

# Zentrische Streckung

Autor(en): **Pfister, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **48 (1961)**

Heft 15

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-534938>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Wir betrachten hier eine Beziehung zwischen Figuren, die für die Abbildungsgeometrie grundlegend ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Strahlensätze bekannt sind. Ein paar Begriffe und geometrische Beziehungen werden erst eingeführt. Die zentrische Streckung hat in neueren Schulbüchern unter den Kapiteln Strahlensätze, Ähnlichkeit und Proportionalität Platz gefunden. Der Schule wird mit ihrer Behandlung kein neuer Stoff aufgebürdet, handelt es sich doch nur um eine bessere Sichtung von an und für sich schon dem Schulunterricht der mittleren Stufen der höheren Schulen zugewiesenen Stoff. Da die Fassungskraft und das Anschauungsvermögen der Schüler uns Schwierigkeiten bereiten, wenn wir vom Punkt aus über die Linie zur Fläche und schließlich zum Körper vordringen wollen, führen wir die neuen Begriffe mit dem Schattenbild ein. Dabei tragen wir der Schulung des Raumempfindens genügend Rechnung. Der Punkt ist, vom Schüler aus betrachtet, durchaus nicht das einfachste geometrische Element.

*Wir werfen ein Schattenbild auf die Wand (Abb. 1)*

Der Schatten «sieht aus wie» (ähnlich!) die schattenwerfende Fläche, wenn diese parallel zur Wand steht. Die Dreieckseiten verlaufen dann ebenfalls parallel zu den entsprechenden Schattenlinien. Die Lage und Größe des Schattens ändern sich je nach der Lage der Lichtquelle. Kleiner als die gegebene Figur kann das Schattenbild nicht werden.

Auf weitere perspektivische Beziehungen braucht man hier nicht einzugehen.

*Repetition des zweiten Strahlensatzes*

Wenn  $AB \parallel A'B'$ ,  $BC \parallel B'C'$  und  $AC \parallel A'C'$  so gilt:

$$\left. \begin{array}{l} A'B' : AB = A'Z : AZ \\ A'B' : AB = B'Z : BZ \\ B'C' : BC = B'Z : BZ \\ B'C' : BC = C'Z : CZ \\ A'C' : AC = C'Z : CZ \\ A'C' : AC = A'Z : AZ \end{array} \right\} \begin{array}{l} A'B' : AB = B'C' : BC \\ B'C' : BC = A'C' : AC \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} A'B' : AB = A'Z : AZ \\ A'B' : AB = B'Z : BZ \\ B'C' : BC = B'Z : BZ \\ B'C' : BC = C'Z : CZ \\ A'C' : AC = C'Z : CZ \\ A'C' : AC = A'Z : AZ \end{array}} \right\} A'B' : AB = A'C' : AC$$

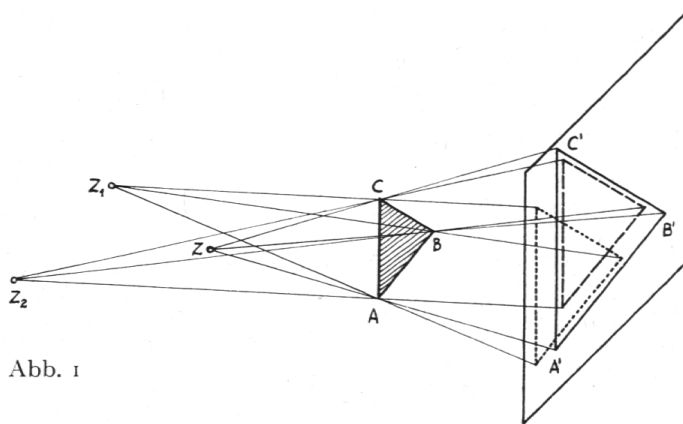


Abb. 1

*Ergebnis:* Alle Seiten sind im gleichen Verhältnis vergrößert worden. Das Verhältnis der Strecken Lichtpunkt – Bildpunkt zu den entsprechenden Strecken Lichtpunkt – Gegenstandspunkt ist stets dasselbe und stimmt mit dem Vergrößerungsverhältnis überein.

