

# Die Geometrie als axiomatisch aufgebaute Wissenschaft

Autor(en): **Hauser, Gaston**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **45 (1958)**

Heft 20: **Der Mathematikunterricht in der Sekundarschule**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-539441>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

daher mit  $2u$ . Setzt man die vier Zentralsymmetrien mit den Zentren  $M_1, M_2, M_3, M_4$  zusammen, so entsteht eine Punktzuordnung, die beispielsweise dem Eckpunkt  $A$  den Eckpunkt  $A'_4 = E$  korrespondieren

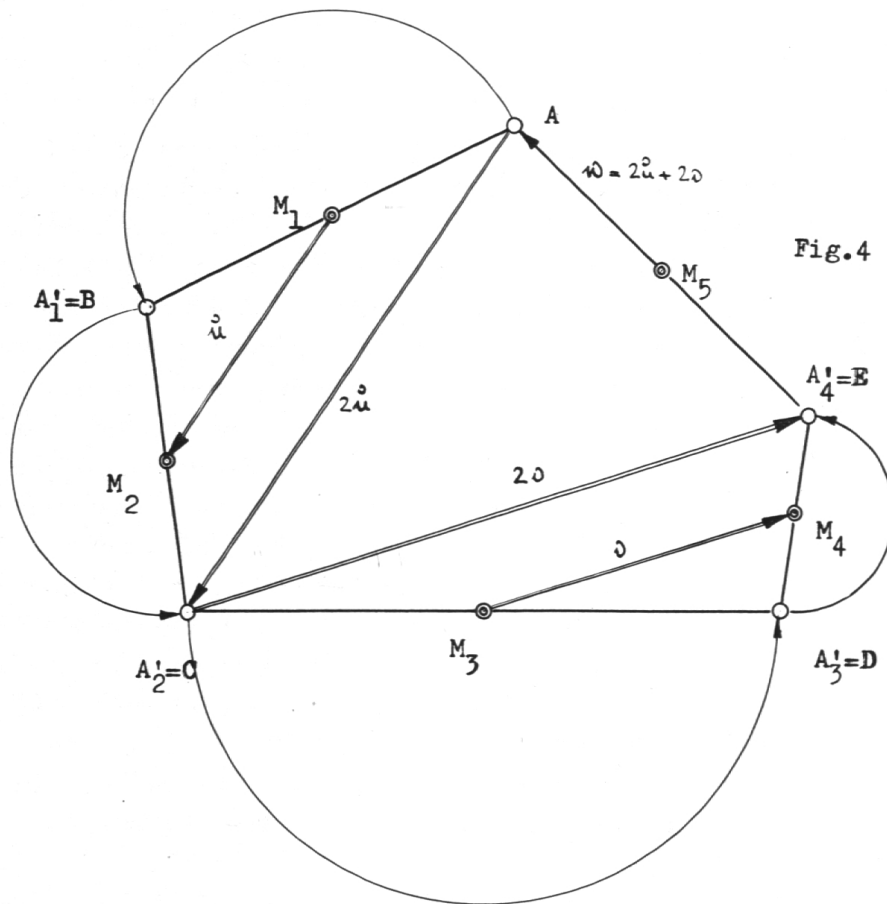


Fig. 4

Neue neben dem Alten noch Platz? Diese Fragestellung ist grundsätzlich falsch; in der Regel geht es ja wie hier nicht um neuen Stoff, sondern um eine methodisch neue Gestaltung. Es ist doch vollständig sinnlos, nach einem euklidisch aufgebauten Beweis des pythagoräischen Satzes diesen anschließend auch noch bewegungsgeometrisch darzulegen. Vielmehr geht es darum, den Schülern die Geometrie durch eine handgreiflichere Unterrichtsweise näherzubringen, besonders auf jener Stufe, wo früher infolge des allzu abstrakten Betriebes nur schwerlich eine Resonanz herzustellen war. Bewegungsgeometrie, Abbildungsgeometrie, dynamische Methode, Gruppengeometrie und ähnliche Schlagwörter sind gegenwärtig die Begriffe, hinter denen sich diese Absichten verbergen.

läßt. Nach den voranstehenden Bemerkungen läßt sich aber diese Zuordnung auch gewinnen durch Zusammensetzen der beiden Parallelverschiebungen mit den Vektoren  $2u$  und  $2v$ , das heißt sie ist eine Parallelverschiebung mit dem Vektor  $w = 2u + 2v$ . Da  $u$  und  $v$  mit den fünf Mittelpunkten gegeben sind, ist auch  $w = 2u + 2v$  bekannt, womit sich zunächst  $A$  und  $E$  und dann das ganze Fünfeck konstruieren lassen.

Im Zusammenhang mit dieser Aufgabe drängt sich das Problem auf, ein  $n$ -Eck zu zeichnen, das  $n$  vorgegebene Punkte zu Seitenmittelpunkten hat. Für ungerades  $n$  erhält man mit dem eben entwickelten Verfahren sofort die Lösung. Dagegen zeigt sich, daß die Aufgabe für gerades  $n$  entweder keine oder dann aber gleich unendlich viele Lösungen besitzt. Der ganze Problemkreis bietet eine hübsche Gelegenheit zu einem geometrischen Streifzug.

