

Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 47 (1960)
Heft: 10: Anregungen zum Mathematik- und Physikunterricht in der Sekundarschule

Artikel: Die Situation des Geometrieunterrichtes auf der Sekundarschule
Autor: Jeger, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-532124>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

kurs' gewidmet ist. Wir sind überzeugt, daß diese auf bester Einsicht in das Denk- und Aufnahmevermögen der Schüler beruhenden Darlegungen äußerst nützliche und anregende Hinweise und Gedanken vermitteln und helfen werden, den Anfangsunterricht der Geometrie so zu gestalten, wie es dem Schüler, aber auch wie es dem Bildungswert dieses Faches entspricht. Sehr gute Illustrationen erhöhen noch den Wert dieser empfehlenswerten Publikation, die indessen den Lehrer zwingt, eine gesunde Auswahl aus diesen Anregungen zu treffen, um im Rahmen des Möglichen zu bleiben.

Die Situation des Geometrieunterrichtes auf der Sekundarschule¹

Dr. M. Jeger, Luzern

I. Grundsätzliche Bemerkungen

Vom Kirchenvater Ambrosius stammt der uns Mathematikern wenig schmeichelnde Ausspruch, daß Astronomie und Geometrie treiben damit gleichbedeutend sei, das Seelenheil für müßige Dinge zu vernachlässigen. Seit Ambrosius haben sich die Zeiten geändert; der Geometrieunterricht wird heute an den meisten Schulen im Bewußtsein erteilt, daß die Geometrie dem Seelenheil absolut nicht im Wege steht. Aber trotzdem stößt der Geometrieunterricht auf der Sekundarschulstufe auch heute noch auf verschiedene Hindernisse, und von diesen Dingen soll vorerst die Rede sein.

Daß der Geometrieunterricht für viele Lehrkräfte eine harte Nuß bedeutet, liegt in der Natur der Sache

¹ Die vorliegenden Gedanken wurden in Vorträgen im Rahmen eines Mathematikurses des Sekundarlehrervereins des Kantons Luzern (17. Dezember 1959) geäußert.

begründet. Die Geometrie bildet in unserem Sekundarschulprogramm so etwas wie eine singuläre Stelle. Ich meine damit folgendes: *Die Geometrie ist das einzige wissenschaftliche Fach auf der Sekundarschule*, und zwar deswegen, weil schon im Elementarunterricht die gleichen Gesichtspunkte hervortreten, welche die wissenschaftliche Geometrie beherrschen. So spielt zum Beispiel die Abstraktion schon bald eine wichtige Rolle; wir arbeiten ja im Unterricht mit idealen Gebilden wie Punkten, Geraden, Dreiecken. Dann denke man an den logisch-deduktiven Aufbau des ganzen Lehrgebäudes, bei dem das Beweisen im Unterricht eine zentrale Stellung erhält.

Besinnen wir uns zunächst auf die eigentlichen Ziele des Geometrieunterrichtes. Da sind einmal die Entwicklung und die Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens und die Schulung im folgerichtigen Schließen und Beweisen. Das räumliche Anschauungsvermögen ist eine Fähigkeit, die sich erfahrungsgemäß bei den Schülern nie plötzlich einstellt, wie etwa die Fähigkeit des Quadratwurzelausziehens. Wir haben im Unterricht ständig auf dieses Ziel hinzuarbeiten und darauf Bedacht zu nehmen, daß die einzelnen Schüler hier außerordentlich verschieden rasch ansprechen. Im weitern ist der Geometrie übertragen, das schöpferische Denken und die Kombinationsgabe zu wecken und die Dinge um uns herum in intuitiver Schau nebeneinander zu stellen. Daneben sind noch einige rein praktische Bedürfnisse zu befriedigen, wozu etwa die Flächen- und Volumenberechnungen zu zählen sind. Diese Unterrichtsziele auf der Unterstufe sind im großen ganzen unabhängig vom Schultypus. Bei der Sekundarschule besteht nun zunächst die Schwierigkeit, den elementargeometrischen Stoff so zu ordnen, daß sowohl schon nach zwei Schuljahren wie dann aber auch nach drei Schuljahren ein gewisser Abschluß erreicht wird. Es kann daher nur ein ausgewählter Teil der Elementargeometrie systematisch entwickelt werden. Andere Problemkreise wie gerade die Flächen- und Volumenberechnungen müssen mehr experi-

Wenn unsere Schüler ihre Hausaufgaben mehrmals vergessen haben, dann ...

Manche unserer Kolleginnen und Kollegen haben aber noch immer vergessen, das längst fällige Halbjahrabonnement der *'Schweizer Schule'* von Fr. 9.75 einzubezahlen. Und doch sind sie regelmäßige Bezüger der Zeitschrift.

mentell zugänglich gemacht werden. Dieser gelegentliche Verzicht auf logisch-deduktives Vorgehen darf nun aber keinesfalls als Methode zur Einhaltung eines bestimmten Zeitplanes gehandhabt werden; er ist eine Konzession an die geistige Reife unserer Schüler. Namhafte Methodiker sind sogar der Meinung, daß der Geometrieunterricht überhaupt nicht anders als experimentell begonnen werden sollte. Wir wollen hier ein wenig auf diese Reformideen eingehen. Zum bessern Verständnis der modernen Forderungen an den Geometrieunterricht sei ein kurzer historischer Rückblick vorangestellt.

Zur Zeit des Wiedererwachsens wissenschaftlicher Betätigung während der Renaissance war es selbstverständlich, daß man bei den Alten anknüpfte. Für die Geometrie war dies bei *Euklid* und seinen *Elementen*². In diesem Hauptwerke Euklids ist der geometrische Stoff ganz einseitig ausgewählt. Nicht nur fehlen weitgehend die Anwendungen; auch die Pflege der Raumanschauung ist fast vollständig unterdrückt. Im Vordergrund steht die abstrakt-logische Deduktion eines ausgewählten Stoffgebietes aus ein paar Grundsätzen, sogenannten Axiomen. Dabei wird die Geometrie so sehr der Logik unterstellt, daß zum Beispiel geometrisch handgreifliche Dinge wie etwa der Parallelenbegriff erst relativ spät auseinandergesetzt werden, eben dann, wenn sie ins logische Konzept passen. Ein Satz wird dort formuliert und

