 \\ 4 = 2 \cdot 2 \\ 3 = 1 \cdot 3 \\ 6 = 2 \cdot 3 \end{array} \right\} 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Wähle alle Primfaktoren, wo sie am häufigsten auftreten, und vervielfache die Zahlen! (Übersetze: Primfaktor-Malzahl.) Allermeist finden die Schüler den gemeinsamen Nenner ohne diese Tabellenrechnung. Es stellt sich aber immer wieder der Umstand ein, daß die kleinen Rechner dem Lehrer Aufgaben vorlegen, an deren Lösbarkeit sie zweifeln. Dann ergeben sich diese Aufklärungen zwingend aus einem Bedürfnis der Klasse. Es ist immer gut, wenn solche Bedürfnisse sich melden. Bei der Division durchgehen wir zwei Wege zur Lösung, vorerst den ausführlichen:

$$3\frac{1}{2} \text{ Dtzd.} : 1\frac{5}{6} \text{ Dtzd.} = (\text{richte die Brüche ein!})$$

$$\frac{7}{2} \text{ Dtzd.} : \frac{11}{6} \text{ Dtzd.} = (\text{setze auf gleiche Nenner!})$$

$$\frac{21}{6} \text{ Dtzd.} : \frac{11}{6} \text{ Dtzd.} = (\text{erweitere mit 6; schaffe die Nenner weg!})$$

$$21 \text{ Dtzd.} : 11 \text{ Dtzd.} = \frac{21}{11} = 1\frac{10}{11} \quad (\text{nahezu 2 Mal})$$

Der abgekürzte Weg: Jeder beliebige Bruch hat einen zugehörigen Kehrwert; wir tauschen Zähler und Nenner aus:

$\frac{1}{8}$ wird $\frac{8}{1}$; aus Stammbruch wird Scheinbruch.

$\frac{3}{5}$ wird $\frac{5}{3}$; aus echtem - wird unechter Bruch.

Vergleiche am Sportresultat:

Winterthur : St. Gallen 5 : 7 (Winterthur verliert), St. Gallen : Winterthur 7 : 5 (St. Gallen gewinnt).

Die Verhältnisse (oder Brüche) drücken das Gegenteil aus.

Rechnungsarten sind auch gegensätzlich, wie: addieren und subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Anwendung: Statt mit dem gegebenen Bruch dividieren, kann ich mit dem Kehrwert multiplizieren.

Beispiel:

$$3\frac{1}{2} \text{ Dtzd.} : 1\frac{5}{6} \text{ Dtzd.} = (\text{richte die Brüche ein!})$$

$$\frac{7}{2} : \frac{11}{6} = (\text{vervielfache mit dem Kehrwert!})$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{6}{11} = (\text{gekürzt mit 2}) \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 11} = \frac{21}{11} = 1\frac{10}{11} \quad (\text{wie oben!})$$

Aus den Übungen in der Multiplikation und Division, wie aus der Deutung des Bruches als einer Meßrechnung, ergeben sich die Merksätze:

Jede Malzahl gehört in den Zählerwert.

Jede Meßzahl gehört in den Nennerwert.

Hier läßt sich der Übergang zu den Doppelbrüchen sehr leicht anschließen, zumal die Schüler schon oft mündlich seine Form gebrauchten, wie etwa

$$25 \text{ Rp.} = 2\frac{1}{2} \text{ Zehntelsfranken}$$

$$35 \text{ cm} = 3\frac{1}{2} \text{ Dezimeter}$$

$$125 \text{ g} = 1 \text{ Vierlig} \left(\frac{1}{4} \text{ Pfd.} = \frac{1}{4} \text{ Halbkilo} \right)$$

Zur Vorbereitung der Dreisatzrechnung lösen wir Kettenaufgaben (nicht Kettenbrüche!) wie vielleicht:

$$2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{5} : 2\frac{1}{4} \text{ mit dem gemeinsamen Bruchstrich}$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{5 \cdot 18 \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot 9} = \dots$$

Wenn sich diese Endform kürzen läßt wie hier, dann lernen die Schüler die Vorteile dieser Lösungsweise besonders schätzen. Sie untersuchen darum auch jedes Beispiel darnach, daß sie weitmöglichst kürzen, kürzen!

