

Einige Bemerkungen zum Geometrieunterricht auf der Unterstufe der Mittelschule

Autor(en): **Jeger, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **45 (1958)**

Heft 20: **Der Mathematikunterricht in der Sekundarschule**

PDF erstellt am: **07.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-539440>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Der Schüler wird selbst feststellen, daß er bei den Fällen a/q , b/p und c/h nicht durchkommt. Da die untere Reihe analog der oberen ist, bleiben 7 verschiedene Aufgaben zu lösen. Die Anzahl der möglichen Fälle, die dabei analogen und die nicht durchführbaren findet der Schüler leicht selbst heraus. Er soll aber nicht nur rechnerisch die Aufgaben lösen, sondern sich vielmehr die Richtigkeit durch die Konstruktionen bestätigen lassen.

Einige Bemerkungen zum Geometrieunterricht auf der Unterstufe der Mittelschule

Dr. M. Jeger, Luzern

Hinter dem sichern Gewinn von A steckt ein *geometrischer Zuordnungsprozeß*. Jedem Zehner des B läßt A einen Zehner entsprechen, der so liegt, daß die Mittelpunkte P und P' der beiden Münzen mit dem Zentrum Z des Biertellers auf einer Geraden liegen;

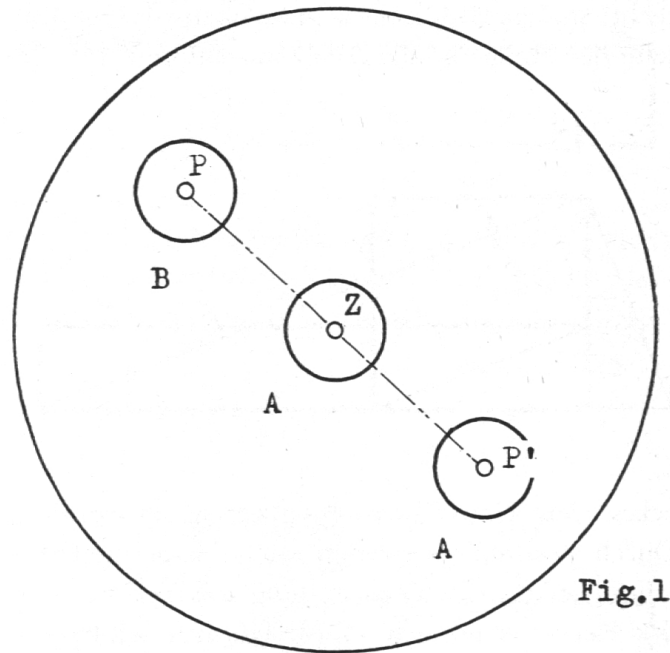


Fig.1

Ein einfaches Gesellschaftsspiel möge als Einleitung zu den folgenden Gedanken dienen. Zwei Spieler A und B legen abwechselungsweise 10-Rappen-Stücke auf einen Bierteller. Ist ein Geldstück einmal abgelegt, so darf es nicht mehr verschoben werden. Jeder Zehner muß vollständig auf dem Bierteller aufliegen; er darf also kein anderes Geldstück überdecken und auch nicht über den Rand des Biertellers hinausragen. Dagegen ist zugelassen, daß zwei Geldstücke sich berühren. Wer von den beiden Spielern das letzte Geldstück hinlegen kann, hat das Spiel gewonnen. Es ist leicht einzusehen, daß derjenige Spieler, der den ersten Zehner setzen darf, das Spiel durch eine geeignete Maßnahme stets zu seinen Gunsten entscheiden kann. A muß nur beim ersten Zug seinen Zehner genau in die Mitte des Biertellers legen. Hat dann der Partner B seinen Zehner irgendwo placent, so muß A jetzt seinen folgenden Zehner genau zentralsymmetrisch zum Zehner des B legen. Spielt A nach diesem Rezept weiter, so gewinnt er sicher. Solange nämlich B noch an einer Stelle einen Zehner hinlegen kann, ist auch die zentralsymmetrische Stelle noch frei, das heißt A kann auch noch einen Zug tun. Das letzte Geldstück, das bei diesem Vorgehen auf dem Teller noch Platz hat, ist daher sicher eines von A.

