Die Geschwindigkeit der Planeten als Funktion der Massenanziehung (Gravitation)

Autor(en): **Schwegler, Theodor**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **48 (1961)**

Heft 10

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-531103

1957. *Fritz Preuß:* –mobile. Die Neueren Sprachen, Heft 10, 1959. *H. L. Mencken:* The American Language, Supplement I. New York 1948. *Hans Galinsky:* Die Sprache des Amerikaners, Heidelberg 1952. *Dietlinde Kilian:* Homemade Words, Die Neueren Sprachen, Heft 8, 1959. *Ernst Leisi:* Das heutige Englisch, Car Winter, Heidelberg 1955.

Die Geschwindigkeit der Planeten als Funktion der Massenanziehung (Gravitation)

P. Dr. Theodor Schwegler, OSB, Einsiedeln

Es gehört bereits zum allgemeinen Wissensbestande, daß sich die Erde in einer Zeitsekunde auf ihrer Bahn um rund 30 km fortbewegt. Geweckte und geistig interessierte Schüler und andere ‚Laien' werfen da unschwer die Frage auf, wie man auf diesen Wert gekommen sei und mit welcher Geschwindigkeit sich die andern Planeten unseres Sonnensystems auf ihrer Bahn bewegen. Die Antwort auf diese Fragen geben einerseits das Gesetz der allgemeinen *Massenanziehung* und die davon ableitbaren Keplerschen Gesetze der Planetenbahnen, anderseits die in neuerer Zeit durch genaue Messungen und scharfe Berechnungen ermittelten Werte gewisser physikalischer und astronomischer Größen. Daß aber darin noch nicht die letzte Genauigkeit erreicht ist, zeigen sowohl die Angaben in den verschiedenen Tabellenwerken[1]) wie einzelne im folgenden ermittelte Ergebnisse, die in den spätern Dezimalen von einander abweichen.

1609–1620 fand der deutsche Astronom Johannes *Kepler* (1571–1630) die nach ihm benannten Gesetze der Planetenbahnen:

1. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne (als Zentralkörper) steht.

2. Der Fahrstrahl eines Planeten beschreibt in gleicher Zeit auch die gleiche Fläche.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

Diese drei Gesetze lassen sich mittels der Infinitesimal-Rechnung aus dem Gesetze der Gravitation oder Massenanziehung ableiten, das 1682 der englische Mathematiker Isaak *Newton* (1642–1727) entdeckte und das besagt, daß die Kraft, mit der sich zwei Körper anziehen, direkt proportional sei dem Produkte ihrer Masse und indirekt proportional dem Quadrat der Abstände ihrer Mittelpunkte: $F = \frac{f \cdot M \cdot M_1}{a^2}$, wobei f die sog. Gravitationskonstante bezeichnet.

Aus dem dritten Keplerschen Gesetze: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 = \left(\frac{u}{u_1}\right)^2$ folgt, daß, wenn die Umlaufzeiten u der einzelnen Planeten bekannt sind, sich die großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen als gewisse Vielfache von a, d. h. der großen Halbachse der Erdbahn oder, was beinahe dasselbe ist, des mittlern Abstandes des Erdmittelpunktes vom Sonnenmittelpunkte, ausdrükken lassen. Nun aber sind die wahren d. h. *siderischen* Umlaufzeiten (u_{sid}) der Planeten nicht direkt beobachtbar. Nur die mittlere Zeit, die von einer Konjunktion bzw. Opposition von Erde, Planet und Sonne bis zur nächsten verläuft, also die sog. *synodische* Umlaufzeit (u_{syn}), kann unmittelbar beobachtet werden. Um den Zusammenhang von u_{sid} und u_{syn} zu erfahren, verfolgen wir einmal die Wege der Erde und eines *äußern* Planeten, indem wir sie auf der Ekliptik, in deren Nähe sich alle Planeten bewegen, etwa von einer Konjunktion aus messen; dabei bezeichnen wir mit u die siderische Umlaufzeit der Erde, das *siderische* Jahr (s. u.).