Dieser Umgang mit Bruchzahlen ist so reizvoll, daß bis zum Ende der sechsten Klasse die Dreisatz-, Prozent-, Zinsrechnung nur noch in dieser Form gewählt werden.

Zins von 4800 Fr. bei $3\frac{1}{4}\%$ in 5 Monaten = ?

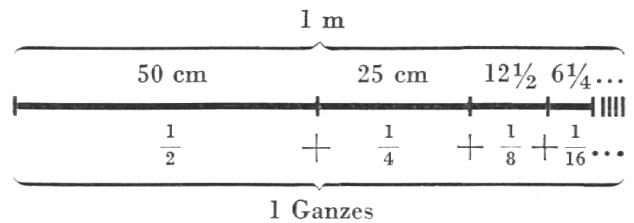
$$\begin{aligned} \text{Zins in 5 Monaten} &= \frac{4800 \cdot 13 \cdot 5}{100 \cdot 4 \cdot 12} \\ &= (\text{gekürzt}) 13 \cdot 5 = 65 \text{ Fr.} \end{aligned}$$

Damit ist der Rahmen der Aufgabe allerdings etwas überschritten worden; denn die Zinsaufgabe setzt ja Dezimalbrüche und Prozentrechnung voraus. Dieser Hinweis will nur die Verallgemeinerung der Bruchform zeigen.

Hingegen liegt der Übergang vom Rechnen mit gemeinen zu den Dezimalbrüchen hier noch als Ergänzung nahe. Wir wollen alles vermeiden, was die Dezimalbrüche als etwas Neuartiges, Grundverschiedenes darten könnte. Im Gegenteil heben wir alles hervor, was die Dezimalbrüche als eine Auswahl gemeiner Brüche zu bestätigen vermag.

Darum ist schon bei der Behandlung der gemeinen Brüche darauf Rücksicht zu nehmen, wo eine besondere Schwierigkeit bei der Einführung der Dezimalbrüche entstehen könnte. Das ist, soweit bisher die Erfahrungen der Kinder ausgewertet wurden, nur noch an einer Stelle möglich: Beim unendlichen Dezimalbruch. Tatsächlich bot sich aber schon zu Anfang gute Gelegenheit, auf Zusammenhänge in dieser Richtung aufmerksam zu machen. Wir halbierten ja fortgesetzt an unserer Blätterreihe und kamen ebenso zu einer unendlichen Bruchreihe (sie war im Zweiersystem aufge-

baut!). Setzen wir durch Addition jene Reihe von Stammbrüchen zusammen, führt sie zu einem bestimmten, begrenzten Endwert:



Dieses Erlebnis wird um so deutlicher, wenn wir den ganzen Meter zuerst zeichnen und hernach in die Teile nach obiger Darstellung gliedern. Diese Aufteilung kann auch an einem Sachwert (Weckenbrot, Wurst etc.) veranschaulicht werden. Wesentlich ist: Die unendliche Reihe aller Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$ gibt als Summe den bestimmten, genau begrenzten Wert 1.

Was liegt näher, als auch in andern Systemen zu teilen! Wir sind zu sehr an das Zehnersystem gewöhnt und vergessen, daß es von vielen Möglichkeiten nur eine durch den Gebrauch so sehr bevorzugte ist (siehe in diesem Zusammenhang den Aufsatz von Prof. Dr. Ewald Fettweis, Aachen: »Rechenmethoden aus fremdartigen Kulturen vergangener Zeiten und der Jetztzeit«, im Heft Nr. 8 des 40. Jahrganges der »Schweizer Schule«). Durch weitere Darstellungen solcher Reihen drängt sich »der Algorithmus der Zahl« dieser unendlichen Bruchsysteme auf. Am abgemessenen Meterbild finden wir zwar den Endwert nur angenähert. Trotzdem sind weder Begriff noch Formel der geometrischen Reihen, um die es sich hier handelt, bei dieser Arbeitsweise notwendige Voraussetzung. Ich habe schon darauf verwiesen, daß das Bruchrechnen in viele Abschnitte der Mathematik hineinführt. Die Reihen ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots &= 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \dots &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \dots &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} \dots = \frac{1}{4}$$

