Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 46 (1959)
Heft: 6-7

Artikel: Einige bemerkenswerte Grössenbeziehungen bei der Ellipse
Autor: Schwegler, Theodor
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-531385

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

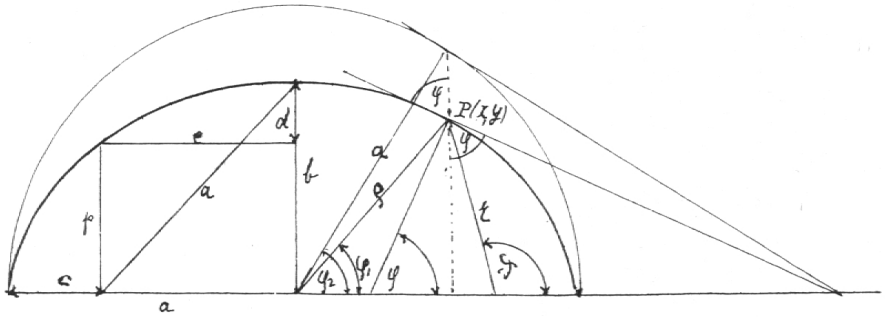
zwischen den Bestimmungslinien und den Funktionsbildern zu zeigen und auszuwerten, um den Zusammenhang zwischen der Gleichung einer Kurve und dem Bild der Kurve inniger werden zu lassen.

Einige bemerkenswerte Größenbeziehungen bei der Ellipse

P. Dr. Theodor Schwegler OSB, Einsiedeln

Vorbemerkung: Über die Bedeutung der in Frage stehenden Größen siehe Zeichnung. Als bekannt sind die folgenden Beziehungen vorausgesetzt:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\,;\ 0 < \varepsilon < 1;\ p = \frac{b^2}{a} = a\,(1 - \varepsilon^2)$$



Dann ergeben sich die folgenden bemerkenswerten Beziehungen:

1) $\frac{c}{p} = \frac{a - e}{p} = \frac{a\,(1 - \varepsilon)}{a\,(1 - \varepsilon^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \begin{cases} < 1 \\ > 1/2 \end{cases}$.

2) $\frac{d}{e} = \frac{b - p}{e} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} - (1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon}$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon + \binom{1/2}{2} \cdot \varepsilon^3 - \binom{1/2}{3} \cdot \varepsilon^5 + \binom{1/2}{4} \cdot \varepsilon^7 \ldots \equiv f(\varepsilon)$$

Wird nun $f(\varepsilon)$ nach der einen oder der anderen Form ausgewertet, so ergibt sich leicht, daß

a) wenn $\varepsilon \to {}^{0}_{1}$, so $f(\varepsilon) \to 0$;

b) daß das Maximum von $f(\varepsilon)$ bei $\varepsilon = 0{,}786$ liegt, daß also $f(\varepsilon)_{max} = 0{,}300\,284$; m. a. W.: $\frac{d}{e}$ kann den Wert von 0,300 284 nicht überschreiten.

Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch, wenn $\sqrt{1 - \varepsilon^2} \equiv z$ gesetzt und von der so entstehenden Funktion $f(z) = \frac{z - z^2}{\sqrt{1 - z^2}}$ das Maximum gesucht wird, also

$$f'(z) = \frac{z^3 - 2z + 1}{(1 - z^2)^{3/2}} \left(\equiv \frac{z^3 + 3pz + q}{(1 - z^2)^{3/2}}\right) = 0.$$

Da im vorliegenden Falle $0 < z < 1$, braucht nur der Zähler von $f'(z)$ berücksichtigt zu werden, und da die Diskriminante dieser kubischen Gleichung: $q^2 - p^2 = (1/2)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 < 0$, ist die *trigonometrische* Lösung anzuwenden. Setzt man

$$\cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{-p^3}} = -\sqrt{27/32} \text{ dann: } \varphi = 156°42'58{,}5''$$

Die drei reellen Lösungen der Gleichung $z^3 - 2z + 1 = 0$ sind dann $z_1 = 2\sqrt{-p} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} = 1$

$$z_2 = -2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60°\right) \equiv 0{,}618\,0336;$$

$$z_3 = -2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60°\right) = -1{,}618\,0336$$

Es liegt auf der Hand, daß im vorliegenden Falle nur z_2 in Frage kommt, und seinem Wert entspricht $\varepsilon = 0{,}78615$