² Euklid lebte um 300 v. Chr. in Alexandria. Dem damaligen wissenschaftlichen Betrieb entsprechend ging bei der Abfassung seiner *Elemente* die Sammlung und Ordnung des vorhandenen Materials der frei weitertreibenden Forschung voran. Auch weiß man heute, daß die *Elemente* keine Zusammenfassung des gesamten geometrischen (und noch weniger des gesamten mathematischen) Wissens der damaligen Zeit darstellen. Sie waren gedacht als eine Einführung in das Studium der Geometrie und damit der Mathematik überhaupt, wie die platonische Schule sie als Vorbereitung für allgemeine philosophische Studien für notwendig hielt. Die *Elemente* bestehen aus 13 Büchern (Kapiteln), von denen 11 der Planimetrie und Arithmetik und nur 2 der Raumgeometrie gewidmet sind.

bewiesen, wo er sich ins logische Schema einordnet, und nicht dort, wo er sich durch die geometrischen Verhältnisse aufdrängt. Bei Euklid steht zuerst die Logik, dann erst kommt die Geometrie. Es ist nun äußerst merkwürdig, daß nicht nur Forscher und Gelehrte so Geometrie betrieben; man fand diese *Elemente* als ein für den Schulunterricht geeignetes Lehr- und Arbeitsbuch³. An dieser Verwechslung – Euklid schrieb sogar selber, seine *Elemente* seien für angehende Philosophen und nicht für 12jährige Schulkinder abgefaßt – haben wir heute noch zu tragen. Man sehe sich einmal einen Planimetrie-Leitfaden im Stile Euklids etwas genauer an; die Beschaffung eines solchen wird keine Schwierigkeiten bieten, denn bis vor kurzer Zeit gab es kaum andere. Jede geometrische Binsenwahrheit wird hier eingepreßt in das Schema *Voraussetzung-Behauptung-Beweis*. Jeder noch so kleine Fortschritt im Gange der Untersuchungen wird in einem fett- oder kursivgedruckten Lehrsatz festgehalten und womöglich noch auf mindestens drei Spezialfälle a), b) und c) abgewandelt. Der Stoff wird durch diesen immer wiederkehrenden Rhythmus derart zerhackt, daß für die Schüler (und es sei nicht verschwiegen, gelegentlich auch für den Unterrichtenden) die Übersicht fast vollständig verloren geht.

Wer schon mit einem ‚Euklid‘ in der Hand unterrichtet hat⁴, kennt wohl jene Momente, wo die Schüler einfach nicht mehr mitkommen. Dies, obschon

³ Extreme Verhältnisse lagen besonders in England vor, wo bis weit ins 20. Jahrhundert hinein die wortgetreue Übersetzung der Bücher 1–6 (Planimetrie) und 11, 12 (Anfänge der Stereometrie) die Grundlage für die stark zentralisierten Examina in Geometrie bildete.

⁴ Als Folge der für den Unterricht in Geometrie völlig ungenügenden Ausbildung unserer Sekundarlehrer (und weitgehend auch der Gymnasiallehrer), die auf die praktischen Bedürfnisse des Unterrichtes überhaupt nicht eingeht, beginnt wohl jeder junge Lehrer so Geometrie zu unterrichten, wie er diesen Unterricht selbst erlebt hat. Für die lange Erhaltung ungesunder Traditionen ist dies der ideale Zustand.

Jetzt ist es eine Sache der Gerechtigkeitspflicht,

den Bezug des mit dem 15. Oktober zu Ende gehenden ersten Halbjahrganges der ‚Schweizer Schule‘ mit der möglichst sofortigen Bezahlung des Abonnementspreises von Fr. 9.75 zu begleichen. Einzahlungen an Walter-Verlag, Administration ‚Schweizer Schule‘, Olten, Postcheck Vb 92.

eigentlich alles einfach ist und auf das Einzelne gesehen keine geistige Überforderung vorliegt. Aber der ganze Betrieb liegt über den geistigen Kräften der Kinder. Sie verstehen Sinn und Zweck der Sätze und Beweise noch nicht; man beweist ihnen Selbstverständlichkeiten, diese Form der Geometrie ist ihnen zu weit von der Wirklichkeit entfernt. Zudem haben sie bis zu jenem Zeitpunkt, wo die Schule mit dem Geometrieunterricht einsetzt, in ihrer Entwicklung die Geometrie vorwiegend dynamisch erlebt. Ein weiteres wesentliches Merkmal von Euklids *Elementen* ist nun aber gerade die Tatsache, daß es darin keinen Bewegungsbegriff gibt. Die starre Kongruenz von Dreiecken ist das Hauptbeweismittel bei Euklid und seinen Epigonen. Ist es da nicht verständlich, wenn die Schüler sich ohne langsamen Übergang von Euklid kaum begeistern lassen?

Die Methode Euklids ist nicht an sich schlimm; es sei nur nebenbei erwähnt, daß sie seit dem ausgehenden 18. Jahrhundert für die gesamte wissenschaftliche Mathematik zum Vorbild genommen wurde. Die zu jenem Zeitpunkt einsetzende Grundlagenforschung brachte eine Ausweitung des euklidischen Denkens auf die übrigen Zweige der Mathematik. Die euklidische Methode gehört aber nun einmal nicht in den Anfangsunterricht der Geometrie. Bei der weiten Verbreitung des euklidischen Betriebes muß man sich nur wundern, daß daneben der Anfangsunterricht in der Algebra davon sozusagen verschont geblieben ist. Entsprechend ihrem ehrwürdigen Alter als Wissenschaft kann eben die Geometrie auf eine viel längere Tradition als Unterrichtsfach zurückblicken, als jede andere Disziplin der Mathematik. Nur diese langjährige Tradition konnte sich zum Kultus der euklidischen *Elemente* verdichten. Man kann darin sogar ‚dogmatische‘ Züge entdecken; man denke nur etwa an die berühmtesten vier Kongruenzsätze samt ihrer Numerierung. Daß zwei Dreiecke auch dann kongruent sind, wenn sie in einer Seite der zugehörigen Höhe und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, ist bei Euklid nicht vorgesehen. Wer durch den althergebrachten Schulbetrieb die Beweglichkeit verloren hat, wird diese Aussage nicht als Kongruenzsatz gelten lassen. Wir haben damit auf die Gefahr der Erstarrung des Unterrichtes hingewiesen.