Die Schüler erkennen die Denkgesetzlichkeit in diesen ersten Versuchen bald; wir können die folgenden Reihensysteme nur noch nennen und finden abschließend

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} \dots = \frac{1}{9} (0.1111\dots)$$

Wie leicht läßt sich diese letzte Reihe bilden! Das liegt an der Zehnerzahl im Nenner. Diese Reihe wird darum bevorzugt. Wir haben selbst die Dezimalbrüche mit Überzeugung ausgewählt.

Diese Zusammenstellung der Reihen oder Bruchsysteme (Bruchfamilien) mit unendlich vielen Gliedern decken die maschenartige »Verwandtschaft« der Brüche auf; denn:

die Reihe der zweiteiligen Brüche = 1

die Reihe der dreiteiligen Brüche = $\frac{1}{2}$

die Reihe der vierteiligen Brüche = $\frac{1}{3}$

⋮

die Reihe der zehnteiligen Brüche = $\frac{1}{9}$

Jede Bruchreihe irgendeiner Sorte ergibt im Gesamtwert aller Glieder den ersten Bruchwert der vorhergehenden Reihe. Also wäre zum Beispiel: $\frac{1}{20} + \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} \dots = \frac{1}{19}$ (oder es wäre: $\frac{1}{99} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} \dots = 0,010101\dots$).

Dieser verwandtschaftlichen Beziehung wegen genügt die Auswahl irgendeiner unendlichen Reihe, um alle übrigen Brüche damit zur Darstellung bringen zu können. Diese Auslese wurde bereits getroffen: Die Zehnerbrüche entsprechen »unserm« Zehnersystem am besten. Die Ordnung der gebräuchlichsten Maße ist zudem auf die

Zehnteiligkeit zugeschnitten. Jene früheren Übungen eignen sich deshalb auch zugeschnitten auf dieses Zahlen-Bruchsystem. Wir üben daher an jenen schubladisierten Bruchbildern und anhand der Tabellen in den Schülerheften über die 10-100-1000teiligen Maße nun die Dezimalbrüche. Wir unterscheiden an ihnen auch:

Stammbrüche: 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 ...

echte Brüche: 0,4; 0,7; 0,08; 0,36 ...

unechte Brüche oder

gemischte Zahlen: 2,8; 9,007; 185,093 ...

Scheinbrüche: 4,0; 8,00; 6,000 ...

Wir bringen sie auf gleiche Nenner (ausschlaggebend ist das beigegefügte Maß). Darum lesen wir die Hundertstel oder Tausendstel zusammengefaßt (3,15 Fr. lies: drei Komma fünfzehn Franken; 3,15 lies: drei Komma eins fünf). Das Erweitern und Kürzen, Auf- oder Abrunden ergibt sich aus diesem Zusammenhang.

Auch die Regeln zum Rechnen leiten wir aus den Gesetzen für das Bruchrechnen mit gewöhnlichen Brüchen ab. So wird dem Schüler spontan bewußt, daß das Rechnen mit Dezimalbrüchen eine willkommene Vereinfachung und Erleichterung darstellt. Wir gewinnen dabei das Besondere aus dem Allgemeinen, was schon bekannt war.

Ein weiterer Schritt in dieser Folge ist der Übergang zum Rechnen mit der Prozentzahl. Darüber kann in dieser Fachschrift einmal die Rede sein. Vielleicht mag nach dieser theoretischen Besprechung dann die Lektionsform als gewünscht erscheinen.

»DIE STERNKUNDE IST DIE WISSENSCHAFT DES SICH DEHNENDEN HORIZONTS«

Von Dr. J. R. Brunner

so schrieb ein Astronom des 19. Jahrhunderts. Von der Renaissance bis zum Ende des 18. Jahrhunderts beschränkte sich die astronomische Forschung ausschließlich auf

das Planetensystem. Mit der Sternzählung von Herschel und mit den Entfernungsbestimmungen von Bessel wurde ein Vorstoß in *das Reich der Fixsterne* unternommen,