Da $u < u_{sid}$ des betreffenden Planeten, so bleibt dieser mit jedem Schritte im Verhältnis $^{u}/_{u_{sid}}$ hinter der Erde zurück, gerade so wie bei einer Uhr der Stundenzeiger hinter dem Minutenzeiger zurückbleibt, bis dieser jenen eingeholt hat. Jedesmal wenn der Minutenzeiger (bzw. die Erde) den vorangehenden Ausgangspunkt des Stundenzeigers (bzw. des Planeten) erreicht hat, ist dieser wieder um den Quotienten $^1/_{12}$ bzw. $^{u}/_{u_{sid}}$ auf seiner Bahn weitergerückt. Die einzelnen Schritte bilden somit eine *unendliche, konvergente geometrische Reihe* mit dem Quotienten $^1/_{12}$ bzw, $^{u}/_{u_{sid}}$, und die *Summe* all dieser immer kleiner werdenden Schritte ist eben u_{syn}.

[1]) Im folgenden sind die Angaben des Annuaire publié par le Bureau des Longitudes de Paris benützt. Die Angaben, die die Logarithmentafeln von Voellmy und Bremiker bieten, weichen in den Tausendsteln gewöhnlich davon ab.

Wählen wir einen innern Planeten, so ist der Quotient u_{sid}/u, die Überlegungen sind aber dieselben.

Also $u_{syn} = \frac{u}{1 - u/u_{sid}} = \frac{u \cdot u_{sid}}{u_{sid} - u}$;

oder $\frac{1}{u_{syn}} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u_{sid}}$ (äußerer Planet)

und $u_{syn} = \frac{u_{sid}}{1 - \frac{u_{sid}}{u}} = \frac{u \cdot u_{sid}}{u - u_{sid}}$;

oder $\frac{1}{u_{syn}} = \frac{1}{u_{sid}} - \frac{1}{u}$ (innerer Planet)

also $\frac{1}{u_{sid}} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u_{syn}}$, bzw. $\frac{1}{u} + \frac{1}{u_{syn}}$ [2])

je nachdem es sich um einen äußern oder innern Planeten handelt.

Daraus ergibt sich die anschließende Tabelle, in der die große Halbachse der Erdbahn a = 1 gesetzt ist.

Planet	u_{syn}	u_{sid}	a_1
Merkur	115,88 t	88,969256 t	0,387 0984
Venus	583,92 t	224,7008 t	0,723 3301
Erde		1 jj 0,00636 t	1,000 0013
Mars	779,94 t	1 jj 321,72982 t	1,523 6781
Jupiter	398,88 t	11 jj 314,839 t	5,202 561
Saturn	378,09 t	29 jj 166,98 t	9,554 747
Uranus	369,66 t	84 jj 7,45 t	19,218 14
Neptun	367,49 t	164 jj 280,3 t	30,109 57
Pluto	366,72 t	248 jj 151,5 t	39,517 74

(t: Tage jj: julian. Jahre)

Als physikalische und astronomische Größen, deren Werte teils genau, teils erst mit großer Annäherung bekannt sind, kommen im weitern die folgenden in Frage:

Die Zahl der Bogen-Sekunden (")
auf den Bogen (arc) 1 206264,8.. = $10^{5,314425}$
die Zahl der Zeitsekunden (s) im Tage
86400 = $10^{4,936514}$
die Länge des siderischen Jahres (u)
365,25636 t = $10^{2,562598}$ t
die große Halbachse der Erdbahn (a)
$149{,}505 \cdot 10^6$ km = $10^{8,174653}$ km
die Schwerebeschleunigung g am Äquator
$9{,}78\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 10^{2,990339}\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$
der Sonnendurchmesser als Vielfaches des Äquatordurchmessers der Erde 109,06 = $10^{2,037705}$

[2]) Diese Rechnung wird stark vereinfacht, wenn die sog. Additions- und Subtraktions-Logarithmen benützt werden.

