

Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 48 (1961)
Heft: 10

Artikel: Die Geschwindigkeit der Planeten als Funktion der Massenanziehung (Gravitation)
Autor: Schwegler, Theodor
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-531103>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 11.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1957. *Fritz Preuß*: –mobile. Die Neueren Sprachen, Heft 10, 1959. *H.L. Mencken*: The American Language, Supplement I. New York 1948. *Hans Galinsky*: Die Sprache des Amerikaners, Heidelberg 1952. *Dietlinde Kilian*: Homemade Words, Die Neueren Sprachen, Heft 8, 1959. *Ernst Leisi*: Das heutige Englisch, Car Winter, Heidelberg 1955.

Die Geschwindigkeit der Planeten als Funktion der Massenanziehung (Gravitation)

P. Dr. Theodor Schwegler, OSB, Einsiedeln

Es gehört bereits zum allgemeinen Wissensbestande, daß sich die Erde in einer Zeitsekunde auf ihrer Bahn um rund 30 km fortbewegt. Geweckte und geistig interessierte Schüler und andere ‚Laien‘ werfen da unschwer die Frage auf, wie man auf diesen Wert gekommen sei und mit welcher Geschwindigkeit sich die andern Planeten unseres Sonnensystems auf ihrer Bahn bewegen. Die Antwort auf diese Fragen geben einerseits das Gesetz der allgemeinen *Massenanziehung* und die davon ableitbaren Keplerschen Gesetze der Planetenbahnen, andererseits die in neuerer Zeit durch genaue Messungen und scharfe Berechnungen ermittelten Werte gewisser physikalischer und astronomischer Größen. Daß aber darin noch nicht die letzte Genauigkeit erreicht ist, zeigen sowohl die Angaben in den verschiedenen Tabellenwerken¹⁾ wie einzelne im folgenden ermittelte Ergebnisse, die in den spätern Dezimalen von einander abweichen.

1609–1620 fand der deutsche Astronom Johannes *Kepler* (1571–1630) die nach ihm benannten Gesetze der Planetenbahnen:

1. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne (als Zentralkörper) steht.

¹⁾ Im folgenden sind die Angaben des *Annuaire publié par le Bureau des Longitudes de Paris* benützt. Die Angaben, die die Logarithmentafeln von Voellmy und Bremiker bieten, weichen in den Tausendsteln gewöhnlich davon ab.

2. Der Fahrstrahl eines Planeten beschreibt in gleicher Zeit auch die gleiche Fläche.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

Diese drei Gesetze lassen sich mittels der Infinitesimal-Rechnung aus dem Gesetze der Gravitation oder Massenanziehung ableiten, das 1682 der englische Mathematiker *Isaak Newton* (1642–1727) entdeckte und das besagt, daß die Kraft, mit der sich zwei Körper anziehen, direkt proportional sei dem Produkte ihrer Masse und indirekt proportional dem Quadrat der Abstände ihrer Mittelpunkte: $F = \frac{f \cdot M \cdot M_1}{a^2}$, wobei f die sog. Gravitationskonstante bezeichnet.

Aus dem dritten Keplerschen Gesetze: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 = \left(\frac{u}{u_1}\right)^2$ folgt, daß, wenn die Umlaufzeiten u der einzelnen Planeten bekannt sind, sich die großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen als gewisse Vielfache von a , d. h. der großen Halbachse der Erdbahn oder, was beinahe dasselbe ist, des mittlern Abstandes des Erdmittelpunktes vom Sonnenmittelpunkte, ausdrücken lassen. Nun aber sind die wahren d. h. *siderischen* Umlaufzeiten (u_{sid}) der Planeten nicht direkt beobachtbar. Nur die mittlere Zeit, die von einer Konjunktion bzw. Opposition von Erde, Planet und Sonne bis zur nächsten verläuft, also die sog. *synodische* Umlaufzeit (u_{syn}), kann unmittelbar beobachtet werden. Um den Zusammenhang von u_{sid} und u_{syn} zu erfahren, verfolgen wir einmal die Wege der Erde und eines *äußern* Planeten, indem wir sie auf der Ekliptik, in deren Nähe sich alle Planeten bewegen, etwa von einer Konjunktion aus messen; dabei bezeichnen wir mit u die siderische Umlaufzeit der Erde, das *siderische* Jahr ($s. u.$).