Tauchen in einem Gebiet des mathematischen Unterrichtes neue Bestrebungen auf, so hört man immer wieder die Frage gestellt: Wo hat jetzt dieses

## Die Geometrie als axiomatisch aufgebaute Wissenschaft

Prof. Dr. Gaston Hauser, Luzern

*Einleitung:* Von vornherein sei folgendes bemerkt: Wenn in dieser Sondernummer über den Mathematikunterricht an der Sekundarschule auch vom *axiomatischen Aufbau der Geometrie* die Rede ist, so geschieht dies keineswegs in der Meinung, daß dieser moderne Aspekt der Geometrie etwa schon auf dieser Schulstufe zur Behandlung kommen soll. Denn es handelt sich um ein ausgesprochen theoretisches Thema, welches ganz bestimmt die durchschnittliche Fassungskraft des Sekundarschülers übersteigt. Dagegen sollten auf alle Fälle jene Sekundarlehrer mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung, welche Unterricht in Geometrie erteilen, wenigstens über die Grundzüge der Axiomatik genügend orientiert sein. Dies ist nämlich unerlässlich, wenn man das Wesen und die Eigenart der Geometrie als *deduktive* und *autonome* Wissenschaft richtig erfassen will. Es besteht sonst gerade im Anfangsunterricht der Geometrie die Gefahr, daß der Lehrer bei den Schülern falsche

Vorstellungen und irrtümliche Ansichten entstehen läßt. So kommt es zum Beispiel noch vor, daß ahnungslose Lehrer in allem Ernst die Grundbegriffe Punkt, Gerade und Ebene durch vermeintliche ‚Definitionen‘ einführen und zu erklären versuchen. Wer nichts über geometrische Axiomatik weiß, ist ferner kaum in der Lage, die Rolle der geometrischen Grundsätze einwandfrei zu interpretieren und auf jede heiklere Schülerfrage, etwa im Zusammenhang mit dem Parallelenaxiom, ohne weiteres mit einer gültigen und den Schüler befriedigenden Antwort zu reagieren. Was die Schule über die ersten Begriffe der Geometrie bietet, sollte sich bis an die letzten Grenzen des Durchdenkens rechtfertigen lassen. Muß bisweilen die schulmäßige Formulierung eine Konzession an das Denk- und Sprachvermögen der Schüler machen, so soll sich wenigstens der Lehrer dessen bewußt sein, und wenn möglich, die Schüler darauf hinweisen, daß noch weitere Denkarbeit zu leisten wäre.

Wegen der Beschränkung des uns zur Verfügung stehenden Raumes kann hier überhaupt nur das Allernotwendigste über den axiomatischen Aufbau der Geometrie auseinandergesetzt, also bloß die ‚Notration‘ dargeboten werden. Wer sich eingehender über dieses Thema orientieren möchte, sei auf die am Schluß angegebene Literatur verwiesen.

### 1. Die reine Geometrie, eine formal-logische Beziehungslehre

Unsere Ausführungen beziehen sich nur auf die *reine Geometrie*, aus der jede Rechnung und auch die Messung ausgeschlossen sind. Ihr Gegenstand sind nicht reale Dinge, sondern abstrakte Gedanken – die geometrischen Begriffe –, die dem Menschen durch die räumliche Anschauung eingegeben werden. Und reine Geometrie treiben heißt, die Eigenschaften und wechselseitigen Beziehungen der geometrischen Begriffe wahrnehmen und beweisen. Dabei versteht man allgemein unter einem *Beweis* die Darlegung der Gründe, durch welche die Wahrheit eines Urteils festgestellt wird, das einen Erkenntnisinhalt ausspricht. Die Gründe oder ‚Ursachen‘ für die Wahrheit eines geometrischen Satzes sind frühere geometrische Sätze, deren allgemeine Gültigkeit schon gesichert ist. Deswegen besteht der Beweis einer geometrischen Behauptung in einer kürzeren oder längeren Kette von logischen Schlüssen, durch die sie in einwandfreier Weise mit schon bewiesenen Sätzen logisch verknüpft werden kann. Es wird also die Wahrheit eines neuen geometrischen Satzes auf die Wahrheit anderer Sätze zurückgeführt. Weil gerade die Feststellung und Abklärung der logischen Beziehungen zwischen den einzelnen geometrischen Sätzen das Kernstück der reinen Geometrie bildet, kann diese als eine *Beziehungslehre*, als *angewandte Logik* von reinster und vollkommenster Prägung auf-

gefaßt werden. In dieser Tatsache liegt der Grund, daß die Sätze der Geometrie überzeugend und untrüglich sind. Darum gilt die Geometrie (sowie die Mathematik überhaupt) als die sicherste und zuverlässigste Wissenschaft.

### 2. Die geometrischen Grundbegriffe

Mit gutem Recht wird die Geometrie häufig mit einem *Gebäude* verglichen. Man kann nämlich in der Geometrie wohl unterscheiden zwischen dem *Fundament* oder den *Grundlagen* einerseits und dem eigentlichen *Lehrgebäude* andererseits. Dieses wiederum besteht aus mehreren übereinanderliegenden ‚Stockwerken‘, von denen die beiden untersten von der *ebenen* oder zweidimensionalen Geometrie (‚Planimetrie‘) und der *räumlichen* oder dreidimensionalen Geometrie (‚Stereometrie‘), also von der *elementaren Schulgeometrie* gebildet werden. Man muß sich gründlich durch ein Stockwerk nach dem andern hindurcharbeiten, wenn man mit Aussicht auf Erfolg in die höheren Stockwerke gelangen will, in denen die Teilgebiete der *höheren Geometrie* (Allgemeine projektive Geometrie oder zentrale Kollineation, Topologie, Nichteuklidische Geometrien usw.) untergebracht sind, die erst auf den Hochschulen gelehrt werden.

Die *Grundlagen der Geometrie* setzen sich nun ihrerseits aus den geometrischen Grundbegriffen und den geometrischen Grundsätzen zusammen. Unter den geometrischen *Grundbegriffen* versteht man jetzt die Begriffe *Punkt*, *Gerade*, *Ebene* und etwa auch den Begriff *Raum*. Im Gegensatz zu den *abgeleiteten* Begriffen (wie Strecke, Winkel, Dreieck, Kreis, Würfel usw.) sollen die Grundbegriffe *nicht* definiert werden, und zwar aus folgenden Gründen: Die gebräuchlichste Form der Definition eines Begriffes besteht bekanntlich in der Angabe des übergeordneten Oberbegriffes (oder Gattungsbegriff) und der Beifügung des artbildenden Unterschiedes. Beispiel: Das *Trapez* ist ein Viereck (Oberbegriff) mit einem Paar paralleler Seiten (artbildender Unterschied). Im allgemeinen umschreibt man also einen Begriff mit Hilfe des nächsthöheren Gattungsbegriffes, der umfassender und einfacher ist. Und dieser einfachere Begriff wird seinerseits auf einen noch einfacheren Begriff zurückgeführt usw. Die Gesamtheit all dieser Definitionen bildet daher eine Kette und jede einzelne Definition ist ein Glied davon. Schließlich muß man – und zwar nach *endlich* vielen Schritten! – zum

Schluß dieser Kette gelangen. Dieses Ende ist dann erreicht, wenn man auf einen Begriff gestoßen ist, der sich nicht mehr mit Hilfe eines noch umfassenderen oder einfacheren Begriffs erklären läßt. Ein solcher Begriff heißt eben ein *Grundbegriff* oder *Urbegriff*. Punkt, Gerade, Ebene sind nun derartige Grundbegriffe. Sie sind so einfach, daß sie nicht in üblicher Weise einwandfrei definiert, jedoch aus der unmittelbaren Anschauung erfaßt werden können. Die richtige Einführung der geometrischen Grundbegriffe in der Schule soll also direkt an wahrnehmbare, konkrete Objekte anknüpfen und darauf ausgehen, die im jungen Menschen schlummernde Idee dieser Grundbegriffe zu wecken und zu entwickeln. Es handelt sich ja darum, schon vorhandene, aber noch verschwommene Vorstellungen allmählich zu präzisieren. Deswegen spricht man von *werdenden* Begriffen. Im ersten Teil des vom Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer herausgegebenen *Leitfadens der Planimetrie*<sup>6</sup>, dessen 1. Auflage im Jahre 1932 erschien, ist nun dargestellt, wie man diesen geistigen Prozeß auf geschickte Weise einleiten kann. Der Begriff des *geometrischen Punktes* zum Beispiel wird darin (vgl. die 4. Auflage, S. 9) als ‚bestimmte Stelle‘ oder ‚präziser Ort‘ aufgefaßt und durch fortgesetzte, immer feinere Gebietseinteilung auf einem Zeichenblatt eingeführt. Um die richtige Vorstellung der *geometrischen Geraden* zu wecken, wird zunächst auf die Herstellung einer Sägemehl- oder Gipsspur (in die man etwa auch eine Leine oder Richtschnur legt) bei der Gebietsabgrenzung für einen sportlichen Wettkampf hingewiesen. Will man genauer sein, so werden ein straff gespannter Faden, die scharfe Kante eines guten Lineals oder auch eine optische Visierlinie (Lichtstrahl) als gute Bilder für den Begriff der ‚Geraden‘ verwendet.

Dem Mathematiker genügen jedoch solche anschauliche, aber grobe ‚Bilder‘ nicht. Er ist vielmehr bestrebt, von bloß intuitiven zu logischen Begriffen fortzuschreiten. Ein restlos befriedigendes Verfahren zur logischen Erfassung der geometrischen Grundbegriffe hat nun zuerst der berühmte Mathematiker *David Hilbert* (1862–1943, zuletzt Professor an der Universität in Göttingen) in seinem Buche *Grundlagen der Geometrie* dargestellt. Dieses epochemachende Buch ist zum Standardwerk der Grundlagenforschung, zum ‚Brevier‘ des Axiomatikers geworden. Die erste Ausgabe datiert vom Jahre 1899. Bis heute hat es acht Auflagen erlebt, obwohl seine gründliche Durcharbeitung große Ausdauer, viel

mathematisches Verständnis und geübtes Abstraktionsvermögen erfordert. Hilbert stellt sich darin die *Aufgabe, die Geometrie aus den drei Grundbegriffen Punkt, Gerade und Ebene und aus einem vollständigen und möglichst einfachen System von Grundsätzen neu aufzubauen*.

Hilbert beginnt nun seinen Aufbau der Geometrie mit der folgenden Erklärung: «Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: Die Dinge des *ersten* Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit  $A, B, C, \dots$ ; die Dinge des *zweiten* Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit  $a, b, c, \dots$ ; die Dinge des *dritten* Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ »

Hilbert geht somit nicht nur von der Einsicht aus, daß sich die Grundbegriffe nicht definieren lassen, sondern daß es außerdem für den Aufbau der Geometrie ganz belanglos ist, was die Grundbegriffe überhaupt sind, was ihr Name bedeutet. Das Wesen dieser Begriffe erschöpft sich in dem Umstande, daß sie den gegenseitigen Verknüpfungsmöglichkeiten – Spielregeln, wie man auch sagen könnte – genügen, die durch die Aufstellung der geometrischen Grundsätze postuliert werden. Eine Definition der Grundbegriffe wäre also ohnehin unnützlich.

Wir haben hier eine ähnliche Situation wie bei den Figuren des Schachspiels. Wenn diese noch nicht auf dem Schachbrett stehen, sondern in einer Schachtel liegen, unterscheiden sich die verschiedenen Figurenarten nur durch ihre Form und ihren Namen (Bauer, Läufer, Springer usw.). Ihre Bedeutung ergibt sich erst aus den Spielregeln.

### 3. Die geometrischen Grundsätze

Zum Begriff des geometrischen Grundsatzes gelangen wir durch eine ähnliche Überlegung, wie sie zur Einführung der geometrischen Grundbegriffe erforderlich war: Man rühmt der Geometrie und der Mathematik überhaupt nach, daß ihre Sätze *beweisbar* sind. Das will also besagen, daß man irgendeinen geometrischen Lehrsatz durch rein logische Denkopoperationen (Schlüsse) aus früher bewiesenen Sätzen herleiten kann. Und jene früheren Sätze stützen sich auf noch weiter zurückliegende usw. Da nun aber dieses Rückwärtsschließen ebenfalls nicht unendlich oft ausführbar ist, muß man einmal zu letzten (oder besser gesagt: zu ersten) Sätzen kommen, die nicht weiter zurückführbar sind. Diese unreduzierbaren und grundlegenden Sätze nennt man eben *Grundsätze*. Man verwendet für sie sehr häufig auch

den Ausdruck *Axiom*, der seit dem 5. Jahrhundert nach Christus in Gebrauch ist. Er wird vom griechischen Wort *axioo* (= ich fordere, glaube) abgeleitet.

Die geometrischen Grundsätze sind demnach *unentbehrliche Forderungen*, die nicht bewiesen werden, weil sie einfachste geometrische Wahrheiten enthalten, die auf keine einfacheren Wahrheiten zurückgeführt werden. Beinahe alle Grundsätze sind auch *unmittelbar einleuchtend*, so daß ein Beweis ohnehin überflüssig wäre. In der posthumen Ausgabe des Lehrbuches ‚*Éléments de géométrie*‘ vom Jahre 1873 von *A. M. Legendre* (1752–1833), einem großen französischen Geometer, steht geradezu die Definition: «L’axiome est une proposition évidente par elle-même.» Diese Erklärung ist jedoch vom heutigen Standpunkt der Grundlagenforschung entschieden abzulehnen.

Wie schon angedeutet, setzt sich die *Axiomatik*, das heißt die moderne axiomatische Behandlung der Geometrie, zum Ziel, die Gesamtheit der geometrischen Erkenntnisse aus einem vollständigen und dennoch möglichst einfachen System von Grundsätzen wie aus einem ‚Samenkorn‘ heraus, allein durch formale Logik, zu entwickeln. Es ist ein sehr beachtenswertes Verdienst des griechischen Mathematikers *Euklid*, daß er in seinem berühmten, um zirka 300 v. Chr. entstandenen Hauptwerk ‚*Elemente*‘ den ersten Versuch unternommen hat, diese axiomatische Methode zu verwirklichen. Das ideale Ziel, das schon Euklid vorschwebte, ist gewiß lückenlos, rein logische Ableitung aller damals bekannten geometrischen Sätze aus vorher vollständig aufzustellenden Voraussetzungen, also auch eine klare Scheidung zwischen den Grundlagen und dem Lehrgebäude der Geometrie. Den Haupteinwand, den man gegen das Euklidische System der fünf ‚Postulate‘ – unter denen an letzter Stelle das schon im Altertum als fragwürdig empfundene ‚Euklidische Parallelenaxiom‘ figuriert – ins Feld führen kann, ist seine ausgesprochene *Unvollständigkeit*.