der mittlere Halbmesser der Sonnenscheibe
962" = $10^{2,983175}$"
die Masse der Sonne als Vielfaches
der Erdmasse 333432 = $10^{5,523006}$
die Erdmasse (Volumen mal spez. Gewicht)
$5{,}98 \cdot 10^{27}$ gr = $10^{27,776701}$ gr
die Gravitations-Konstante
$f = (6{,}670 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{dyn\ cm^2\ gr^{-2}}$
$= 10^{0,824126-8}\ \mathrm{dyn\ cm^2\ gr^{-2}}$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen und Angaben kann die mittlere *Geschwindigkeit* der einzelnen Planeten sowohl im Anschluß an das Gravitationsgesetz wie im Anschluß an die Keplerschen Gesetze berechnet werden.

I. Im Anschluß an das *Gravitations-Gesetz:*

Wie oben bereits bemerkt wurde, ist einerseits $F = f \cdot \frac{M \cdot M_1}{a^2}$ anderseits ist $F = M \cdot w$ (w = Beschleunigung)[3]).

Da weiter ein kleiner Ellipsenausschnitt wie ein Kreisausschnitt behandelt werden kann, ist auf ihn die kreisförmige Zentralbeschleunigung anwendbar:

$w = v^2/a$ (v = Geschwindigkeit)

also $v = \sqrt{a \cdot w} = \sqrt{\frac{M \cdot f}{a}} = 29{,}826$ km [4])

und $w = \frac{M \cdot f}{a^2} = 0{,}595014\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$

Dieser Wert von w wird von zwei andern Seiten her bestätigt:

a) von einer andern Anwendung des *Gravitations-Gesetzes.* Die Schwerebeschleunigung, die am Äquator 978 cm s^{-2} beträgt, nimmt auf der Sonnenoberfläche proportional der größern Sonnenmasse zu und nimmt ab mit dem Quadrat der Entfernung vom Sonnenmittelpunkt; sie beträgt also dort $\frac{978 \cdot 333432}{109{,}06^2} = 27411{,}6$ (cm s^{-2}). Da der mittlere scheinbare Halbmesser der Sonnenscheibe 962" beträgt, ist der mittlere Abstand der Erde von der Sonne 206265/962 = 214,41 Sonnenhalbmesser[5]).

[3]) In der mathematischen Physik wird die Geschwindigkeit gewöhnlich mit v (= velocitas) und die Beschleunigung mit a (= acceleratio) bezeichnet. Da hier aber a den Sonnenabstand bezeichnet, so wird, um Verwechslungen zu vermeiden, die Beschleunigung mit w bezeichnet.

[4]) Im cm-gr-sec.-System, wie hier, müssen die km durch cm ersetzt werden: 1 km = 10^5 cm.

[5]) Dem Sehwinkel (Parallaxe) 1" entspricht eine Entfernung von dem 206 265fachen Durchmesser des betreffenden Gegenstandes, in unserm Falle, der Sonne.

In der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ist somit die von der Anziehungskraft der Sonne bewirkte Beschleunigung w der Erde gegen die Sonne hin $214{,}41^2$ mal schwächer und beträgt daher nur noch 5,963 mm s^{-2}. Nach der Lehre der Mechanik beträgt der in der Zeit t infolge der Beschleunigung w zurückgelegte Weg $^1/_2 \cdot w \cdot t^2$. In der Zeit 1^s nähert sich somit die Erde, wenn von ihrer Tangentialgeschwindigkeit oder Zentrifugalkraft abgesehen und *nur* die Gravitationskraft der Sonne in Rechnung gesetzt wird, der Sonne um $^1/_2 \cdot w =$ 2,98 . . mm.