3) $\frac{d}{c} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} - (1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} - (1 + \varepsilon)$
$\equiv f(\varepsilon)$

Man sieht leicht, daß für $0 < \varepsilon < 1$: $0 < f(\varepsilon) < \infty$. Ferner ergibt sich die folgende Reihe:

$$\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} - (1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} - (1 + \varepsilon)$$
$$= (1 + \varepsilon)^{1/2} \cdot (1 - \varepsilon)^{1/2} - (1 + \varepsilon)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + \frac{3}{8} \cdot (\varepsilon^4 + \varepsilon^5) + \frac{5}{16} \cdot (\varepsilon^6 + \varepsilon^7) + \frac{35}{128} \cdot (\varepsilon^8 + \varepsilon^9) + \frac{63}{256} \cdot (\varepsilon^{10} + \varepsilon^{11}) + \ldots$$

Das Auffällige an dieser Reihe ist, daß die für je zwei aufeinanderfolgenden Potenzen von ε auftretenden Koeffizienten dieselben sind wie die der aufeinanderfolgenden Glieder des in einer unendlichen konvergenten Reihe entwickelten Ausdruckes $(1-\varepsilon)^{-1/2}$ oder $(1:\sqrt{1-\varepsilon})$, deren allgemeines Glied lautet

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots 2n}(-1)^n\cdot\varepsilon^n$$

Erweitert man den Zähler durch den Nenner und sondert man aus jedem Gliede des Nenners den Faktor 2 bzw. 2^2 aus, so erhält man leicht die bequemere Schreibweise

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}(-1)^n\cdot\varepsilon^n = \qquad (-1)^n\binom{2n}{n}\cdot\frac{\varepsilon^n}{2^{2n}}.$$

Wie man sich leicht vergewissert, lautet dann das allgemeine Glied des in einer unendlichen Reihe entwickelten Ausdrucks $(1+\varepsilon)^{1/2}$

$$(-1)^{n+1}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{\varepsilon^n}{2^{2n}(2n-1)}.$$

4) Für welches ε erreicht das Rechteck $e\cdot p$ (wenn $a=1$ gesetzt wird) sein Maximum?

$$f(\varepsilon)=\varepsilon(1-\varepsilon^2)=\varepsilon-\varepsilon^3;\quad f'(\varepsilon)=1-3\varepsilon^2=0;$$
$$\varepsilon=\sqrt{1/3}=0{,}57735\qquad b=\sqrt{2/3};\qquad p=2/3$$

5) Wenn statt ε die Abplattung $\alpha=\frac{a-b}{a}=1-m$ (wobei $m\equiv\frac{b}{a}$) gegeben ist, wie dies bei der Ellipse eines Erdmeridians der Fall ist, so ist offenbar

$$\varepsilon=\sqrt{1-(1-\alpha)^2}=\sqrt{2\alpha-\alpha^2}$$

Da nach den seit 1924 international angenommenen Maßzahlen bei der Erde $a=6\,378\,388$, $b=6\,356\,912$ beträgt, ist

$$\alpha=1/297\qquad \text{und } m=0{,}996632.$$
$$\varepsilon=\sqrt{2/297-(1/297)^2}=0{,}081992=1/12{,}1963.$$

(Man vgl. Anmerkung.)

6) In welchem Verhältnis stehen die Winkel φ_2, φ_1 (geozentrische Breite), φ (geographische Breite) und die Anomalie ϑ zueinander?

Da in der Ellipse $x=a\cdot\cos\varphi_2$, $y=b\cdot\sin\varphi_2$, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{y}{x}=\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi_2;\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{a^2y}{b^2x}=\frac{a}{b}\cdot\operatorname{tg}\varphi_2;$$

$$\underline{\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}^2\varphi_2.}$$

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\vartheta}=a-\varepsilon x=a(1-\varepsilon\cos\varphi_2)$$

$$\text{also } 1-\varepsilon\cdot\cos\varphi_2=\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\vartheta};$$

$$\text{Daraus } \cos\vartheta=\frac{\cos\varphi_2-\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\cos\varphi_2},$$

$$\text{und } \cos\varphi_2=\frac{\cos\vartheta+\varepsilon}{1+\varepsilon\cdot\cos\vartheta}.$$