Da $u < u_{\text{sid}}$ des betreffenden Planeten, so bleibt dieser mit jedem Schritte im Verhältnis u/u_{sid} hinter der Erde zurück, gerade so wie bei einer Uhr der Stundenzeiger hinter dem Minutenzeiger zurückbleibt, bis dieser jenen eingeholt hat. Jedesmal wenn der Minutenzeiger (bzw. die Erde) den vorangehenden Ausgangspunkt des Stundenzeigers (bzw. des Planeten) erreicht hat, ist dieser wieder um den Quotienten $1/12$ bzw. u/u_{sid} auf seiner Bahn weitergerückt. Die einzelnen Schritte bilden somit eine *unendliche, konvergente geometrische Reihe* mit dem Quotienten $1/12$ bzw. u/u_{sid} , und die *Summe* all dieser immer kleiner werdenden Schritte ist eben u_{syn} .

Wählen wir einen innern Planeten, so ist der Quotient u_{sid}/u , die Überlegungen sind aber dieselben.

$$\text{Also } u_{syn} = \frac{u}{1 - u/u_{sid}} = \frac{u \cdot u_{sid}}{u_{sid} - u};$$

$$\text{oder } \frac{1}{u_{syn}} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u_{sid}} \text{ (äußerer Planet)}$$

$$\text{und } u_{syn} = \frac{u_{sid}}{1 - \frac{u_{sid}}{u}} = \frac{u \cdot u_{sid}}{u - u_{sid}};$$

$$\text{oder } \frac{1}{u_{syn}} = \frac{1}{u_{sid}} - \frac{1}{u} \text{ (innerer Planet)}$$

$$\text{also } \frac{1}{u_{sid}} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u_{syn}}, \text{ bzw. } \frac{1}{u} = \frac{1}{u_{sid}} + \frac{1}{u_{syn}} \text{ (2)}$$

je nachdem es sich um einen äußern oder innern Planeten handelt.

Daraus ergibt sich die anschließende Tabelle, in der die große Halbachse der Erdbahn $a = 1$ gesetzt ist.

| Planet | u_{syn} | u_{sid} | a_1 |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| Merkur | 115,88 t | 88,969256 t | 0,3870984 |
| Venus | 583,92 t | 224,7008 t | 0,7233301 |
| Erde | | 1jj 0,00636 t | 1,0000013 |
| Mars | 779,94 t | 1jj 321,72982 t | 1,5236781 |
| Jupiter | 398,88 t | 11jj 314,839 t | 5,202561 |
| Saturn | 378,09 t | 29jj 166,98 t | 9,554747 |
| Uranus | 369,66 t | 84jj 7,45 t | 19,21814 |
| Neptun | 367,49 t | 164jj 280,3 t | 30,10957 |
| Pluto | 366,72 t | 248jj 151,5 t | 39,51774 |

(t: Tage jj: julian. Jahre)

Als physikalische und astronomische Größen, deren Werte teils genau, teils erst mit großer Annäherung bekannt sind, kommen im weitern die folgenden in Frage:

Die Zahl der Bogen-Sekunden (")

$$\text{auf den Bogen (arc) } 1 \text{ } 206264,8 \dots = 10^{5,314425}$$

die Zahl der Zeitsekunden (s) im Tage

$$86400 = 10^{4,936514}$$

die Länge des siderischen Jahres (u)

$$365,25636 \text{ t} = 10^{2,562598} \text{ t}$$

die große Halbachse der Erdbahn (a)

$$149,505 \cdot 10^6 \text{ km} = 10^{8,174653} \text{ km}$$

die Schwerebeschleunigung g am Äquator

$$9,78 \text{ ms}^{-2} = 10^{2,990339} \text{ cm s}^{-2}$$

der Sonnendurchmesser als Vielfaches des Äquatordurchmessers der Erde $109,06 = 10^{2,037705}$

2) Diese Rechnung wird stark vereinfacht, wenn die sog. Additions- und Subtraktions-Logarithmen benützt werden.

der mittlere Halbmesser der Sonnenscheibe

$$962'' = 10^{2,983175''}$$

die Masse der Sonne als Vielfaches

$$333432 = 10^{5,523006}$$

der Erdmasse

die Erdmasse (Volumen mal spez. Gewicht)

$$5,98 \cdot 10^{27} \text{ gr} = 10^{27,776701} \text{ gr}$$

die Gravitations-Konstante

$$f = (6,670 \pm 0,005) \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ gr}^{-2} \\ = 10^{0,824126-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ gr}^{-2}$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen und Angaben kann die mittlere *Geschwindigkeit* der einzelnen Planeten sowohl im Anschluß an das Gravitationsgesetz wie im Anschluß an die Keplerschen Gesetze berechnet werden.