$$\frac{A'Z}{AZ} = \frac{B'Z}{BZ} = \frac{C'Z}{CZ} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \\ = \text{Konstant}; \frac{P'Z}{PZ} = k$$

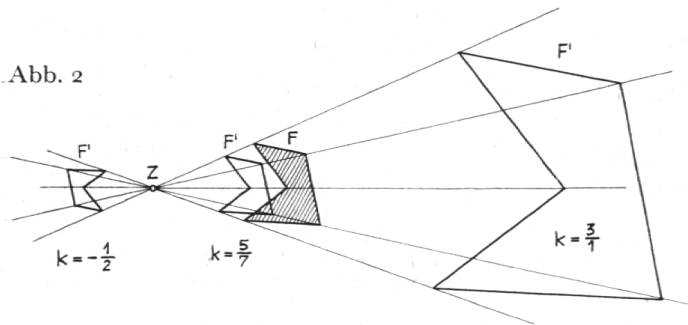
Wir heißen die Schattenfigur die zentrische Streckung der Dreiecksfläche, den Lichtpunkt Streckungszentrum und die Lichtstrahlen die Streckungsstrahlen. Wir nennen auch den Vorgang solcher Vergrößerungen zentrische Streckung, wie wir dann von zentrisch gestreckten Flächen, Strecken und Punkten reden.

Um den Fall der Verkleinerung damit zu vergleichen, können wir ein Dreieck auf die Wandtafel zeichnen und eine Glasscheibe parallel zur Wandtafel in einiger Entfernung aufstellen. Die Lichtstrahlen, die von den Ecken des Dreiecks kommen

und auf unser rechtes Auge gerichtet sind, bestimmen dann, sofern wir hinter der Glaswand stehen, das verkleinerte Bild des Dreiecks auf der Glasplatte.

Es gilt somit:

1. Alle Streckungsstrahlen gehen vom gleichen Punkt aus, vom Streckungszentrum Z.
2. Das Verhältnis der Abstände vom gestreckten Punkt und vom gegebenen Punkt zum Streckungszentrum



zentrum ist für jede zentrische Streckung ein bestimmtes, festgelegt durch die Streckungszahl (Streckungsfaktor, Streckungsverhältnis)  $k$ .

3. Zentrum, Gegenstandspunkt und Bildpunkt liegen stets auf einer Geraden, dem Streckungsstrahl.

Abb. 2 zeigt die Streckung eines unregelmäßigen Fünfecks mit einspringender Ecke, bezogen auf ein Zentrum Z, aber ausgeführt mit verschiedenen Streckungszahlen.

Nehmen wir  $0 < k < 1$ , so wird die gestreckte Figur gegenüber der Ausgangsfigur verkleinert erscheinen. Wir können auch mit negativem  $k$  strecken und dabei den aus der Algebra bekannten Begriff der Richtungsänderung verwenden. Demnach bedeutet:

- +  $k > 1$  Vergrößerung diesseits vom Zentrum
- $k > 1$  Vergrößerung jenseits vom Zentrum
- o  $+ k < 1$  Verkleinerung diesseits vom Zentrum
- o  $- k < 1$  Verkleinerung jenseits vom Zentrum

Ferner ergibt dann:

- +  $k = 1$  Abbildung in sich selbst (Bild identisch mit Gegenstand)
- $k = 1$  Punktsymmetrische Abbildung

### Übungen (Abb. 3, 4, 5, 6)

1. Strecke das Dreieck ABC mit den Seiten  $a = 7$  cm,  $b = 4$  cm,  $c = 5,5$  cm, bezogen auf ein be-

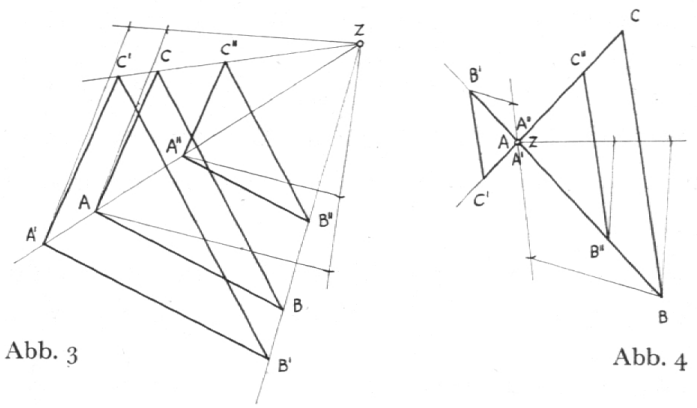


Abb. 3

Abb. 4

lieblich gewähltes Zentrum außerhalb der Dreiecksfläche mit  $k = 6/5$  und auch mit  $k = 2/3$ .

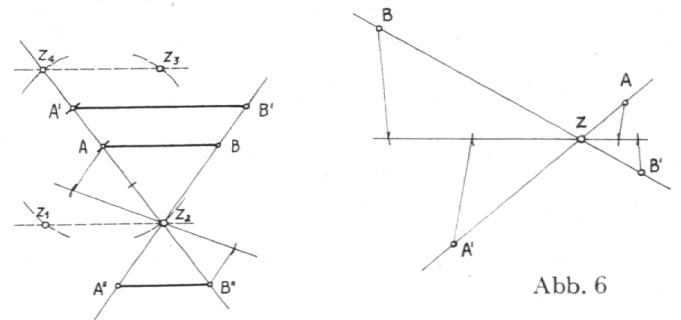


Abb. 5

Abb. 6

2. Strecke dieses Dreieck auch mit  $k = -1/3$  und auch mit  $k = 5/8$ , bezogen auf den Eckpunkt A als Zentrum.

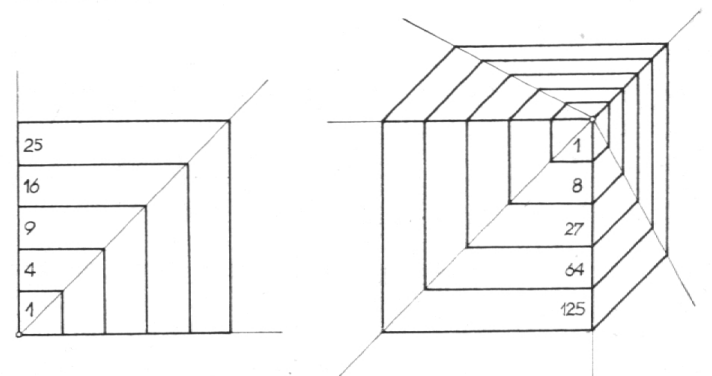


Abb. 7

Abb. 8

3. Strecke eine 3 cm lange Strecke AB, bezogen auf einen Punkt Z, der von dieser Strecke 2 cm Abstand hat und vom Punkt A eine Entfernung von  $2\frac{1}{2}$  cm, mit  $k = 1,5$  und auch mit  $k = -0,8$ .

Merke: Für Z sind vier Lagen möglich (Schnittpunkte der geom. Oerter Kreis und Parallelenpaar!).

4. Strecke einen Punkt A, der von einem beliebigen Zentrum  $1\frac{1}{2}$  cm entfernt ist, mit  $k = -2,8$  und einen Punkt B, der vom gleichen Zentrum 6 cm entfernt ist, mit  $k = -0,3$ .

### Streckung eines Punktes:

1. Der Punkt  $P'$  liegt bei  $k > 1$  weiter von  $Z$  weg als  $P$  und bei  $0 < k < 1$  näher.
2. Das Verhältnis  $P'Z : PZ$  ergibt die Streckungszahl  $k$ .
3.  $P$ ,  $Z$  und  $P'$  liegen auf einer Geraden, wobei nur bei negativem  $k$   $Z$  zwischen  $P$  und  $P'$  liegen kann.