7) $$\varrho^2=x^2+y^2=a^2\cos^2\varphi_2+b^2\cdot\sin^2\varphi_2$$
$$=\cos^2\varphi_2(a^2+b^2\cdot\operatorname{tg}^2\varphi_2)$$
$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi_2}\cdot\left(a^2+b^2\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\operatorname{tg}^2\varphi\right)$$
$$=\frac{a^4+b^4\cdot\operatorname{tg}^2\varphi}{a^2+b^2\cdot\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$\underline{\varrho=a\sqrt{\frac{1+m^4\operatorname{tg}^2\varphi}{1+m^2\operatorname{tg}^2\varphi}}}$$

Die Rechnung wird stark vereinfacht, wenn die sog. Additions-Logarithmen angewendet werden, wie diese in den Logarithmen-Tafeln von Herger (5stellig) und Bremiker (6stellig) geboten werden.

Wird diese Rechnung für unsere Breiten durchgeführt, etwa für $\varphi=47°\,5'$ und $47°\,10'$, so ergibt sich, daß mit wachsendem φ ϱ je Bogenminute um 6 m abnimmt. Am Äquator beträgt die Abnahme auf 1° 7 m und an den Polen auf 1° 5 m.

8) Für den Umfang der Ellipse bzw. für die Länge eines Meridians bieten die Logarithmentafeln von Voellmy sowohl Annäherungsformeln wie, für alle Hundertstel von m, 4stellige Werte, wie solche die Infinitesimal-Rechnung liefert.

Während man für den Quadranten ohne weiteres findet: $\frac{U}{4}=\frac{a\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3}\ldots\right]$ ist die Berechnung eines beliebigen Kurvenstückes immer sehr umständlich, gleichviel ob man beim Integrieren vom Bogen-Elemente

$$ds=a\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2t^2}{1-t^2}}\cdot dt-x\equiv a\cdot t;\ t\leqslant 1-$$

oder $ds=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$ ausgeht.

Einen Ersatz dafür bietet die Benützung des Krümmungsradius von φ

$$\varrho_1=\frac{[a^2-\varepsilon^2x^2]^{3/2}}{a\cdot b}=m^2\cdot a\left[\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\varepsilon^2\operatorname{tg}^2\varphi}\right]^{3/2}$$

Da dieser nach den Beispielen in Nr. 7 bei einem kleinen Kurvenstücke als konstant betrachtet werden kann, ist das (im Meridian gelegene) Kurvenstück angenähert $s=\varrho_1\cdot\operatorname{arc}\Delta\varphi$, wobei $\Delta\varphi$ = Differenz der geographischen Breiten.

Anmerkung: Unlängst ging durch die Presse die Mitteilung, genaue Messungen hätten an den Polen ein Plus bzw. ein Minus von 5 und 51 m ergeben. Dies ist sehr wohl möglich. Aber um auf Grund dieser Entdeckung den Erd-‚Apfel' zu

einer Erd-‚Birne' werden zu lassen, wie eine Zeitungs-‚Ente' dies tat, liegt kein Grund vor, machen doch jene Korrekturen nicht einmal einen Millionstel bzw. einen Hunderttausendstel des Erdradius aus; selbst auf einem Globus von 1 m Durchmesser wäre wegen der Abplattung der Poldurchmesser nur r. 3,4 mm kürzer als der Äquatordurchmesser. Demnach ist die Gestalt der Erde eher eine *Kugel*, als die eines Apfels, und erst recht die einer Birne.

Umschau

Zum Schutze der weiblichen Jugend

Aus dem Jahresbericht des Schweiz. Kath. Mädchenschutzvereins

Die Mehrzahl unserer jungen Mädchen und ihrer Eltern weiß wenig oder nichts von unserer Existenz. Propaganda und Reklame sind heute an einem Punkt ihrer Entwicklung angelangt, wo, von Fachleuten betreut, unter Ausnützung der psychologischen Faktoren, die Aufmerksamkeit des Publikums pausenlos in Anspruch genommen wird. Die bescheidenen Mittel eines gemeinnützigen Werkes vermögen in einem solchen Propagandawettlauf nicht mehr durchzudringen. Wir müssen uns an die Mitarbeit aller wenden, die guten Willens sind.

Sekretariate und Berufsberatung

Vor der Schulentlassung haben viele junge Mädchen über ihre Berufswahl bereits entschieden; andere zögern noch. Diesen kommen unsere Berufsberatungen zu Hilfe. Diese Hilfe ist wichtig.
Verschiedene unserer Sekretariate, darunter besonders diejenigen von St. Gallen, Zürich, Baden, Schwyz, Uri, Nidwalden, Stans, Weesen, Oberwallis, erfüllen diese Aufgabe in hervorragender Weise. Im Jahre 1957 wurden mehr als 2500 junge Mädchen beraten und einem Beruf zugeführt, der ihren persönlichen Neigungen entsprach.

Stellenvermittlung

In der kritischen Situation, in der sich heute wegen des Mangels an Hausangestellten der Hausdienst befindet, vergißt man allzu oft, daß unsere Stellenvermittlungen nicht als Zuflucht für verzweifelte Hausfrauen gegründet wurden, sondern für unsere jungen Arbeitsuchenden, um ihnen eine Stelle zu verschaffen, um unseren jungen Mädchen eine hauswirtschaftliche Ausbildung zugänglich zu machen, die sich heute notwendiger erweist als je. Und schließlich müssen wir auch unseren Hausfrauen, das heißt den Familien, zu Hilfe kommen. Im Stellenvermittlungsbureau besitzen wir einen unersetzlichen Ort, der vielen jungen Mädchen die Dienste unseres Werkes zugänglich macht.
Die Schweizerische Arbeitsgemeinschaft für den Hausdienst, zu deren Gründern unser Verband zählt, studiert neue Möglichkeiten des Hausdienstes und bemüht sich vor allem um die Haushaltlehre.
Verschiedene Kantonalvereine kümmern sich um die Freizeitgestaltung der jungen Mädchen und veranstalten jede Woche einen Abend der Belehrung oder der Unterhaltung. Solche Bestrebungen sind hauptsächlich aus Zug, Luzern und Nidwalden zu erwähnen.

Stellenvermittlung für das Ausland

Diese Bureaux – es sind deren fünf in der Schweiz – können eine auf den ersten Blick erfreuliche Tätigkeit melden. Im Jahre 1957 konnten durch sie 428 junge Mädchen Auslandstellen finden, nämlich 291 in England, 77 in Frankreich, 25 in den USA, 23 in Italien, die andern in verschiedenen Ländern.
Denkt man jedoch an die 3000 bis 4000 jungen Schweizerinnen, die alljährlich nach England reisen, an die Hunderte, die sich nach Frankreich wenden oder nach den USA, dann können wir uns nicht verhehlen, daß unsere Dienste nur von einer verschwindend kleinen Minderheit in Anspruch genommen werden. Wir müssen leider feststellen, daß allzuoft junge Mädchen Stellen im Ausland annehmen, ohne die allernotwendigsten Erkundigungen einzuziehen, und sich dadurch den schlimmsten Gefahren aussetzen.
Die Abreise ins Ausland, um unentwirrbaren Problemen zu entfliehen, bringt oft das Gegenteil einer Hilfe. Junge Mädchen und deren Eltern seien nachdrücklich darauf hingewiesen. Unsere Sekretärinnen können aus ihren Kenntnissen und ihrer Erfahrung nützliche Hinweise geben und sind auch mit den Arbeitsbedingungen in den verschiedenen Ländern gut vertraut.

Bahnhofmission

Im Gespräch über die Bahnhofmission wurde diese einmal die «Visitenkarte des Mädchenschutzes» genannt.
Es handelt sich hier tatsächlich um das bekannteste der Werke unseres Verbandes. Doch muß es ausgesprochen werden, daß unsere dreizehn vollamtlichen Bahnhofhelferinnen einen Sozialdienst versehen, der zu einem Teil den jungen Mädchen zukommt, für die er geschaffen wurde. Der größte Teil ihres Dienstes kommt Müttern und Kindern, Alten und Behinderten zugut. Man kann es nicht genug wiederholen, wie wertvoll auch im Jahre 1957 die unermüdliche Hilfsbereitschaft unserer Bahnhofhelferinnen war, deren Dienste in 97 442 Fällen in Anspruch genommen wurden.

Heime

Im Jahresbericht eines Reisebureau könnte allenfalls der Vermerk gefunden werden, die 28 verbandseigenen oder affiliierten Heime des Mädchenschutzverbandes hätten im Jahre 1957 insge-