I. Im Anschluß an das *Gravitations-Gesetz*:

Wie oben bereits bemerkt wurde, ist einerseits

$F = f \cdot \frac{M \cdot M_1}{a^2}$ andererseits ist $F = M \cdot w$ ($w =$ Beschleunigung)³⁾.

Da weiter ein kleiner Ellipsenausschnitt wie ein Kreisabschnitt behandelt werden kann, ist auf ihn die kreisförmige Zentralbeschleunigung anwendbar:

$$w = \frac{v^2}{a} \quad (v = \text{Geschwindigkeit})$$

$$\text{also } v = \sqrt{a \cdot w} = \sqrt{\frac{M \cdot f}{a}} = 29,826 \text{ km} \quad 4)$$

$$\text{und } w = \frac{M \cdot f}{a^2} = 0,595014 \text{ cm s}^{-2}$$

Dieser Wert von w wird von zwei andern Seiten her bestätigt:

a) von einer andern Anwendung des *Gravitations-Gesetzes*. Die Schwerebeschleunigung, die am Äquator 978 cm s^{-2} beträgt, nimmt auf der Sonnenoberfläche proportional der größeren Sonnenmasse zu und nimmt ab mit dem Quadrat der Entfernung vom Sonnenmittelpunkt; sie beträgt also dort $\frac{978 \cdot 333432}{109,06^2} = 27411,6 \text{ (cm s}^{-2}\text{)}$. Da der mittlere scheinbare Halbmesser der Sonnenscheibe $962''$ beträgt, ist der mittlere Abstand der Erde von der Sonne $206265/962 = 214,41$ Sonnenhalbmesser⁵⁾.

3) In der mathematischen Physik wird die Geschwindigkeit gewöhnlich mit v (= velocitas) und die Beschleunigung mit a (= acceleratio) bezeichnet. Da hier aber a den Sonnenabstand bezeichnet, so wird, um Verwechslungen zu vermeiden, die Beschleunigung mit w bezeichnet.

4) Im cm-gr-sec.-System, wie hier, müssen die km durch cm ersetzt werden: $1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$.

5) Dem Schinkel (Parallaxe) $1''$ entspricht eine Entfernung von dem 206265fachen Durchmesser des betreffenden Gegenstandes, in unserm Falle, der Sonne.

In der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ist somit die von der Anziehungskraft der Sonne bewirkte Beschleunigung w der Erde gegen die Sonne hin $214,41^2$ mal schwächer und beträgt daher nur noch $5,963 \text{ mm s}^{-2}$. Nach der Lehre der Mechanik beträgt der in der Zeit t infolge der Beschleunigung w zurückgelegte Weg $\frac{1}{2} \cdot w \cdot t^2$. In der Zeit t^s nähert sich somit die Erde, wenn von ihrer Tangentialgeschwindigkeit oder Zentrifugalkraft abgesehen und *nur* die Gravitationskraft der Sonne in Rechnung gesetzt wird, der Sonne um $\frac{1}{2} \cdot w = 2,98 \dots \text{ mm}$.

b) Dieses Ergebnis erhält man auch als die sog. Pfeilhöhe des Winkels $\frac{3548,19''}{86400}$ ⁶⁾. Im Kreisabschnitt mit dem Halbmesser a und dem Winkel φ beträgt die Pfeilhöhe $a(1 - \cos \varphi) = 2a \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}$. Bei sehr kleinen Winkeln, wie dies hier der Fall ist, kann \sin durch arc ersetzt werden. Die Pfeilhöhe beträgt demnach

$$2a \cdot \left(\frac{1774,09}{86400 \cdot 206265} \right)^2 = 2,963 \text{ (mm)} \quad 7)$$