ferner ist $P'Z = PZ$. Man bezeichnet diese Zuordnung als *Zentralsymmetrie* (Drehung um Z mit dem Drehwinkel 180°). Das eben beschriebene Spiel funktioniert nicht nur auf einer Kreisfläche (Bierteller), sondern auf jeder Fläche mit einem *Symmetriezentrum* (dies sind Flächen, die bei einer geeigneten Zentralsymmetrie in sich selbst übergehen). Dazu gehören z. B. alle regelmäßigen Vielecke mit gerader Eckenzahl.

Der moderne Geometrieunterricht auf der Unterstufe ist durch die Tatsache gekennzeichnet, daß der Zuordnungsbegriff immer mehr in den Vordergrund gerückt wird. Der axiomatische Aufbau der Geometrie, wie er vor mehr als zweitausend Jahren von Euklid in die Wege geleitet worden ist, wird dabei verlassen und auf die Oberstufe verschoben, dies wohl in der weisen Erkenntnis, daß die axiomatische Methode den Schülern erst dann zuträglich ist, wenn bei ihnen eine gewisse geometrische Substanz vorhanden ist. Es ist recht eigenartig, daß zwei Jahrtausende des Experimentierens notwendig waren, bis man gemerkt hat, daß *Euklid's Elemente* nicht als Leitfaden der Planimetrie für Mittelschulen gedacht waren. Zur Hauptsache geht dieser Sachverhalt auf das Konto Tradition; die euklidische Unterrichtsmethode mit ihrer Betonung der starren

Einzelfigur und ihrer abstraktlogischen Schlußweise nach dem Schema Voraussetzung-Behauptung-Beweis sitzt den Generationen derart in Fleisch und Blut, daß es besonderer Anstrengungen bedurfte, die griechisch-euklidische Tradition umzustoßen. In diesem Zusammenhange muß besonders der deutsche Mathematiker Felix Klein (1849–1926) erwähnt werden; durch seine Arbeiten hat die Neuorientierung des Geometrieunterrichtes die wesentlichsten Impulse erhalten.

Die systematische Geometrie verlangt vom Schüler gleich von Anfang an eine starke Dosis an Abstraktion. Sie arbeitet mit idealen Punkten und Geraden; tritt dann noch der axiomatische Aufbau als weiteres erschwerendes Element hinzu, so bringen wir die Schüler sehr rasch in eine recht unangenehme Situation. Ihre erste Begegnung mit der Geometrie zeigt ihnen diesen Wissenszweig von einer ganz andern Seite, als sie dies erwartet haben. In ihrer Entwicklung haben sie bis jetzt Geometrie vorwiegend dynamisch erlebt. Nun wird plötzlich alles statisch dargestellt und in ein festes, vorwiegend logisch zusammenhängendes System gepreßt. Sie verstehen die zahlreichen Beweise und Beweislein im einzelnen wohl, aber sie können keinen Zusammenhang sehen. Vieles, was bewiesen wird, kommt ihnen – weil äußerst evident – einfach überflüssig vor. Sie ertrinken im Meer von fettgedruckten Sätzen, bei denen eine fortlaufende Numerierung nicht mehr genügt; neben dem Satz 147 gibt es auch noch einen Satz 147a und einen Satz 147b. Das ist die Situation, in die uns die euklidische Unterrichtsmethode hineinmanövriert hat. Zu allem Elend greift sie nicht nur Schüler an; der Verfasser dieser Zeilen hat schon Mathematiklehrer getroffen, die von der Existenz von genau vier Kongruenzsätzen derart überzeugt waren, daß sie fast in eine Ohnmacht fielen, wenn man ihnen sagte, daß es deren unendlich viele gebe. Im Gegensatz dazu passen sich die neuen Unterrichtsmethoden, welche die Zuordnung oder Abbildung als zentralen Begriff verwenden, den geistigen Fähigkeiten der Schüler weit besser an. Der Übergang vom Spiel zur ernsthaften Geometrie ist weniger abrupt. Die Abstraktionen kommen nicht plötzlich, sondern nach und nach¹. Das eingangs erwähnte Gesellschaftsspiel wäre zum Beispiel eine