Nach Euklid waren die Fortschritte in der Grundlagenfrage recht dürftig. Während der langen Zeitspanne von zwei Jahrtausenden bestehen die betreffenden Bemühungen fast ausschließlich in unzähligen und ganz vergeblichen Versuchen, das Parallelenaxiom als ableitbaren Satz zu entlarven. Erst seit dem Auftreten des genialsten Mathematikers der Neuzeit, *Karl Friedrich Gauß* (1777–1855), kam endlich Schwung in die Grundlagenforschung.

Die nun einsetzende erfolgreiche Nachprüfung der Fundamente der Geometrie galt zunächst aber mehr der Abklärung der Parallelenfrage und führte um das Jahr 1830 zu einem ganz unerwarteten Ergebnis, nämlich zur *Entdeckung einer Nicht-Euklidischen Geometrie*. Damit wurde gleichzeitig das Parallelenaxiom als echtes, unbeweisbares Axiom erkannt.

Eine erfolgreiche und für die axiomatische Behandlung aller (hiefür in Betracht kommenden) Gebiete vorbildliche Form erhielt die Axiomatik jedoch erst in David Hilberts schon erwähnten ‚*Grundlagen der Geometrie*‘. Hier ist nun ein System von Grundsätzen zusammengestellt, das 20 Axiome enthält. Sie werden zur besseren Übersicht in die folgenden fünf Gruppen eingeteilt:

- I. Axiome der Verknüpfung: Nr. 1–8
- II. Axiome der Anordnung: Nr. 9–12
- III. Axiome der Kongruenz: Nr. 13–17
- IV. Axiom der Parallelen: Nr. 18
- V. Axiome der Stetigkeit: Nr. 19–20

Jede Axiomgruppe drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Raumschauung aus. Zur ersten Axiomgruppe gehört zum Beispiel der wohlbekannte Grundsatz: *Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört*. Es werden hier die Grundbegriffe *Punkt* und *Gerade* miteinander verknüpft. Darum spricht man von einem *Verknüpfungsaxiom*.

Die Axiome der zweiten Gruppe bringen die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden und in einer Ebene zum Ausdruck. Ein wichtiges Beispiel lautet: *Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt*. Durch dieses Axiom wird die Gerade insbesondere zur Kreislinie in Gegensatz gebracht. Denn von drei voneinander verschiedenen Punkten auf einer Kreislinie kann *jeder* als ‚zwischen den beiden andern liegend‘ aufgefaßt werden.

Um die dritte Gruppe zu illustrieren, diene das letzte Kongruenzaxiom: *Wenn für zwei Dreiecke ABC und A'B'C' die Kongruenzen  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$  gelten, so ist auch stets die Kongruenz erfüllt:  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$* . Diese Aussage enthält beinahe den *ersten Kongruenzsatz*. Es fehlt nur noch der Nachweis, daß alsdann auch noch  $BC \equiv B'C'$  ist. Wenn man die fünf Kongruenzaxiome genauer studiert, so kommt man zur Einsicht, daß sie die Grundlage für die *Einführung des Messens* bilden.

Die letzte Axiomgruppe sei hier durch das berühmte, sogenannte ‚Axiom von Archimedes‘ vertreten: *Sind  $AB$  und  $CD$  ( $CD < AB$ ) irgendwelche Strecken, so gibt es auf der Geraden  $AB$  eine Anzahl von Punkten  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , so daß die Strecken  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  der Strecke  $CD$  kongruent sind und  $B$  zwischen  $A$  und  $A$  liegt.* Erst nach der Annahme dieses Grundsatzes ist der Vorgang des Messens vollständig sichergestellt. Denn zum Messen gehört vor allem die *Einheitsstrecke*, zum Beispiel  $CD$ . Hier ist übrigens die Kontaktstelle der reinen Geometrie mit der *Arithmetik*, weil beim Messen die *Zahl* zur Anwendung kommt.

Sämtliche Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz und der Stetigkeit genügen nicht, um die Geometrie lückenlos axiomatisch aufzubauen. Dazu muß in das System noch ein *Axiom über die Parallelen* aufgenommen werden, welches bei Hilbert wie folgt lautet: *Es sei  $a$  eine beliebige Gerade und  $A$  ein Punkt außerhalb  $a$ : dann gibt es in der durch  $A$  und  $a$  bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch  $A$  läuft und  $a$  nicht schneidet.* Diesem besonders wichtigen und wegen seiner Fragwürdigkeit von jeher zu heftigen Diskussionen Anlaß gebenden Postulat sollte man ein ausführliches Kapitel widmen können. Dies würde jedoch den knappen Rahmen eines Zeitschriftenartikels in unzulässiger Weise sprengen. Darum müssen wir uns hier mit den folgenden wenigen Bemerkungen begnügen und für eine eingehendere Auseinandersetzung mit der erregenden Frage des Parallelenaxioms auf die am Schluß angegebene Literatur verweisen.