II. Im Anschluß an das erste und das zweite Keplersche Gesetz:

Der in der Zeiteinheit vom Fahrstrahl beschriebene *Ellipsen-Ausschnitt* kann wie ein *Kreisabschnitt* behandelt werden. Für einen solchen gilt aber:

Bogen = $r \cdot \text{arc} v$; = $\frac{1 \ 296 \ 000''}{365,25636 \cdot 86400}$. Also beträgt der in der Zeiteinheit durchlaufene (Kreis-) Bogen der Erde:

$$\frac{149,604 \cdot 10^6 \cdot 1 \ 296 \ 000}{365,25636 \cdot 86400 \cdot 206265} \text{ km} = 29,767 \text{ km (im Mittel).}^3)$$

⁶⁾ Während eines siderischen Jahres wird der Vollkreis von $1 \ 296 \ 000''$ durchlaufen; auf den einzelnen Tag trifft es daher im Mittel $3548,19 \dots$, auf die Zeit-Sekunde 86400 mal weniger.

⁷⁾ Um das durch arc ausgedrückte absolute Bogenmaß zu erhalten, ist die Zahl der Bogen-Sekunden durch 206265 zu dividieren.

III. Im Anschluß an das *dritte Keplersche Gesetz*: Wird in diesem die Umlaufzeit u bzw. u_1 durch die mittlere Geschwindigkeit v bzw. v_1 ersetzt, also $u \approx \frac{2\pi r}{v}$, so erhält man sofort: $\frac{a}{a_1} = \left(\frac{v_1}{v} \right)^2$ oder $v_1 = v \cdot \sqrt{\frac{a}{a_1}}$.

Nach irgend einem dieser drei Wege erhält man für die einzelnen Planeten (aus *Annuaire* für das Jahr 1960 errechnet)

| | ω/tag | v | ε (= Exzentrizität der Bahnellipse) | |
|--------------------|---------------------|-----------|---|-------------|
| Merkur | 14 732,42 | 48,84 km | 0,205 626 | (wachsend) |
| Venus | 5 767,67 | 35 km | 0,006 794 | (abnehmend) |
| Erde ⁹⁾ | 3 548,19 | 29,765 km | 0,016 724 | (abnehmend) |
| Mars | 1 886,52 | 24,113 km | 0,093 366 | (wachsend) |
| Jupiter | 299,13 | 14,055 km | 0,048 433 | (wachsend) |
| Saturn | 120,45 | 9,655 km | 0,055 685 | (abnehmend) |
| Uranus | 42,23 | 6,808 km | 0,046 329 | (abnehmend) |
| Neptun | 21,53 | 5,44 km | 0,009 001 | (wachsend) |
| Pluto | 14,28 | 4,745 km | ? | ? |

| | r | v | ω |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------|----------|
| = 0° Perihel: 1. Januar | $146,981 \cdot 10^6 \text{ km}$ | $30,263 \text{ km}$ | $3669,4$ |
| = 90° 4. April | $149,133 \cdot 10^6 \text{ km}$ | $29,756 \text{ km}$ | $3547,7$ |
| = 270° 6. Okt. | | | |
| = 180° 2. Juli | $151,981 \cdot 10^6 \text{ km}$ | $29,268 \text{ km}$ | $3431,9$ |

⁸⁾ Der jeweils richtige Wert für r ergibt sich aus der Polar-Gleichung der Ellipse:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \vartheta} \quad (\varepsilon = \text{numerische Exzentrizität der Ellipse})$$

wobei die Anomalie ϑ vom Scheitelpunkt (Perihel) an zu zählen ist und täglich im Mittel um ω wächst. Da nach dem zweiten Keplerschen Gesetz $r \cdot \omega$ konstant ist, verhalten sich r und ω umgekehrt proportional.

⁹⁾ Wird die Formel von Anm. 8 auf die Erde angewandt, so ändern sich r , v und ω wie folgt:



Hauptmerkmal unserer Krankenkasse: Sie ist ganz den Bedürfnissen der Lehrerschaft angepaßt.

Erkundige Dich unverbindlich bei unserm Kassier (Alfred Egger, Rorschacherstr. 165, St. Gallen)!