¹ Von einem hübschen Versuch dieser Art auf ganz elementarer Stufe berichtet die Schrift von R. Proksch: Geometrische Propädeutik. Göttingen 1954.

Möglichkeit, wie die Behandlung der Symmetrien einsetzen könnte. Zum Verstehen des Spielvorganges ist zunächst der mathematische Punkt begriff gar nicht notwendig; an seine Stelle tritt die einzelne Münze. Sobald aber dann die Zuordnung sauber beschrieben werden soll, wird man den Punkt begriff daraus erarbeiten oder, falls er schon vorhanden ist, neuerdings beiziehen.

Die Konstruktionsaufgaben machen einen wesentlichen Teil des elementaren Planimetrieunterrichtes aus. Diese Aufgaben haben ein doppeltes Ziel. Zunächst ein rein geometrisches, indem sie der Anwendung und Festigung des behandelten Stoffes dienen. Daneben aber kommt ihnen noch eine allgemein-mathematische Zielsetzung zu; wir wollen damit die Beobachtungs- und Erfindungsgabe der Schüler fördern. Konstruktionsaufgaben haben nur dann einen Sinn, wenn sie aus dem Unterricht herauswachsen, möglicherweise sogar von den Schülern vorgeschlagen werden. Sie stellen daher recht hohe Anforderungen an den Unterrichtenden. Dieser muß ständig darauf gefaßt sein, daß Fragen und Vorschläge kommen, über die er in seiner langjährigen Unterrichtspraxis noch nie nachgedacht hat. Er muß eine Ader dafür haben, was an den oft schüchtern und verschwommen zum Ausdruck kommenden Vorschlägen brauchbar ist. Was die geometrische Berechtigung von einzelnen Konstruktionsaufgaben anbetrifft, so hat die euklidische Tradition verschiedene abschreckende Beispiele von Aufgabensammlungen auf dem Gewissen. Der Verfasser denkt dabei insbesondere an Dreieckskonstruktionen aus den unmöglichsten Stücken, die wir als pathologische Geometrie bezeichnen müssen. Da bei Euklid die Logik vor dem mathematischen Gehalt steht, müssen wir uns ob derartiger Auswüchse gar nicht allzu sehr verwundern.

Es soll nun im folgenden an zwei Konstruktionsaufgaben gezeigt werden, wie der Zuordnungsbegriff bei der Lösung derartiger Probleme zur Anwendung kommen kann.

Aufgabe: Es sind zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben, die sich schneiden. Man konstruiere durch den einen ihrer Schnittpunkte S eine Gerade, auf der k_1 und k_2 gleichlange Sehnen abschneiden.

Die statische Geometrie führt etwa auf die folgende Lösung: Denkt man sich die Mitten der beiden gleichlangen Sehnen mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise verbunden (Fig. 2), und durch S

die Parallele gezeichnet, so erhält man auf der Zentralen die beiden gleichlangen Strecken $M_1P = M_2P$. Die gesuchte Gerade ist daher das Lot zu PS durch S . Die Schwierigkeit besteht bei dieser Lösung

nicht weiter spannen zu müssen, wählen wir nochmals ein Beispiel zur Zentralsymmetrie.

Aufgabe: Gegeben sind 5 Punkte M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 . Man konstruiere ein Fünfeck, von dem diese fünf Punkte die Seitenmittelpunkte sind².