Reformideen sind nicht ganz neu; aber man halte sich vor Augen, daß nach der 2000jährigen Vorherr-

schaft Euklids jede Reform einem Anrennen gegen die Tradition gleichkam. Noch mancher Schulmann von heute sucht hinter der Mauer des ‚Altbewährten‘ sein geistiges Trägheitsmoment zu verstecken. Dabei sprechen so viele Erfahrungen dafür, daß die psychologischen Gesichtspunkte im traditionellen Geometrieunterricht einfach zu kurz kommen. Der geometrische Unterricht soll von Gebilden ausgehen, die dem Kind aus der täglichen Anschauung heraus bekannt sind: Würfel, Quader, Pyramide. Man denke etwa an Spielwürfel, Schachteln, Tüten und ähnliches. Geometrische Experimente müssen zuerst im Vordergrund stehen. Als Beispiele seien genannt Faltübungen (ebene Figuren, Enveloppen, Herstellen von einfachen Körpern aus Papier, Illustration von speziellen Symmetrien), Ausschneiden (eventuell in Verbindung mit Falten), Experimente mit Baukastenklötzchen, Bewegungsübungen in der Ebene (mit transparentem Papier oder ausgeschnittenen Figuren), Modellbau mit Papier, Karton, Faden und ähnlichem Material. Dinge mit hoher Symmetrie sind dabei besonders dankbare Experimentierobjekte. Es soll im nachfolgenden II. Teil noch näher auf diese Dinge eingegangen werden. Aus dieser anschaulich-handgreiflichen Einführung in die Geometrie müssen dann langsam die Grundbegriffe herauswachsen: Punkt, Gerade, Linie, Flächeninhalt, Volumen usw. Der Kerngedanke dieser genetischen Methode besteht darin, die Schüler langsam in die geometrischen Dinge hineinreifen zu lassen. Der große Göttinger Mathematiker *F. Klein*⁵, der dem modernen Geometrieunterricht das Gepräge gegeben hat, faßte dies in den folgenden Worten zusammen: *Der geometrische Schulunterricht hat stets an die konkrete Anschauung anzuknüpfen; erst allmählich kann man logische Elemente in den Vordergrund bringen. Erst wenn das Verlangen besteht, alles bewiesen zu sehen, soll der Unterricht langsam zu einer abstrakteren Behandlungsweise*

⁵ Felix Klein (1849–1926) war Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Er war ein außerordentlich erfolgreicher Forscher und interessierte sich gleichzeitig sehr für Fragen des mathematischen Unterrichtes auf allen Stufen. Klein war Mitbegründer und erster Präsident der Internationalen Mathematischen Unterrichts-Kommission (IMUK). Für den Schulunterricht von besonderer Bedeutung sind seine berühmten *Vorlesungen über Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (Verlag Springer, Berlin), von denen uns insbesondere der Band II über Geometrie interessiert. Klein setzt sich darin kritisch mit den *Elementen* Euklids auseinander. Die Lektüre dieses kompetenten Kommentars kann jedem Geometrielehrer nur empfohlen werden.

übergehen und schließlich zur Sicherheit im Erfassen und in der Wiedergabe deduktiver Schlußketten führen.

Die eben geschilderte Richtung der Reform hat sich heute schon weitgehend durchgesetzt, indem die meisten Schulen den Geometrieunterricht mit einem propädeutischen Vorkurs beginnen. Die Verwirklichung dieser Reformideen in einem derartigen Vorkurs geht bei uns in der Schweiz nicht nur auf importierte Anregungen zurück; H. Pestalozzi hat durch seine Tätigkeit wesentlich zu diesem Fortschritt beigetragen.

Eine zweite Richtung der Reform zielt darauf ab, den Geometrieunterricht der Unterstufe in gewisser Beziehung vollständig von Euklid zu befreien. Wohl soll das logisch-deduktive Element in der systematischen Geometrie beibehalten werden, aber eigentliche axiomatische Erörterungen sollen inskünftig der Oberstufe vorbehalten bleiben. Zum ändern will man die traditionelle statische Behandlungsweise durch ein mehr dynamisches Vorgehen ersetzen. Auch dieser zweite Teil der Reform berührt die Sekundarschulstufe bis zu einem gewissen Grade, und es soll im Abschnitt III noch näher auf diesen Problemkreis eingegangen werden.

Ein erfolgreicher Geometrieunterricht setzt eine entsprechende Ausbildung unserer Sekundarlehrer voraus. In dieser Beziehung ist die gegenwärtige Regelung recht unbefriedigend. Sie muß dafür verantwortlich gemacht werden, wenn sich viele Sekundarlehrer im Geometrieunterricht nicht zurechtfinden, indem ihnen die Bewegungsfreiheit in Stoff und Methode weitgehend fehlt. Hat der Lehrer eine Klasse in vielen Fächern zu unterrichten, so wird er oft Fächer, die ihm besser liegen, auf Kosten der Geometrie eingehender pflegen. Ein anderer sucht durch das Diktat aus einem Leitfaden, aus einem Heft seines seligen Vorgängers im Amte oder aus dem Heft eines ehemaligen Schülers dem Lehrplan wenigstens Genüge zu tun. Er vergißt dabei, daß dies mit Unterrichten herzlich wenig zu tun hat. Es muß hier einmal mit aller Deutlichkeit auf die Folgen des übermäßigen Diktierens auf der Sekundarschulstufe hingewiesen werden, das für den eigentlichen Unterricht, für das Erarbeiten des Stoffes und das Gespräch mit den Schülern kaum Zeit übrigläßt. Dazu braucht man die Kinder wahrhaftig nicht in die Schule zu schicken, denn diese Abschreibearbeit ließe sich ja auch zu Hause erledigen. Die Geschichte vom Schüler, der mit dem Heft älterer Geschwister in der Hand beim gleichen Lehrer zum Geometrieunter-

richt⁶ erscheint und sich dadurch das Aufschreiben ersparen kann, weil der Lehrer wortwörtlich dasselbe diktiert, ist leider wahr! Für den Lehrer ist es wohl eine recht bequeme Art, durch Diktieren den Stoff an die nächste Generation weiterzugeben. Er ist sich aber dabei kaum bewußt, daß er so den Schülern die Geometrie mit einem Unlustgefühl verbindet und daß er eher als Reklamefigur für ein Schlafmittel vor ihnen steht. Schön eingebundene und mit vielen Figuren in Tusche versehene Schulhefte am Schlusse des Schuljahres dürfen uns nicht über diese Situation hinwegtäuschen.

Wenn schon unsern zukünftigen Sekundarlehrern der Besuch mathematischer Vorlesungen an der Hochschule vorgeschrieben ist, dann sollte ihnen dort auch etwas von jener Mathematik mitgegeben werden, auf die sie in ihrer spätern Unterrichtstätigkeit unmittelbar aufbauen können. Wohl ist es zu begrüßen, wenn sich der Sekundarlehrer in der Infinitesimalrechnung ein wenig auskennt; es ist aber eine Unterlassungssünde, wenn er dabei gleichzeitig an der Elementarmathematik vorbeigeführt wird, wenn er nie etwas von Euklid und von der Entwicklung der Elementargeometrie zu hören bekommt und auch keine diesbezüglichen Anregungen zum Selbststudium erhält.

II. Zur Gestaltung des propädeutischen Geometrieunterrichtes

Es geht hier zunächst um die konkrete Frage: *Wie soll man den Geometrieunterricht beginnen?* Man hüte sich, einfach auf eingefahrenen Geleisen zu fahren und irgendeinen Leitfaden zur Hand zu nehmen. Man gehe von den Dingen aus, die im Schulzimmer unmittelbar um uns herum sind, und diese lassen sich nicht in einem Schema festhalten; die Gegebenheiten sind von Ort zu Ort wieder anders. In der ersten Zeit gibt es noch keine Punkte, Geraden, Linien und Ebenen, sondern bloß etwa in der Wand oder sonst irgendwo eingeschlagene Nägel, Münzen, Steinchen, Streichhölzer, Stäbe, Tischkanten, Schnüre, Drähte, flache Wände und dergleichen. Ein Experiment, ein Spiel, der Bau eines einfachen Modelles oder sonst ein echtes Problem der kindlichen Erfahrung steht im Mittelpunkt der Lektion. Die geometrische Pro-

⁶ Es sei nur am Rande vermerkt, daß auch andere, vorwiegend naturwissenschaftliche Fächer vielfach so betrieben werden und daß übermäßiges Diktieren auch in andern Schulen noch sehr oft den Unterrichtserfolg in Frage stellt.

pädeutik hat die Aufgabe, den Schüler in die Lage zu versetzen, mit den geometrischen Gebilden zu arbeiten. Er muß ihre Eigenheiten und Gesetzmäßigkeiten vermuten und erkennen. Die Fähigkeit zu mathematischer Betätigung muß geweckt und entwickelt werden. Aus einer kindlichen Vermutung muß die geometrische Problemstellung herauswachsen, der mathematische Hintergrund muß sich abzeichnen. Bei der propädeutischen Behandlung der Grundgebilde kommt es nicht so sehr auf genaue Definitionen an, vielmehr darauf, diese Dinge dort zu erkennen, wo sie auftreten. Täglich sehen wir Gegenstände wie Bücher, Hefte, Fenster, Türen usw., die uns zu geometrischen Figuren anregen, obschon keines dieser Dinge im mathematischen Sinne etwa eine ebene Figur darstellt. Aber sie sind geeignet, die mathematische Phantasie zu bereichern. Der Versuch, die geometrischen Grundgebilde gleich durch Definitionen zu erfassen, ist zwecklos und stößt bei den Schülern auf passiven Widerstand. Gibt man aber einem geometrischen Anfänger ein Stück Bindfaden in die Hand und fordert ihn auf, eine gerade Linie darzustellen, so wird er ohne weiteres den Faden spannen und so auf natürliche Weise eine Gerade veranschaulichen. Beim Aufzeichnen von Geraden mit dem Lineal wird man die Schüler auf die Verschiebbarkeit der Geraden in sich hinführen. Wählt man schließlich zwei Punkte im Zimmer, die so weit auseinanderliegen, daß selbst ein langes Stück Faden nicht mehr ausreicht, um die Gerade darzustellen, so denken die Schüler bald an die Tätigkeit der Feldmesser und schlagen die Verwendung optischer Hilfsmittel vor (Visur). So läßt sich eine weitere Eigenschaft der Geraden erarbeiten: gleiche Richtung an jeder Stelle. Es muß in diesem propädeutischen Unterricht angestrebt werden, die Schüler soweit zu bringen, daß sich mit dem Begriff *Gerade* unwillkürlich die Eigenschaften kürzeste Verbindung, Verschiebbarkeit in sich und gleiche Richtung an jeder Stelle verbinden. Erst wenn ihm die Grundgebilde derart vertraut sind, ist er reif für einen systematischen Aufbau der Geometrie und die damit verbundenen Abstraktionen.

Die propädeutische Geometrie soll sich ja nicht nur auf die Ebene beschränken; mit dieser Forderung stellen wir uns übrigens erneut in Gegensatz zur euklidischen Tradition. Die Pflege der Raumschauung hat mit einfachen Problemstellungen schon auf der alleruntersten Stufe einzusetzen.

Wir schließen diese Bemerkungen zur propädeuti-

schen Geometrie mit einigen konkreten Vorschlägen zu Lektionsthemen.

1. Das Ablegespiel mit dem Bierteller

Zwei Spieler legen abwechselungsweise 20-Rappen-Stücke auf einen Bierteller. Wer die letzte Münze ablegen kann, hat das Spiel gewonnen.

Nach einigen durchgeführten Spielen werden schlaue Schüler bald herausfinden, daß derjenige, der mit Ablegen beginnt, das Spiel stets zu seinen Gunsten entscheiden kann⁷.

In diesem Spiel kommt das Wesen der Zentralsymmetrie zum Ausdruck. Der mathematische Punktbegriff muß zum Verständnis der Gewinnmöglichkeiten bzw. der das Spiel beherrschenden Symmetrieeigenschaften gar nicht vorausgesetzt werden.

Die Schüler werden leicht andere Flächen finden, bei denen dasselbe Spiel auch möglich ist. Es sind dies die Flächen mit einem Zentrum; Flächen, die bei einer Drehung um 180° um dieses Zentrum in sich selbst übergehen. Von hier aus kann man z. B. zu andern geometrischen Figuren übergehen, welche dieselbe Eigenschaft besitzen (Jaßkarten, Ornamente, Buchstaben- und Zahlzeichen u. a.).