Schon reiferen, selbständig denkenden Sekundarschülern kann das Parallelenaxiom (= PA) einiges Kopfzerbrechen verursachen. Die mannigfachen Denkschwierigkeiten, die beim tieferen Nachdenken über diesen Grundsatz auftreten, werden vor allem durch den Umstand hervorgerufen, daß man ihn meistens mit dem Begriff des *Unendlichen* verbindet. Man redet ja häufig davon, daß sich zwei Parallelen im Unendlichen schneiden oder vom unendlich fernen Schnittpunkt von zwei Parallelen. Die Berechtigung zu dieser fatalen Verknüpfung des PA mit der Vorstellung eines unendlich ausgedehnten Raumes entnimmt man eigentlich nur zwei Stellen am Anfang des ersten Buches der *Elemente* von Euklid (Definition der Parallelen und fünftes Postulat). In der neueren deutschen Ausgabe der ‚Elemente‘ von Clemens Thaer ist das fünfte Postulat wie folgt übersetzt worden: *Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.* Häufiger wird die von uns hervorgehobene Stelle

vorsichtiger (oder zutreffender?) mit ‚*bei unbegrenzter Verlängerung*‘ wiedergegeben. ‚Unbegrenzt‘ hat aber nicht unbedingt die Bedeutung von ‚ins Unendliche ausgedehnt‘. Man denke zum Beispiel an die Verhältnisse auf einer Kugeloberfläche, welche unbegrenzt und doch endlich ist. Außerdem ist es verwunderlich, wenn man annehmen muß, daß Euklid sich einen unendlich ausgedehnten Raum gedacht habe. Denn er stand gewiß unter dem Einfluß des zu seiner Zeit herrschenden Weltbildes von Plato und Aristoteles, das einen *endlichen* Raum postuliert. Aristoteles hat sogar sechs Beweise für die Endlichkeit des Raumes geliefert. Es entsteht somit die Frage, wie die zwei betreffenden Stellen in der ursprünglichen Fassung der ‚Elemente‘ in Wirklichkeit gelautet haben. Da unseres Wissens in der Fachliteratur nirgends ausdrücklich gesagt wird, daß das Original nicht mehr vorhanden sei, so besteht immer noch die Möglichkeit, diese Frage durch kompetente Philologen abklären zu lassen.

Das Auftreten der angedeuteten Denkschwierigkeiten läßt sich vermeiden, wenn man in den Lehrbüchern und im Unterricht dem PA (wie bei Hilbert) eine Fassung gibt, in welcher das ominöse Wort ‚unendlich‘ gar nicht vorkommt. Übrigens kann man das PA ohne weiteres durch andere, *gleichwertige* Grundsätze ersetzen, zum Beispiel: *Die Punkte, die von einer Geraden gleich weit entfernt sind und sich auf der einen Seite dieser Geraden befinden, liegen auf einer Geraden.*

#### 4. Notwendige Eigenschaften eines Axiomensystems

Nicht nur für die Geometer des Altertums, sondern bis in die Neuzeit war jedes Axiom *eine an sich einleuchtende Wahrheit*. Nach dieser Auffassung ist also jedes Axiom nach seiner *Evidenz* zu beurteilen. Dem PA machte man nun schon im Altertum den Vorwurf, daß es *nicht evident genug* sei und eher den Eindruck eines verwickelten geometrischen Satzes erweckte. Darum versuchten schon die ersten Bearbeiter und Erklärer des Euklidischen Textes das PA als Folgerung aus andern Sätzen abzuleiten oder durch ein anderes, eine größere Evidenz besitzendes Postulat zu ersetzen. Wie schon erwähnt, wurden durch viele Jahrhunderte hindurch immer wieder die größten und erfolglosen Anstrengungen gemacht, die Abhängigkeit des PA von andern Sätzen aufzudecken, bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts endlich Zweifel an der alleinigen Berechtigung der Euklidischen Geometrie auftauchten. Und damit trat die Wendung zur endgültigen Lösung des großen Rätsels um das PA ein. Es war nämlich dem Göttinger Professor *K. F. Gauß* vorbehalten, als erster die entscheidende Frage aufzuwerfen: *Ist es nicht möglich, ein logisch einwandfreies System einer Geometrie aufzubauen, die ein dem PA widersprechendes Axiom und dazu die übrigen Euklidischen Annahmen voraussetzt?*

Eine solche Geometrie – eine sogenannte *Nicht-euklidische Geometrie* – wurde nun tatsächlich am An-

fang des 19. Jahrhunderts entdeckt, und zwar fast gleichzeitig und ganz unabhängig voneinander von vier verschiedenen Mathematikern, nämlich von Gauß, dem Ungar *J. Bolyai*, dem Russen *I. Lobatschewskij* und dem Deutschen *F. K. Schweikart*. Die Antwort dieser vier Geometer auf die zwei Jahrtausende alte Frage lautet übereinstimmend: *Das Euklidische fünfte Postulat läßt sich nicht beweisen, da es uns mit Hilfe der davon verschiedenen Hypothese der Existenz von zwei Parallelen (zu einer Geraden durch jeden nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt) gelungen ist, eine widerspruchsfreie Geometrie aufzubauen.*