Wir zeichnen uns zunächst wie üblich die Analysisfigur (Fig. 4). Durch die gegebenen Seitenmittelpunkte drängen sich sofort gewisse Zentralsymmetrien auf. So geht etwa der Eckpunkt A bei der Zentralsymmetrie mit dem Zentrum M_1 in den Eckpunkt $A'_1 = B$ über. Aus A'_1 wird über die Zentralsymmetrie an M_2 der Eckpunkt $A'_2 = C$ usw. Die Zusammensetzung der beiden Zentralsymmetrien mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 liefert eine Zuordnung zwischen A und $A'_2 = C$, die äquivalent ist mit einer Parallelverschiebung. Diese Parallelverschiebung läßt sich durch einen

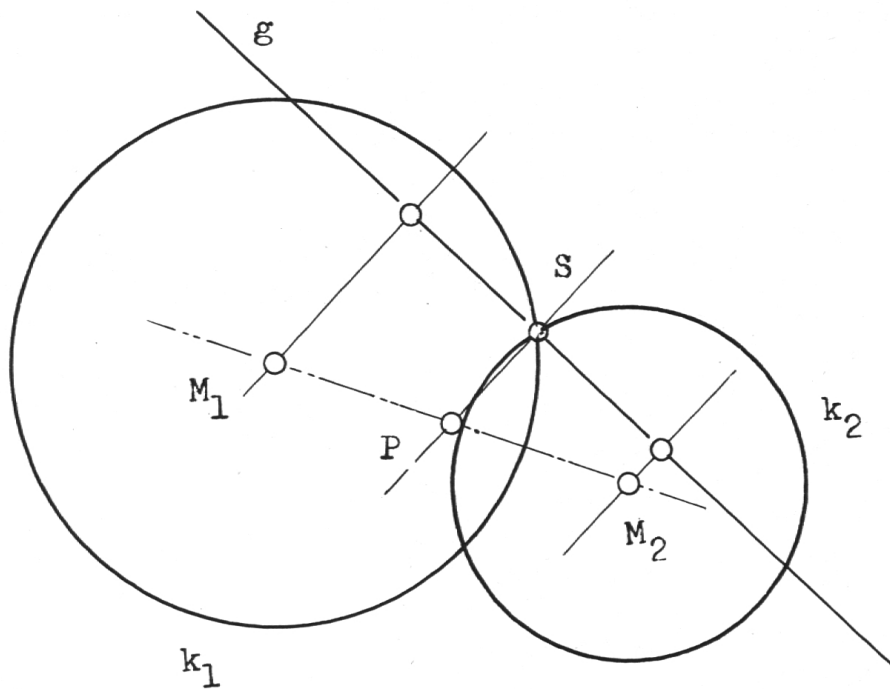


Fig. 2

offensichtlich darin, auf die richtigen Verbindungslinien zu kommen.

Ganz anders sieht die folgende Lösung aus: Wir denken uns für jede Gerade durch S den Schnittpunkt P mit k_1 gezeichnet und ordnen nun P den zentralsymmetrischen Punkt P' zu (Symmetriezentrum ist S). Bewegt sich jetzt P auf k_1 , so wandert der zugeordnete Punkt P' ebenfalls auf einem Kreis k'_1 ; k'_1 ist das zentralsymmetrische Bild von k_1 . Der zweite Schnittpunkt von k'_1 mit k_2 bestimmt die Lösungsgerade. Bei dieser zweiten Lösungsmethode liegt das Schwergewicht in der Zuordnung zwischen P und P' , die hier wiederum eine Zentralsymmetrie ist.

Sowohl die Aufgabenstellung als auch die beiden beschriebenen Lösungen gehen nicht über die elementare Planimetrie hinaus.

Eine zweite Aufgabe soll die Verwendung des Zuordnungsbegriffes auf einer etwas höheren Stufe zeigen. Um den Rahmen unserer Betrachtungen

Wir entnehmen aus der Figur sofort, daß dieser

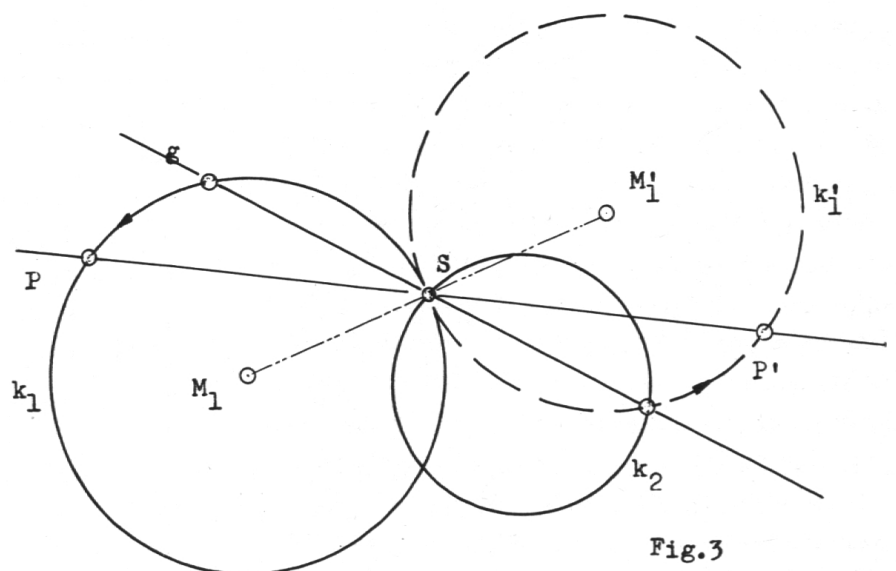


Fig. 3

Vektor doppelt so lang und gleichgerichtet ist wie der Vektor u von M_1 nach M_2 ; wir bezeichnen ihn

² Mitgeteilt von M. Rueff, ETH.

daher mit $2u$. Setzt man die vier Zentralsymmetrien mit den Zentren M_1, M_2, M_3, M_4 zusammen, so entsteht eine Punktzuordnung, die beispielsweise dem Eckpunkt A den Eckpunkt $A'_4 = E$ korrespondieren

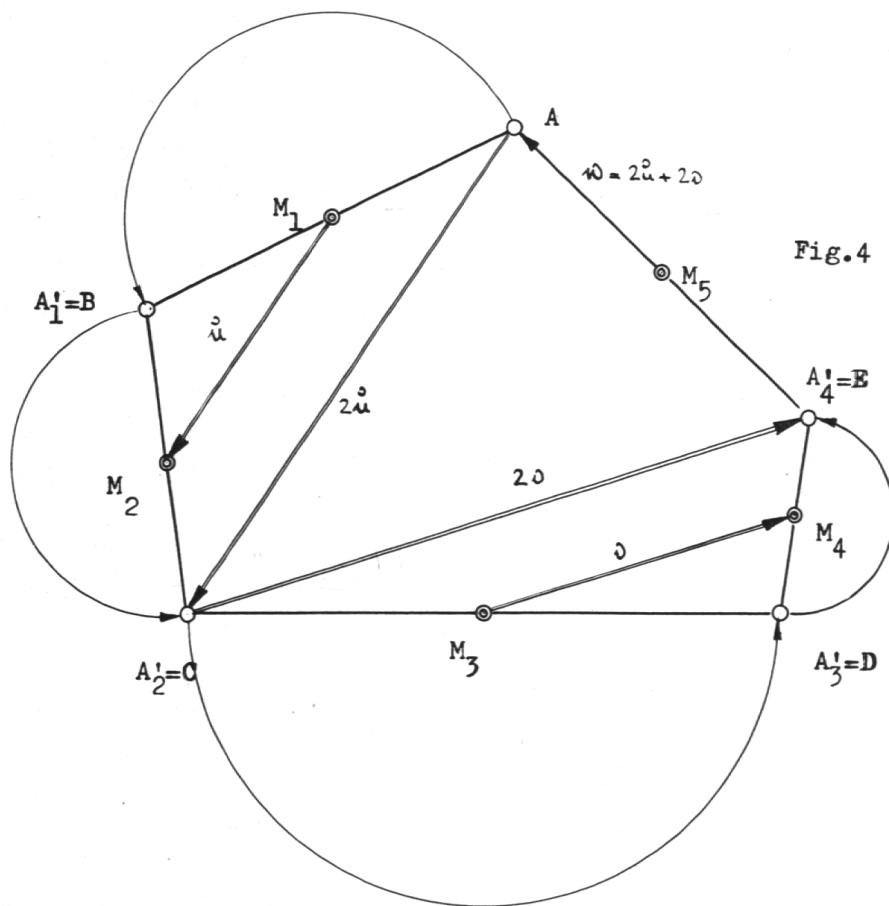


Fig. 4

Neue neben dem Alten noch Platz? Diese Fragestellung ist grundsätzlich falsch; in der Regel geht es ja wie hier nicht um neuen Stoff, sondern um eine methodisch neue Gestaltung. Es ist doch vollständig sinnlos, nach einem euklidisch aufgebauten Beweis des pythagoräischen Satzes diesen anschließend auch noch bewegungsgeometrisch darzulegen. Vielmehr geht es darum, den Schülern die Geometrie durch eine handgreiflichere Unterrichtsweise näherzubringen, besonders auf jener Stufe, wo früher infolge des allzu abstrakten Betriebes nur schwerlich eine Resonanz herzustellen war. Bewegungsgeometrie, Abbildungsgeometrie, dynamische Methode, Gruppengeometrie und ähnliche Schlagwörter sind gegenwärtig die Begriffe, hinter denen sich diese Absichten verbergen.

läßt. Nach den voranstehenden Bemerkungen läßt sich aber diese Zuordnung auch gewinnen durch Zusammensetzen der beiden Parallelverschiebungen mit den Vektoren $2u$ und $2v$, das heißt sie ist eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $w = 2u + 2v$. Da u und v mit den fünf Mittelpunkten gegeben sind, ist auch $w = 2u + 2v$ bekannt, womit sich zunächst A und E und dann das ganze Fünfeck konstruieren lassen.

Im Zusammenhang mit dieser Aufgabe drängt sich das Problem auf, ein n -Eck zu zeichnen, das n vorgegebene Punkte zu Seitenmittelpunkten hat. Für ungerades n erhält man mit dem eben entwickelten Verfahren sofort die Lösung. Dagegen zeigt sich, daß die Aufgabe für gerades n entweder keine oder dann aber gleich unendlich viele Lösungen besitzt. Der ganze Problemkreis bietet eine hübsche Gelegenheit zu einem geometrischen Streifzug.

Tauchen in einem Gebiet des mathematischen Unterrichts neue Bestrebungen auf, so hört man immer wieder die Frage gestellt: Wo hat jetzt dieses

Die Geometrie als axiomatisch aufgebaute Wissenschaft

Prof. Dr. Gaston Hauser, Luzern

Einleitung: Von vornherein sei folgendes bemerkt: Wenn in dieser Sondernummer über den Mathematikunterricht an der Sekundarschule auch vom *axiomatischen Aufbau der Geometrie* die Rede ist, so geschieht dies keineswegs in der Meinung, daß dieser moderne Aspekt der Geometrie etwa schon auf dieser Schulstufe zur Behandlung kommen soll. Denn es handelt sich um ein ausgesprochen theoretisches Thema, welches ganz bestimmt die durchschnittliche Fassungskraft des Sekundarschülers übersteigt. Dagegen sollten auf alle Fälle jene Sekundarlehrer mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung, welche Unterricht in Geometrie erteilen, wenigstens über die Grundzüge der Axiomatik genügend orientiert sein. Dies ist nämlich unerlässlich, wenn man das Wesen und die Eigenart der Geometrie als *deduktive* und *autonome* Wissenschaft richtig erfassen will. Es besteht sonst gerade im Anfangsunterricht der Geometrie die Gefahr, daß der Lehrer bei den Schülern falsche