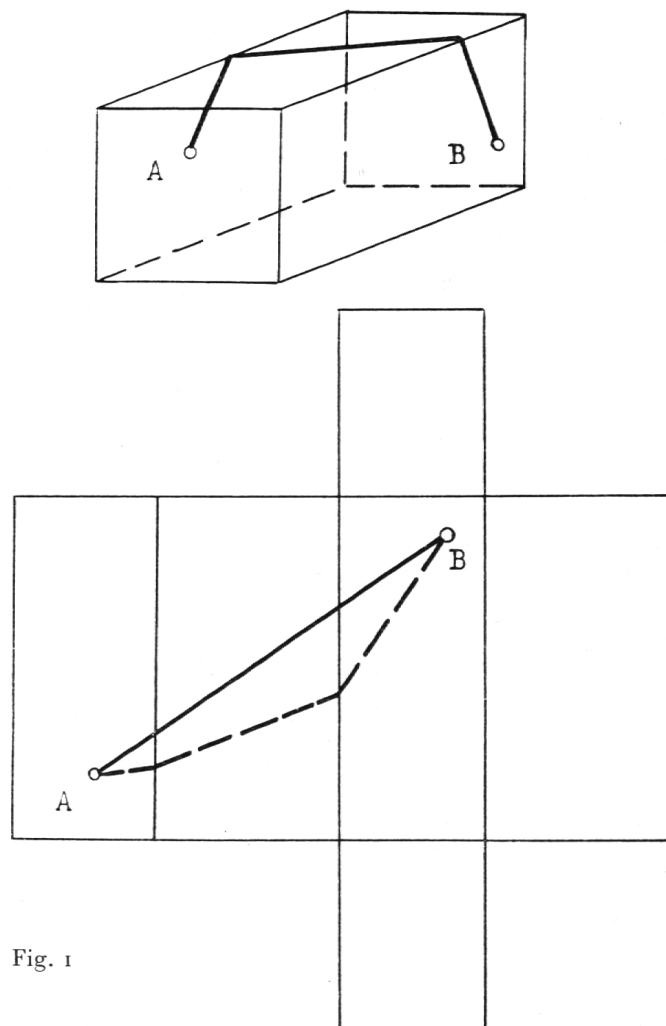


Fig. 1

⁷ Dieses Spiel ist in einer früheren Note des Verfassers ausführlich beschrieben. Vgl. „Schweizer Schule“ Nr. 20, 1959, Seite 632.

2. Wanderung eines Insekts an den Zimmerwänden

Problem: Ein Insekt (das nicht fliegen kann) befindet sich im Schulzimmer an der Stelle A einer Wand. Es möchte gerne an die Stelle B einer andern Wand gelangen. Wie verläuft der kürzeste Weg?

Im ersten Moment bereitet diese Aufgabe den Schülern sichtlich Mühe; der Raum muß überwunden werden. Man wird die Schüler auf die Spur der Lösung bringen, wenn man zuerst A und B auf dieselbe Wand verlegt. Der kürzeste Weg ist dann durch die Verbindungsgerade von A und B gegeben.

Ein beliebiger, stückweise gerader Weg zwischen A und B (jetzt wieder auf verschiedenen Wänden) läßt sich in der Abwicklung des Zimmerquaders stets verkürzen, wenn er dort nicht auf der Verbindungsgeraden von A und B liegt. Die Schüler werden bald erkennen, daß die kürzeste Verbindung in der Abwicklung durch die Gerade AB gegeben ist (Fig. 1).

Es sei darauf hingewiesen, daß der Zusammenhang der 6 Seitenflächen des Quaders in der Abwicklung auf verschiedene Arten möglich ist. Die Seitenwände, auf denen sich A und B befinden, können z. B. über die Decke (wie in Fig. 1), dann aber auch über den Boden oder aber auch über eine weitere Seitenwand zusammenhängen. Zur Feststellung des absolut kürzesten Weges hat man immer alle diese Möglichkeiten ins Auge zu fassen. Es sei auch noch bemerkt, daß das vorliegende Minimalproblem gelegentlich keine eindeutige Lösung besitzt. Nimmt man z. B. A und B je in der Mitte von zwei gegenüberliegenden Wänden eines würfelförmigen Zimmers, so erhält man 4 gleichgroße Minimalwege (Fig. 2).

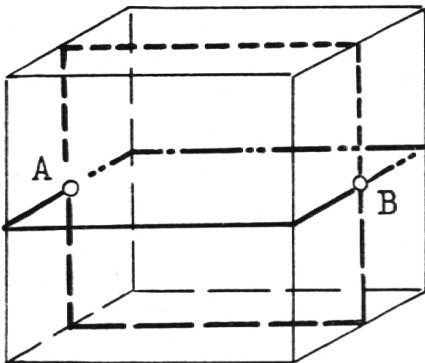


Fig. 2

Diskussionsthemen, die aus dieser Aufgabenstellung herauswachsen können:

Eine räumliche Aufgabe wurde durch eine geeignete Operation auf ein ebenes Problem zurückgeführt.

Die Dreiecksungleichung: In jedem Dreieck ist eine Seite kleiner als die Summe der beiden andern.

Dieselbe Aufgabe spielt bei der Fortbewegung auf der Erdoberfläche eine wichtige Rolle, beispielsweise etwa, wenn ein Schiff in Le Havre nach New York ausläuft. Unsere Lösung versagt

aber hier, da man die Kugelfläche nicht abwickeln kann. Eine analoge Lösung wäre noch möglich bei einem Zylinder.

3. Zusammenbinden von 16 gleichgroßen Konservenbüchsen

Problem: 16 Konservenbüchsen sollen mit einer Schnur zusammengebunden werden. Bei welcher Form des Pakets braucht man am wenigsten Schnur?

Auch hier handelt es sich wiederum um ein Minimalproblem. Die Schüler brauchen zur Diskussion die Berechnung des Kreisumfangs nicht zu kennen. Bezeichnet man den Büchsendurchmesser mit d , den Büchsenumfang mit u , so erhält man z. B. für das extreme Paket von 16 Büchsen in einer Reihe die Schnurlänge

$$s_1 = 30d + u$$

Nimmt man zwei Reihen mit je 8 Büchsen nebeneinander, so wird die Schnurlänge (Fig. 3):

$$s_2 = 16d + u$$

Für vier Reihen zu je 4 Büchsen folgt schließlich

$$s_3 = 12d + u$$

Mit zunehmender Konzentration der Packung zeichnet sich eine Verkürzung der Schnurlänge ab. Es gibt übrigens für 16 Büchsen noch eine zweite Packungsart mit dem Minimalumfang, nämlich jene in Form einer Raute.