Sonderbar ist, daß alle vier Männer, die vorhin erwähnt wurden, Gauß vielleicht ausgenommen, an der zweiten Möglichkeit einer Nichteuclidischen Geometrie vorbeigegangen sind. Erst *Bernhard Riemann* (1826–1866, Professor der Mathematik in Göttingen) hat eine solche Möglichkeit vollständig erkannt. Riemann nahm den Raum als *unbegrenzt*, aber als *endlich* an und hat eine widerspruchsfreie Geometrie entwickelt, in der es *keine Parallelen* gibt. Damit stellte Riemann der *Nichteuclidischen Geometrie erster Art* (oder hyperbolischen Geometrie) von Gauß und seinen drei Zeitgenossen eine *Nichteuclidische Geometrie zweiter Art* (oder elliptische Geometrie) entgegen.

Diese knappen Hinweise auf die Existenz von mehreren Geometrien werden bei manchem Leser verschiedene Fragen hervorgerufen haben, insbesondere diese: *Wie muß denn ein Axiomensystem beschaffen sein, damit es als geeignete Grundlage einer Geometrie gelten kann?* Welches sind also die allgemeinen Eigenschaften eines einwandfreien Axiomensystems (= AS), aus dem sich das ganze Lehrgebäude der Geometrie rein formal durch logische Deduktion entwickeln läßt? Bei den kritischen Untersuchungen, die mit den Grundlagen der Geometrie verknüpft sind, haben sich die folgenden Kriterien immer mehr befestigt:

1. Die wichtigste und selbstverständlichste Eigenschaft, die ein System von Axiomen besitzen muß, ist seine *Vollständigkeit*. Unter einem vollständigen AS versteht man ein solches, in dem *alle* zum Aufbau der Geometrie notwendigen Axiome wirklich aufgezählt sind. Es sollen keine Grundsätze *stillschweigend* eingeführt werden. Es darf nicht vorkommen, daß man sich nachträglich aufs neue auf die Anschauung berufen muß, um im Aufbau der Theorie weiterzukommen, sondern alle weiteren geometrischen Ur-

teile sollen sich nur durch logisches Schließen allein folgern lassen. Es wäre also ein grober Verstoß gegen die Sauberkeit des Verfahrens, wenn man nach der Erstellung des Fundamentes immer noch die anschauungsgemäße Evidenz mitspielen lassen wollte.

2. Eine weitere unerläßliche Forderung ist die *Widerspruchlosigkeit* der Axiome. Es muß gewiß sein, daß sich aus den Grundlagen nie zwei Folgesätze ergeben, von denen der eine das Gegenteil des andern behauptet. Die Forschungsarbeit des Axiomatikers befaßt sich in erster Linie mit der Prüfung der Axiome auf diese Eigenschaft.

3. Schließlich stellt man an ein ideales AS noch die Forderung der *Unabhängigkeit*. Es dürfen keine überflüssigen Bestandteile in einem logisch einwandfreien AS enthalten sein, das heißt keine Sätze, die sich aus andern Aussagen dieses Systems herleiten lassen. Es sollte hier ein unerbittliches ‚Entweder-Oder‘ herrschen: Wenn man sich einmal für ein bestimmtes AS entschieden hat, so sollte jeder geometrische Satz alsdann *entweder* ein Axiom *oder* eine ableitbare Beziehung sein. Bei der Feststellung der Unabhängigkeit eines Grundsatzes hat man sich somit zu vergewissern, daß die noch so weitgetriebene Kombination der gegebenen Aussagen niemals den betreffenden Satz als Schlußfolgerung liefert.

Es hat sich allerdings immer deutlicher erwiesen, daß sich der restlosen Erfüllung dieser dritten Forderung erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellen, insbesondere dann, wenn sich ein Axiomatiker wie zum Beispiel *F. Gonseth* (Professor der Mathematik an der ETH, Zürich) ernsthaft bemüht, seinem systematischen Aufbau der Geometrie auch eine *natürliche* und *harmonische* Gestalt zu geben, die für eine konsequente Behandlung auf der obersten Stufe einer höheren Mittelschule in Frage kommen kann.

Bemerkenswert ist der Umstand, daß Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit auf das engste zusammenhängen. Denn ein Satz ist von einem AS unabhängig, wenn seine Negation mit dem AS nicht in Widerspruch steht. Daraus folgt, daß dieselben Methoden, die für den Nachweis der Widerspruchlosigkeit Verwendung finden, auch für Unabhängigkeits-Untersuchungen in Betracht kommen. Man verfügt über verschiedene derartige Methoden. Die wichtigste und erfolgreichste ist die *Modellmethode*, die sich wie folgt kurz beschreiben läßt: Es bedeute  $A_1$  ein Axiomensystem, dessen Widerspruchlosigkeit nachgewiesen werden soll. Ferner sei  $A_2$  ein Axiomensystem, von dem wir wissen, daß es widerspruchsfrei ist. Gelingt es nun, durch geeignete Namengebung – durch einen passenden ‚Schlüssel‘ – die Axiome von  $A_1$  umkehrbar eindeutig auf die Axiome von  $A_2$  ‚abzubilden‘, so ist auch das System  $A_1$  widerspruchsfrei. Man sagt dann, das System  $A_2$  sei ein

Modell des Systems  $A_1$ . Die Modellmethode führt also die Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems  $A_1$  auf die eines andern  $A_2$  zurück.