### Streckung einer Strecke:

1. Sie ergibt sich aus der Streckung ihrer Endpunkte.
2. Es genügt die Streckung eines Endpunktes, da der andere mit Hilfe der Parallelität gefunden werden kann (zweiter Strahlensatz!).
3. Die neue Strecke steht zur gegebenen im Verhältnis  $k$ .

### Streckung einer ebenen Fläche:

1. Sie ergibt sich aus der Streckung ihrer Linien bzw. Punkte.
2. Es genügt die Streckung eines Punktes, da nachher mit der Parallelität gearbeitet werden kann.
3. Die gestreckte Fläche steht zur gegebenen im Flächenverhältnis  $k^2$ .

### Streckung von Körpern:

1. Sie ergibt sich aus der Streckung ihrer Flächen, Kanten oder Punkte.
2. Nachdem ein neuer Punkt festgelegt ist, wird wiederum die Parallelität benützt.
3. Der gestreckte Körper steht zum gegebenen im Volumenverhältnis  $k^3$ .

Die Abb. 7 und 8 veranschaulichen in einfacher Weise das quadratische und kubische Streckungsverhältnis bei Flächen bzw. Körpern.

### Kreisstreckung (Abb. 9 und 10)

Lage und Größe eines Kreises in der Ebene sind bestimmt durch den Mittelpunkt und einen Peripheriepunkt oder durch drei Peripheriepunkte. Praktisch zieht man die erste Bestimmungsart vor.

### Aufgabe:

Es soll ein Kreis ( $M$ ;  $r = 2,6$  cm) bezogen auf  $Z$  ( $MZ = 5$  cm) mit  $k = 1,3$  und auch mit  $k = -\frac{1}{4}$  gestreckt werden.

### Lösung:

$M$  strecken und für  $P$  die Parallelität anwenden.

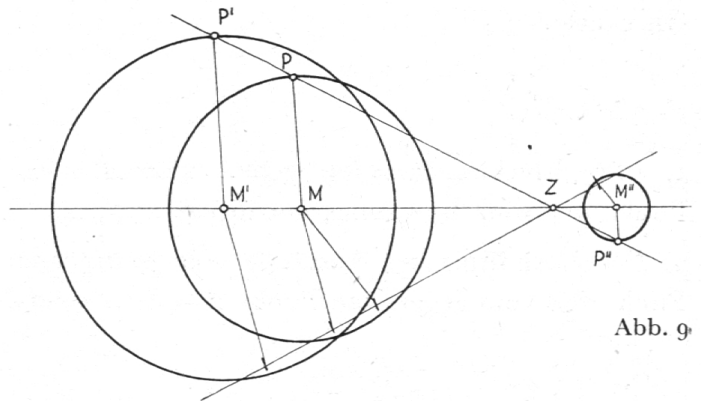


Abb. 9

### Gegenaufgabe:

Zu zwei beliebigen Kreisen ( $M_1$ :  $r_1$  und  $M_2$ :  $r_2$ ) sollen die Streckungszentren bestimmt werden.

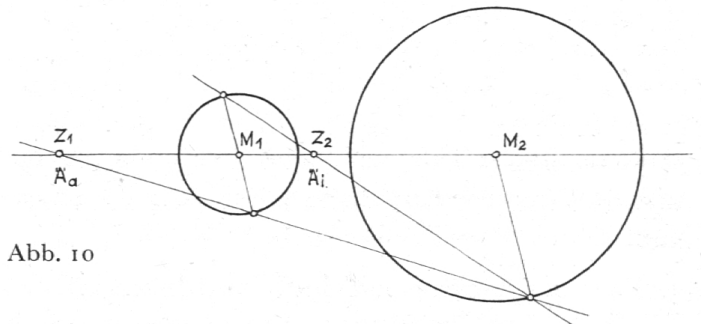


Abb. 10

### Zur Lösung:

Jeder Kreis kann als Streckung eines anderen in derselben Ebene oder in einer Parallelebene gelegenen Kreises betrachtet werden. Die beiden Streckungszentren  $Z_1$  und  $Z_2$  werden auch als Ähnlichkeitspunkte bezeichnet:  $Z_1$  ist der äußere Ähnlichkeitspunkt  $\ddot{A}_a$  und  $Z_2$  der innere Ähnlichkeitspunkt  $\ddot{A}_i$ . (Vergleiche äußere und innere Teilung!) Die Punkte  $Z_1$ ,  $M_1$ ,  $Z_2$  und  $M_2$  sind harmonische Punkte.

### Mehrfachstreckung (Abb. 11)

Wird eine zentrisch gestreckte Figur nochmals gestreckt, was sich beliebig oft wiederholen ließe, so spricht man von Mehrfachstreckung. Die mehrfach gestreckte Figur kann jeweils durch eine einzige Streckung in die Ausgangsfigur zurück gebracht werden. Als Beispiel ist hier ein unregelmäßiges Fünfeck bezogen auf einen Eckpunkt mit  $k_1 = -\frac{5}{3}$  gestreckt worden. Die neue Figur wurde auf einen anderen Eckpunkt bezogen mit  $k_2 = -\frac{2}{5}$  gestreckt.  $F''$  ist gegenüber  $F$  gestreckt mit  $k = k_1 \cdot k_2 = \frac{2}{3}$ . Übungshalber und um neue Erkenntnisse zu ge-

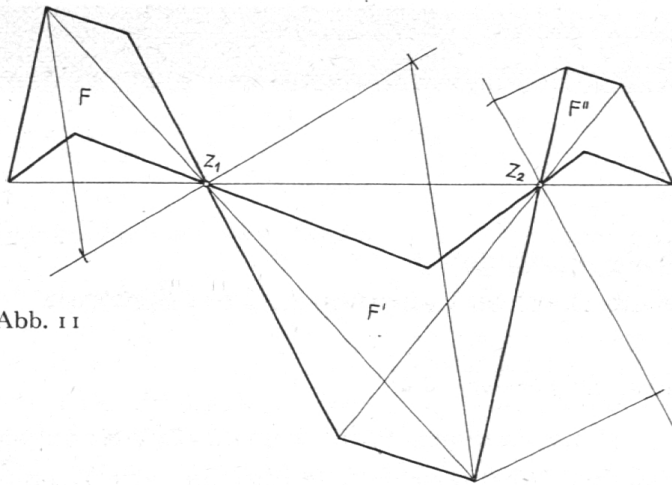


Abb. 11

winnen, strecke man auch eine Figur mit verschiedenen  $k$  und dann auch eine Figur mit verschiedenen Streckungszentren, aber mit gleichen  $k$ . Dabei darf jedoch nicht von Mehrfachstreckung gesprochen werden.

*Einige Konstruktionsaufgaben (Abb. 12 bis 17)*

1. Konstruiere ein Dreieck aus  $a : c = 5 : 7$ ,  $\beta = 75^\circ$ ,  $h_c = 4$  cm. Es wird die der Lösungsfigur ähnliche Hilfsfigur gezeichnet.

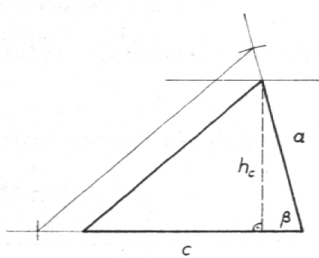


Abb. 12

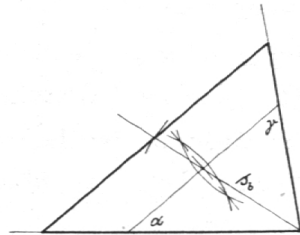


Abb. 13

2. Konstruiere ein Dreieck aus  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  $s_b = 4,6$  cm. Wiederum ist die Hilfsfigur in die verlangte Figur zu strecken.

3. Konstruiere ein Dreieck aus  $b : h_b : s_b = 4 : 5 : 6$ ,  $w_a = 6$  cm.

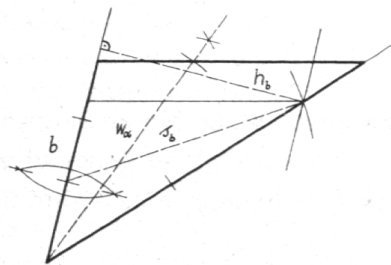


Abb. 14

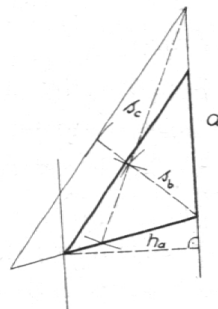


Abb. 15

4. Konstruiere ein Dreieck aus  $a : s_b : s_c = 5 : 3 : 6$ ,  $h_a = 3,2$  cm.

5. Einem Dreieck ist ein Quadrat einzuschreiben. Lösung: Ein beliebiges Hilfsquadrat, dessen eine Seite in einer Dreiecksseite liegt, berührt mit einer Ecke eine andere Dreiecksseite und wird dann gestreckt.

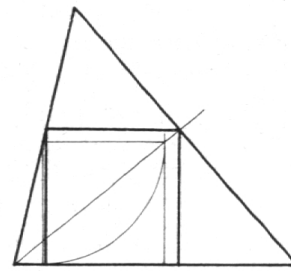


Abb. 16

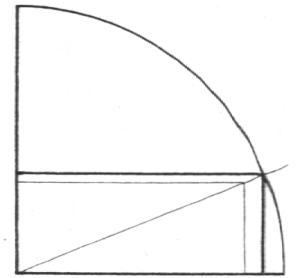


Abb. 17

6. Einem Viertelskreis ist ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis  $1 : b = 5 : 2$  einzuschreiben.

Eine Auswahl von Aufgaben bieten: Reidt-Wolff, Mathematik, Mittelstufe, Band 2. Fladt-Kraft-Dreetz, Geometrie der Mittelstufe, 4. Band.

*Zentrische Streckung im Meßtischverfahren (Abb. 18)*

$P_{1.1} P_{2.2}$  wahre Länge der Standlinie  
 $P_{1.1} P_{2.1}$  (oder  $P_{1.2} P_{2.2}$ ) Abbildung der Standlinie  
 Fixierung des Tisches: 1. Lage in  $P_{1.1}$ , 2. Lage in  $P_{2.2}$   
 $k = P_{1.1} P_{2.1} : P_{1.1} P_{2.2}$

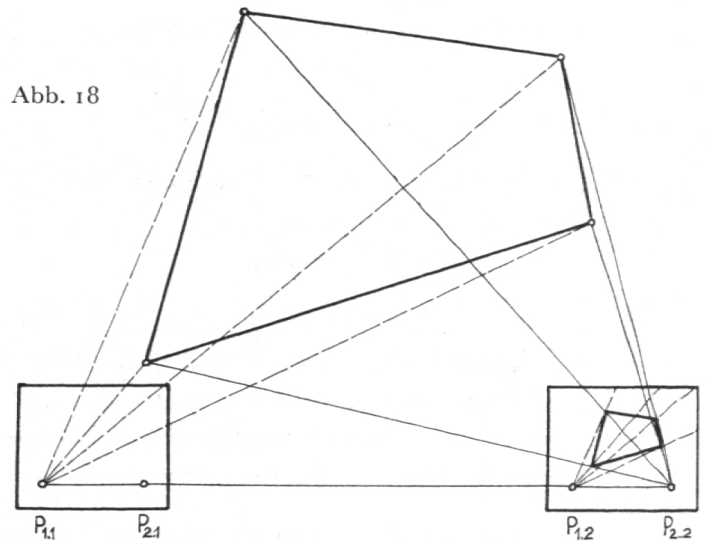


Abb. 18

*Lehrsatz des Desargues (Abb. 19 und 20)*

Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke durch einen Punkt und sind zwei Paare entsprechender Seiten parallel, so ist es auch das dritte Seitenpaar.

Beweis nach Strahlensatz:  
 $ZA' : ZA = ZB' : ZB$  (beides =  $ZC' : ZC$ ) also  $A'B' \parallel AB$

Einladung zur Generalversammlung in Frauenfeld

Sonntag, den 10. Dezember 1961, im Hotel ‚Falken‘, in Zusammenarbeit mit dem Thurgauischen Katholischen Erziehungsverein.

Programm

- 9.10 Festgottesdienst in der Stadtpfarrkirche  
Predigt: ‚Erziehung und Kirche‘, von H.H. Dr. Emil Spieß, Meggen
- 10.30 Führung durch den alten Stadtkern von Frauenfeld. Besammlung auf dem Bankplatz beim Bernerhaus in unmittelbarer Nähe der Kirche
- 11.00 *Generalversammlung* des Katholischen Erziehungsvereins der Schweiz  
Eröffnung – Protokoll – Jahresrechnung – Jahresbericht – Wahlen – Umfrage  
Kurzfederat: ‚Das thurgauische Schulwesen gestern und heute‘, von H.H. Dr. Albert Eigenmann, Sekundarschulinspektor, Steinebrunn
- 12.30 Mittagessen (Hotel ‚Falken‘)
- 14.30 Jahresversammlung des Thurgauischen Katholischen Erziehungsvereins  
Statutarische Traktanden
- 15.00 Vortrag: ‚Sexuelle Erziehung und Aufklärung‘ von Herrn Dr. Beat Imhof, Schulpsychologe, Zug  
Schlußwort: Hochwürdigster Herr Dr. Josephus Hasler, Bischof, Protektor des KEVS
- 16.30 Schlußandacht in dem ehemaligen Kapuzinerkloster Frauenfeld

Wir laden Sie herzlich und freundlich zu dieser Tagung ein.

Katholischer Erziehungsverein der Schweiz:

Der Präsident: *Justin Oswald*  
Der Sekretär: *Paul Hug*

Reisekarte des Katholischen Lehrervereins der Schweiz

Erste Kommentare

«...Heute morgen hörte ich im Lehrerzimmer plötzlich begeisterte Urteile über die neue Lehreragenda KLVS. Schicken Sie mir bitte sofort auch ein Exemplar...» (Baselland)

«...Der Preis ist für alle miteingezogenen Dienste recht bescheiden. Besonders gefreut hat mich die Auswahl der auf den Lehrer zugeschnittenen Texte...» (Zürich)

«...Ich möchte Sie inständig bitten, mir unbedingt auch nächstes Jahr die Lehreragenda wieder zuzustellen...» (Graubünden)

«...Herzliche Gratulation zum wohl gelungenen ‚Wurf‘...» (Solothurn)

Sichern Sie sich heute noch Ihre Lehreragenda 1962 (Fr. 4.30 samt Reisekarte).

Verwaltung der Lehreragenda KLVS, Aesch am See LU. Tel. (041) 88 65 59.

Schluß von Seite 105

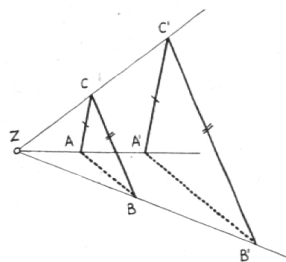


Abb. 19

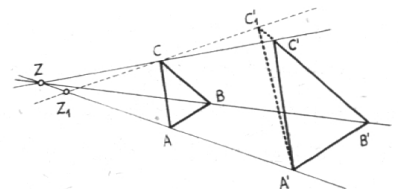


Abb. 20

Kehrsatz:

Sind die drei Paare entsprechender Seiten zweier nicht kongruenter Dreiecke parallel, so gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch *einen* Punkt.

Beweis indirekt:

Annahme:  $Z_1$  wäre nicht in  $Z$ .

So würde nach Desargues gelten:  $A'C'_1 \parallel AC$

Da nach der Voraussetzung  $A'C' \parallel AC$  ist, kann  $A'C'_1$  nicht von  $A'C'$  verschieden sein, also kann  $Z_1$  nicht außerhalb  $Z$  sein.