4. Kürzester Weg zwischen Schulhaus und Bahnhof

Problem: Wie läßt sich entscheiden, welches der kürzeste Weg zwischen Schulhaus und Bahnhof ist?

Hier wird man verschiedene Vorschläge der Schüler in bezug auf die Genauigkeit des Resultates miteinander vergleichen.

Beispiele:

Gehzeit für verschiedene Wege stoppen;

Schritte zählen;

Messung der Wegstrecken mit dem Meßband;

Lösung der Aufgabe anhand eines Grundbuchplanes oder einer Landkarte.

Die Landkarte ist ein Modell der Wirklichkeit, das für die Lösung unserer Aufgabe gerade genügt. Hingegen läßt sich aber auf Grund der Karte nicht ohne weiteres entscheiden, ob ein bestimmter Weg etwa gesperrt ist (Privatweg, Einbahnverkehr). Durch solche Aufgaben läßt sich die geometrische Abstraktion vorbereiten.

5. Deckoperationen von Figuren

Problem: Welche Bewegungen kann man mit einer vorgegebenen Figur ausführen, damit ein Schüler, der die Bewegung nicht gesehen hat, keine Veränderung feststellen kann?

Ein aus Karton ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck darf z. B. um die Winkel 60° , 120° , 180° , 240° und 300° um den Mittelpunkt gedreht werden, ohne daß die Bewegung nachher fest-

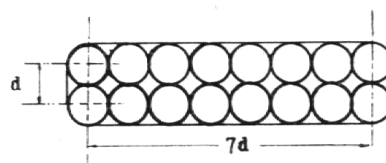
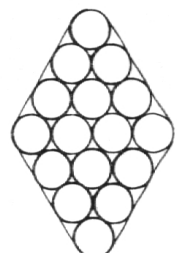
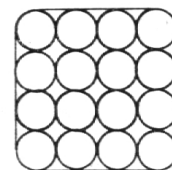


Fig. 3



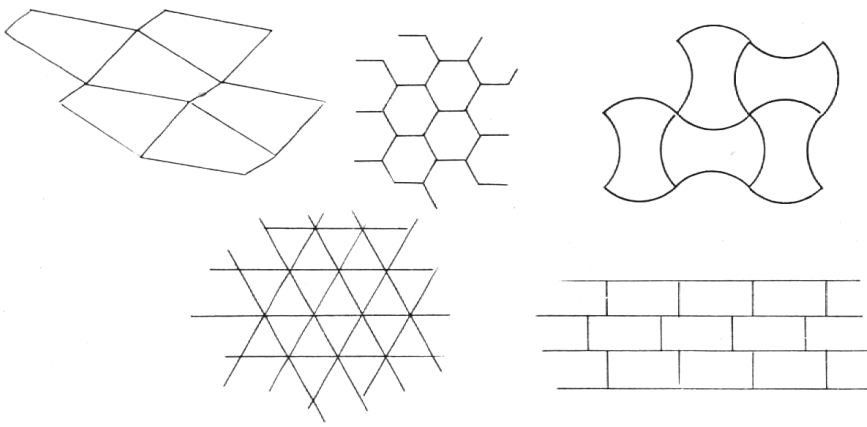


Fig. 4

stellbar ist. Ist das Sechseck beidseitig gleichfarbig, so kann man es auch noch umwenden.

Bringt man auf dem Sechseck eine Marke an, so ist sofort jede Bewegung feststellbar. Weist es zwei zentralsymmetrisch liegende gleiche Marken auf (dies kann z. B. ein farbiger Punkt sein), so sind wieder Bewegungen möglich. Geeignete Objekte für derartige Experimente bilden unter anderem unsere Jaßkarten.

Experimente der eben geschilderten Art bilden eine vorzügliche Vorbereitung auf die nach modernen Gesichtspunkten aufgebaute systematische Geometrie (vgl. Abschnitt III).

6. Regelmäßige Parkette

Problem: Mit was für geometrischen Figuren läßt sich die Ebene vollständig überdecken?

Dies ist ohne weiteres mit gleichgroßen Quadraten oder Rechtecken möglich (Fig. 4). Die Ebene läßt sich aber auch mit gleichseitigen Dreiecken bedecken, ebenso mit regelmäßigen Sechsecken (wieso geht es mit regelmäßigen Fünfecken nicht?). Sogar mit krummlinig-begrenzten Figuren ist es möglich. Interessant ist, daß auch ein Parkett mit ganz beliebigen Vierecken existiert.

7. Zerschneiden eines Würfels

Problem: Ein würfelförmiger Käse (der Käse sei innen gelb, die Rinde schwarz) wird durch je zwei Schnitte parallel zu den Seitenflächen in 27 kleinere Würfelchen zerlegt. Wie viele gelbe Oberflächenquadrate entstehen dabei (Fig. 5)?

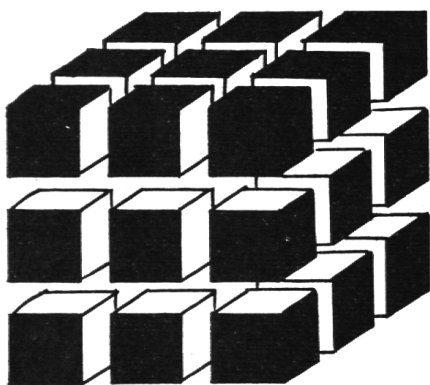


Fig. 5

Mit dieser Problemstellung lassen sich gleichzeitig Raumvorstellung und mathematische Erfindungsgabe prüfen.

Wohl die meisten Schüler werden die folgende Lösung vorschlagen. Es entstehen 27 Würfelchen mit total $27 \cdot 6$ Ober-

flächenquadrate. Auf jeder Seitenfläche des ursprünglichen Käsewürfels liegen 9 Oberflächenquadrätchen aus Rinde, d. h. von schwarzer Farbe. Es verbleiben damit $162 - 6 \cdot 9 = 108$ gelbe.

Eine kompliziertere Lösung, die immer wieder auftaucht, stützt sich auf eine Klassifikation der entstehenden Würfelchen. Es gibt

1 Würfelchen mit 6 gelben und 0 schwarzen Flächen,
 6 Würfelchen mit 5 gelben und 1 schwarzer Fläche,
 12 Würfelchen mit 4 gelben und 2 schwarzen Flächen,
 8 Würfelchen mit 3 gelben und 3 schwarzen Flächen.
 Daraus ergeben sich $6 + 6 \cdot 5 + 12 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 108$ gelbe Flächen.

Die eleganteste Lösung lautet folgendermaßen. Bei jedem Schnitt entstehen auf jeder Seite des Messers $2 \cdot 9$ gelbe Quadrätchen. Für 6 Schnitte macht dies zusammen $6 \cdot 2 \cdot 9 = 108$. Durch die Diskussion verschiedener Lösungen lernt der Schüler, daß die Lösung mathematischer Probleme oft auf ganz verschiedenen Wegen gefunden werden kann.

8. Drehung einer Tischplatte

Problem: Ein Möbelschreiner soll einen Tisch herstellen, bei dem die Platte drehbar ist. Sie soll sich in die gestrichelte Lage drehen lassen (Fig. 6). An welcher Stelle ist der Drehzapfen anzubringen? Man versuche mit Hilfe eines Kartonmodells und einer Stecknadel das Drehzentrum experimentell festzustellen. Mit derartigen Aufgaben läßt sich der Bewegungsbegriff vorbereiten.

9. Quadratgittergeometrie

Zahlreiche geometrische Sätze lassen sich außerordentlich leicht verifizieren, wenn man sich auf Figuren beschränkt, de-

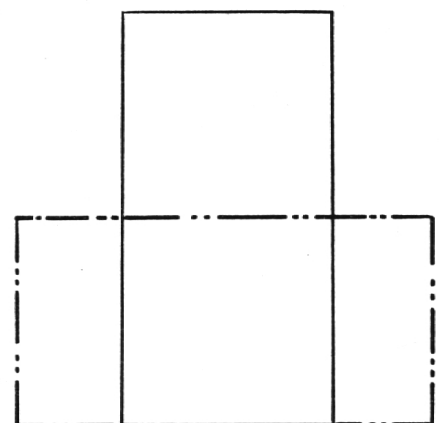


Fig. 6

ren wesentliche Punkte auf einem Quadratgitter liegen. Die Figur 7 zeigt ein Beispiel; daß hier die beiden Kathetenquadrate zusammen den gleichen Inhalt haben, wie das Hypotenusenquadrat, ist evident. Die Figur bildet eine äußerst wertvolle Vorbereitung auf den Satz von Pythagoras. Es läßt sich auf diese Weise das Interesse für diesen Satz wecken. Werden die Schüler durch derartige Beispiele auf einen geometrischen Zu-

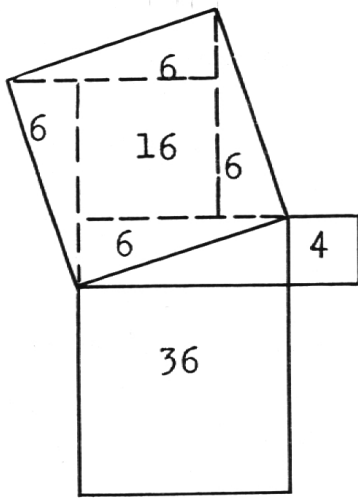


Fig. 7

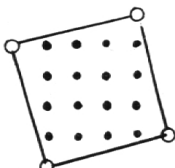
sammenhang hingeführt, so können sie meist den Satz selbst formulieren, und sie haben später viel eher ein Interesse am allgemeinen Beweis. Man versuche überhaupt die Schüler zuerst für ein Thema zu interessieren. Man lasse sie Vermutungen aussprechen. Die Vertreter der verschiedenen Meinungen werden gespannt bei der Sache sein, wenn es dann darum geht, abzuklären, welche wohl die richtige ist.

Aus der Quadratgittergeometrie sei noch das folgende Beispiel erwähnt. Hat ein Vieleck seine Eckpunkte auf einem vorgegebenen Quadratgitter und liegen i Gitterpunkte in seinem Innern und r auf dem Rand, dann ist sein Flächeninhalt gleich groß wie

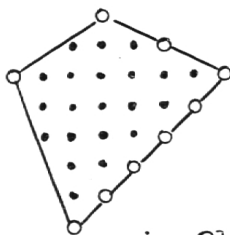
$$F = i + \frac{r-2}{2}$$



$i=1$
 $r=4$



$i=16$
 $r=4$



$i=21$
 $r=9$

Fig. 8

Gitterquadrate (Fig. 8). Man wird diese Beziehung aus einfachen Vielecken heraus aufzubauen versuchen. Es ist dies ein nettes Beispiel zur Förderung des Forschertriebes. Im Sekundarschulalter lassen sich die Schüler in der Regel gerne zu solchen Untersuchungen mobilisieren. Die Freude, selber eine Entdeckung machen zu können, spornt sie zu geometrischer Betätigung an. Wir dürfen die Schüler nicht zu dumm einschätzen. Wenn man ihnen gar keine Gelegenheit gibt, sich zu entfalten, dann geht ihr Interesse an der Sache eben zurück. Dann aber wird die Geometrie langweilig.

Man denke bei der Einführung in die Geometrie weniger an den Stoff als vielmehr an die an früherer Stelle formulierten Unterrichtsziele. Auf der Sekundarschulstufe sollte grundsätzlich das erste Geometriejahr ganz durch den propädeutischen Vorkurs ausgefüllt werden. Die angegebenen Beispiele mögen darlegen, daß propädeutische Geometrie nicht nur aus Flächen- und Volumenberechnungen bestehen muß, wie dies in unseren traditionellen Lehrmitteln dieser Stufe gepflegt wird. Geometrie darf nicht zu angewandter Arithmetik degenerieren.

Literatur für weitere Anregungen und zur Weiterorientierung:
Proksch R.: Geometrische Propädeutik. Göttingen 1956.

Löffler E.: Der Mathematikunterricht. Beiträge zu seiner wissenschaftlichen Gestaltung. 1955, Heft 1: Der Geometrieunterricht auf der Unterstufe der höheren Schulen. (Die Beispiele zur Quadratgittergeometrie sind dieser Schrift entnommen.) 1959, Heft 2: Geometrischer Vorkurs.

Riethmüller B.: Mein Lesebuch der Mathematik. Bremerhaven 1958.

III. Der systematische Geometrieunterricht

Wenn wir von systematischer Geometrie reden, so meinen wir damit, daß nun der Unterricht einen innern logischen Zusammenhang erhält. Auf einigen wenigen Grundbegriffen und Tatsachen wird jetzt das Gebäude der Geometrie errichtet. Bei Euklid besteht dieses Fundament aus ein paar evidenten Grundsätzen, den Axiomen, deren Wahrheit als gesichert gelten kann. Beweisen heißt, einen mathematischen Satz auf einfachere Sätze und damit schließlich auf diese Axiome zurückzuführen⁸.

Im Elementarunterricht ist es gefährlich, auf der Stufe der Euklidischen Axiome mit dem Aufbau zu beginnen, da man sich dabei allzulange im Bereiche der Binsenwahrheiten bewegen muß. Weil den Schülern die Übersicht noch fehlt, können sie nicht wissen, was mit dieser Systematik im Bereiche des Trivialen angestrebt werden soll.

Der moderne systematische Geometrieunterricht ist dadurch gekennzeichnet, daß er den Begriff der *Zuordnung* – auf der Unterstufe im speziellen den Begriff der *Bewegung* (Drehung, Verschiebung, Umlegung) – in den Vordergrund stellt. Der logisch-deduktive Aufbau wird wohl beibehalten, aber nicht mehr so sehr bewußt betont wie bei Euklid. Von einer Ver-

⁸ Über das Wesen der Axiomatik gibt der Artikel von G. Hauser 'Die Geometrie als axiomatisch aufgebaute Wissenschaft' in prägnanter Weise Auskunft ('Schweizer Schule' Nr. 20, 1959).

wässerung des exakten Schließens, wie gelegentlich behauptet wird, ist keineswegs die Rede. Der Gegensatz zur traditionellen euklidischen Methode ist vielmehr darin zu suchen, daß das *dynamische Element gegenüber dem statischen dominiert*. Die Figuren leben; sie können gedreht, verschoben und später sogar deformiert werden.

Für den systematischen *Geometrieunterricht auf der Grundlage der Bewegung* (allgemeiner der *Abbildung*) bestehen schon recht brauchbare Lehrmittel und Publikationen; auf einige davon sei am Schlusse dieses Abschnittes hingewiesen. Am besten wird man sich wohl dort ausführlich orientieren. Es sei hier nur das Wesentliche des neuen Unterrichtsstiles hervorgehoben. Er ist aus der Absicht herausgewachsen, durch eine handgreiflichere Behandlungsweise den Schülern die Geometrie schmackhafter zu machen, und zwar vor allem auf jener Stufe, auf der mit den euklidischen Gedankengängen nur schwerlich eine Resonanz zu erzielen war. Fast noch wichtiger scheint aber, daß dadurch ein viel stärkeres Eindringen in das Wesen geometrischer Zusammenhänge möglich wird. Der Aufbau im modernen Stile beginnt mit Bewegungsexperimenten und festigt zunächst die Begriffe *Spiegelung an einer Achse*, *Verschiebung in einer Richtung* und *Drehung um einen Punkt*. Auf ihnen baut sich nachher das Gebäude der Geometrie auf.

Beim systematischen Geometrieunterricht besteht die Gefahr, daß man – vielleicht von Euklid unbewußt dazu verleitet – Satz an Satz aneinanderzureihen beginnt und in gerader Linie durch den Stoff hindurchrast. Es ist zu empfehlen, gelegentlich einen Streifzug einzuschalten, indem man von einem bestimmten Problem aus nach verwandten Fragestellungen Ausschau hält und diese diskutieren läßt. Man könnte etwa den Vergleich ziehen mit einer Autofahrt; ab und zu wird die Fahrt auf der Autobahn unterbrochen, der Wagen in einem Seitensträßchen parkiert und in aller Ruhe die Gegend besichtigt. Wer schon solche Streifzüge unternommen hat, wird bestätigen, daß sie zu den interessantesten Geometriestunden führen, wenn sie sauber vorbereitet sind. Ein Thema hat dann eingeschlagen, wenn die Schüler selber Probleme aufwerfen und Fragen stellen wie etwa die folgenden: Was passiert in diesem und jenem Spezialfall? Wie muß man die Aufgabe lösen, wenn eine bestimmte andere Situation von Gegebenheiten vorliegt? Nicht das, was am Schluß einer Stunde im Heft steht, ist maßgebend,

sondern das, was die Schüler als bleibendes Erlebnis an Geometrie mitnehmen. Als Ausgangspunkte für derartige Streifzüge sind Hindernisaufgaben, Minimal- oder Maximalprobleme und dergleichen besonders geeignet.

Literatur für weitere Anregungen und zur genaueren Orientierung:

Hofmann J. E.: Streifzug durch die Entwicklungsgeschichte der Elementarmathematik. Frankfurt 1959.

Denk-Hofmann: Ebene Geometrie. Eine Einführung zum Gebrauch an den mittleren Klassen höherer Lehranstalten. München 1957.

Lambacher-Schweizer: Mathematisches Unterrichtswerk. Geometrie A₁ und A₂. Stuttgart 1956.

Reidt-Wolff: Die Elemente der Mathematik. Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten. Band 2. Paderborn 1954.

Einige Gedanken zum Arithmetikunterricht auf der Sekundarschulstufe¹⁾

Dr. Robert Ineichen, Luzern

«Man kann ein großer Rechner sein, ohne die Mathematik zu ahnen»

(Novalis, Fragmente)

Es sollen in den folgenden Zeilen einige Gedanken geäußert werden, um von den verschiedenen Aspekten des Arithmetikunterrichtes einen, nämlich den *mathematischen*, etwas zur Geltung zu bringen und die damit verbundenen methodischen Fragen kurz zu erörtern. Dies geschieht aus der Überzeugung, daß der Arithmetikunterricht nur dann in vollem Maße bildend und damit fruchtbar werden kann, wenn er als Teil des mathematischen Unterrichtes

¹⁾ Nach Referaten des Verfassers an der Konferenz des Kant. Lehrervereins Uri (28. 10. 59) und an einem Mathematikkurs des Sekundarlehrervereins des Kantons Luzern (10. 12. 59).