Aus diesen Ausführungen geht hervor, daß die frühere Forderung der *Evidenz* als wesentliche Eigenschaft der geometrischen Grundsätze endgültig fallen gelassen wird. Wir haben außerdem die Einsicht gewonnen, daß das AS einer Geometrie *nicht eindeutig* festgelegt werden kann. Die Wahl der notwendigen Grundsätze unterliegt vielmehr einer gewissen Willkür. Es sind denn auch in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts eine ganze Reihe von neuen Axiomensystemen aufgestellt worden, die wesentlich voneinander verschieden sind. Unter ihnen ist neben dem AS von Hilbert jenes von Gosseth das beachtenswerteste. Eine Aussage, die in dem einen System als Axiom auftritt, kann in einem andern etwa als ableitbarer Satz erscheinen.

Es drängen sich noch folgende Fragen auf: Welches ist nun die wahre Geometrie, die Euklidische oder eine der Nichteuklidischen? Wie steht es mit der Gültigkeit dieser Geometrien im Raume der Erfahrung, das heißt in der uns durch die Sinnesorgane vermittelten Welt der Erscheinungen? Und was ist eine Geometrie überhaupt? In unserem Buche über *„Geometrie und Philosophie“* (siehe das Literaturverzeichnis am Schluß) haben wir versucht, auf diese Fragen eine auch für Nichtmathematiker verständliche Antwort zu geben. Wegen der begreiflichen Beschränkung des zur Verfügung stehenden Raumes, müssen wir uns hier mit der folgenden *Zusammenfassung* begnügen:

Jede der drei Geometrien läßt sich aus einem vollständigen und unabhängigen AS widerspruchsfrei aufbauen und ist daher vom rein logischen Standpunkt *gleichberechtigt*. Eine Geometrie ist ferner ein *Gedankenschema*, das eine Grundlage liefert für die Beschreibung des Erfahrungsraumes, für die Beherrschung der Bewegungsmöglichkeiten oder Objekte und für das Messen der Entfernungen, der Flächen- und Volumeninhalte. Wie ein Stadtplan oder eine Landkarte liefert uns die Geometrie, wie jedes Schema, nicht eine getreue, sondern nur eine summarische Wiedergabe der Wirklichkeit.

*Schlußbemerkungen:* Die große Bedeutung der Axiomatik besteht darin, daß sie nicht nur für die Geometrie, sondern auch für alle übrigen mathematischen Disziplinen, insbesondere für die *Arithmetik*, und darüber hinaus noch für weitere Sachgebiete (in erster Linie für die theoretische Mechanik = *„Méca-*

*nique rationelle“*) verwendbar ist. Kennt man von irgendeiner exakten, deduktiven Wissenschaft ein AS, und hat man die Gewißheit, daß es vollständig, in sich widerspruchsfrei ist und daß die einzelnen Axiome voneinander unabhängig sind, so läßt sich das ganze Sachgebiet rein deduktiv aus dem AS entwickeln. Die axiomatische Methode führt somit eine tiefgehende logische Klärung einer Wissenschaft herbei, die auf keine andere Art erzielt werden kann. Dieser Einsicht gibt Hilbert in seiner Abhandlung *„Axiomatisches Denken“* mit den folgenden vielsagenden Worten Ausdruck: «Ich glaube, alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit unmittelbar der Mathematik. Durch Vordringen zu immer tieferliegenden Schichten von Axiomen gewinnen wir auch in das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewußt.»

#### Literatur

F. Gosseth und P. Marti: *Leitfaden der Planimetrie*, zweiter Teil. 3. Auflage, S. 108–155 (*„Oberstufe“*), Orell Füßli, Zürich.

F. Gosseth: *Elementare und Nichteuklidische Geometrie* in axiomatischer Darstellung und ihr Verhältnis zur Wirklichkeit. Orell Füßli, Zürich. (Gleicher Inhalt wie in erwähnter *„Oberstufe“*.)

F. Gosseth: *La géométrie et le problème de l'espace*. Ausgabe in sechs getrennten Broschüren. Editions du Griffon, Neuchâtel. (Empfohlen wird insbesondere Teil 3: *L'édification axiomatique*.)

G. Hauser: *Geometrie und Philosophie*. 2. Auflage, 1946. Räber & Cie., Luzern. (Dieses Buch ist im Buchhandel schon längst vergriffen, kann aber von wissenschaftlichen Bibliotheken bezogen werden.)

---

*Die Problematik der Staaten, des Abendlandes wie der Weltkirche ist, grob gesagt, dreimal der Mensch: wie man ihn unterbringt und ernährt; wie man ihn beschäftigt, so daß er sich selbst ernährt: die wirtschaftliche und soziale Erneuerung; und wie man ihn zu sich selbst bringt: die geistige und religiöse Erweckung.*

A. DELP