b) Dieses Ergebnis erhält man auch als die sog. Pfeilhöhe des Winkels $\frac{3548{,}19''}{86\,400}$ [6]). Im Kreisausschnitt mit dem Halbmesser a und dem Winkel φ beträgt die Pfeilhöhe $a(1 - \cos\varphi) = 2a.\ \sin\frac{2\varphi}{2}$. Bei sehr kleinen Winkeln, wie dies hier der Fall ist, kann sin durch arc ersetzt werden. Die Pfeilhöhe beträgt demnach

$$2a \cdot \left(\frac{1774{,}09}{86400 \cdot 206265}\right)^2 = 2{,}963 \text{ (mm)} \qquad {}^{7})$$

II. Im Anschluß an das *erste und das zweite Keplersche Gesetz:*

Der in der Zeiteinheit vom Fahrstrahl beschriebene *Ellipsen-Ausschnitt* kann wie ein *Kreisausschnitt* behandelt werden. Für einen solchen gilt aber:

Bogen $= r \cdot \text{arc}\,v; = \frac{1\,296\,000}{365{,}25636 \cdot 86400}''$. Also beträgt der in der Zeiteinheit durchlaufene (Kreis-) Bogen der Erde:

$$\frac{149{,}604 \cdot 10^6 \cdot 1\,296\,000}{365{,}25636 \cdot 86400 \cdot 206265} \text{km} = 29{,}767 \text{km (im Mittel).}^{3})$$

[6]) Während eines siderischen Jahres wird der Vollkreis von 1 296 000″ durchlaufen; auf den einzelnen Tag trifft es daher im Mittel 3548,″19 . ., auf die Zeit-Sekunde 86400 mal weniger.

[7]) Um das durch arc ausgedrückte absolute Bogenmaß zu erhalten, ist die Zahl der Bogen-Sekunden durch 206265 zu dividieren.

III. Im Anschluß an das *dritte Keplersche Gesetz:* Wird in diesem die Umlaufzeit u bzw. u_1 durch die mittlere Geschwindigkeit v bzw. v_1 ersetzt, also $u \approx {}^{2a\pi}/_v$, so erhält man sofort: $^a/_{a_1} = (^{v_1}/_v)^2$ oder $v_1 = v \cdot \sqrt{^a/_{a_1}}$.

Nach irgend einem dieser drei Wege erhält man für die einzelnen Planeten (aus Annuaire für das Jahr 1960 errechnet)

	ω/tag	v	ε (= Exzentrizität der Bahnellipse)	
Merkur	14 732,″42	48,84 km	0,205 626	(wachsend)
Venus	5 767 , 67	35 km	0,006 794	(abnehmend)
Erde [9])	3 548 , 19	29,765 km	0,016 724	(abnehmend)
Mars	1 886 , 52	24,113 km	0,093 366	(wachsend)
Jupiter	299 , 13	14,055 km	0,048 433	(wachsend)
Saturn	120 , 45	9,655 km	0,055 685	(abnehmend)
Uranus	42 , 23	6,808 km	0,046 329	(abnehmend)
Neptun	21 , 53	5,44 km	0,009 001	(wachsend)
Pluto	14 , 28	4,745 km	?	?

			r	v	ω
= 0°	Perihel:	1 . Januar	$146{,}981 . 10^6$ km	30,263 km	3669,″4
= 90°		4. April	$149{,}133 . 10^6$ km	29,756 km	3547 , 7
= 270°		6. Okt.			
180°		2. Juli	$151{,}981 . 10^6$ km	29,268 km	3431 , 9

[8]) Der jeweils richtige Wert für r ergibt sich aus der Polar-Gleichung der Ellipse:

$$r = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\vartheta} \qquad (\varepsilon = \text{numerische Exzentrizität der Ellipse})$$

wobei die Anomalie ϑ vom Scheitelpunkt (Perihel) an zu zählen ist und täglich im Mittel um ω wächst. Da nach dem zweiten Keplerschen Gesetz $r \cdot \omega$ konstant ist, verhalten sich r und ω umgekehrt proportional.

[9]) Wird die Formel von Anm. 8 auf die Erde angewandt, so ändern sich r, v und ω wie folgt: