Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 51 (1964)
Heft: 12

Artikel: Archimedes, der grösste Mathematiker des Altertums
Autor: Hanser, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-533110

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

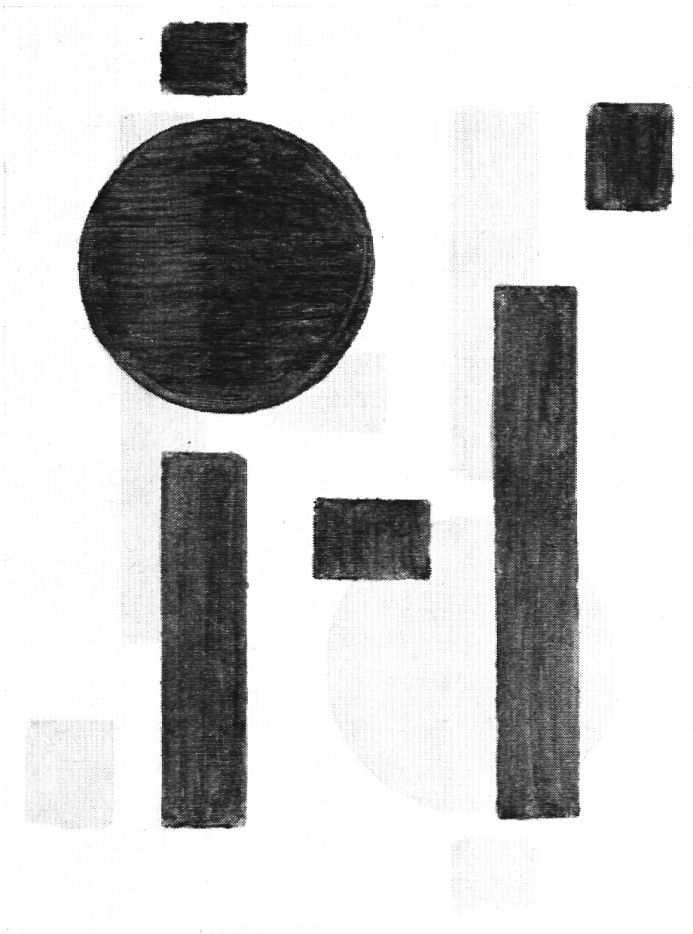
Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

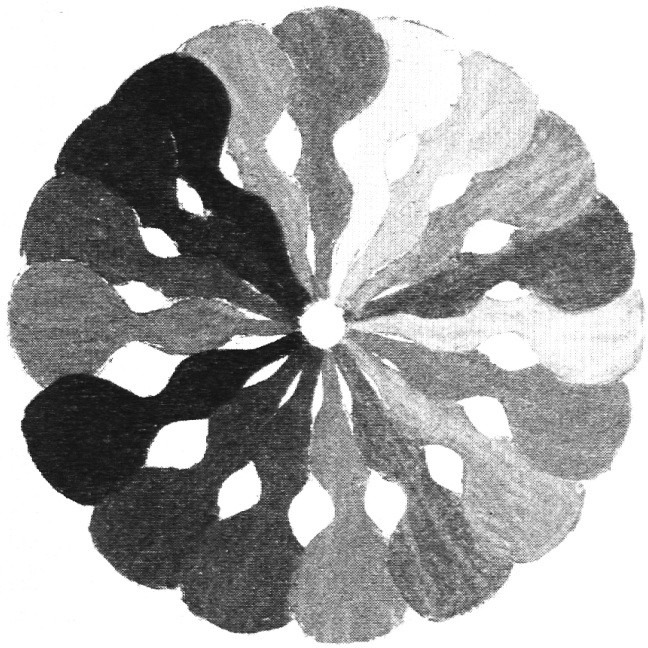
Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

die ausgeschnittenen Stellen mit Neocolor aus. Reizvoll wird diese Technik aber erst, wenn man die Schablone um 180° dreht oder in irgendeiner Richtung verschiebt. Beim zweiten Bemalen verwendet man die dunklere oder eine Kontrastfarbe. Bevor man aber die Schablone das zweitemal verwendet, reinigt man sie mit einem Messer von den Farbrückständen, um unliebsamen, andersfarbigen Strichen vorzubeugen.



b) Man braucht sich mit den Schablonen natürlich nicht nur an Streifenmotive zu halten. Es können die beliebigsten Formen ausgewählt werden. Hier ein Vorschlag, wie man sie beim Farbkreis verwenden kann. Man schneidet eine ähnliche Figur aus, wie sie Abbildung 6 zeigt. Man heftet diese Schablone mit einem Reißnagel auf einer Holzunterlage oder auf dem Reißbrett so fest, daß sie im Kreise herum gedreht werden kann. Nun muß man berechnen, wie manches Mal man die Schablone im Kreise abtragen will. Man kann es auch so berechnen, daß sich die Figuren überschneiden. Unter Umständen muß man sich auch einfach nach den vorhandenen Farben richten. Diese Zeichnung erfordert Ausdauer, dafür ist aber die Wirkung groß.



Archimedes, der größte Mathematiker des Altertums

Sekundar- und Mittelschule

Dr. G. Hauser, Biel (vormals in Luzern)

1. Teil

I. Biographische Notizen

Zunächst sollen einige biographische Angaben den äußern Rahmen wenigstens andeuten, in welchem die bewundernswerten Schöpfungen des Archimedes entstanden sind.

Auf alle Fälle steht sein nahes, freundschaftliches

Verhältnis zum Königshause von Syrakus während seines ganzen Lebens außer Zweifel. Er war nämlich mit dem König *Hieron II.* von Syrakus und mit seinem Sohne *Gelon* befreundet.

Vermutlich erhielt Archimedes zuerst Unterricht von seinem Vater. Dann folgte ein längerer Studienaufenthalt in *Alexandria*, im Norden von Ägypten, beim Nildelta. Alexandria war ja das damalige Zentrum der griechischen Wissenschaft, wo *Euklid* im ‹Museion› gelehrt und seine berühmten ‹Elemente› geschrieben hatte. Das ‹Museion› war eine Forschungsstätte und Bibliothek, die allererste Universität.

Auch nach seiner Rückkehr in die Heimatstadt Syrakus blieb Archimedes in freundschaftlichem und wissenschaftlichem Verkehr mit alexandrinischen Gelehrten wie mit dem Astronomen und Mathematiker *Konon*, mit dessen Nachfolger *Dositheus*, mit *Zeuxippus* sowie mit *Eratosthenes*, dem Mathematiker und Geographen. Ihnen teilt er seine neuen Entdeckungen und Ergebnisse in Briefen sofort mit, meistens zuerst ohne Beweis. Und dies weil er, wie er selbst in der Einleitung zur Abhandlung ‹Über Spiralen› schreibt, «gerne jedem Mathematiker das Vergnügen gönnen möchte, den Beweis selbst zu finden». (Das ist gewiß eine sehr lobenswerte Haltung gegenüber Fachkollegen, die nicht selbstverständlich und leider meistens gar nicht üblich ist.) Es dauerte oft Jahre, bis Archimedes, von seinen Freunden bedrängt, seine Lehrsätze mit vollständigen Beweisen der Öffentlichkeit preisgab. Seine Schriften ließ er in Alexandria erscheinen. Er schrieb sie nicht in der gewöhnlichen Verkehrssprache, sondern in seinem heimatlichen dorischen Dialekt. Dies ist ein typischer Zug seiner Unabhängigkeit von jeder Schultradition, die ihn auch als Forscher auszeichnet. Archimedes hat kein uns erhaltenes Sammelwerk geschrieben. Er verfaßte einzelne Abhandlungen, in denen er zumeist Neues, von ihm selbst Erdachtes mitteilte. Die Schriften von Archimedes sind leider nur zum Teil auf uns gekommen und zudem nicht alle im reinen, unverderbten Urtext.

Bis zu seinem unnatürlichen, tragischen Tode blieb Archimedes in Syrakus, wo er ganz der Wissenschaft lebte. Seine Stellung scheint eine mehr private als öffentliche gewesen zu sein. Wenigstens ist nirgends die Rede von Staatsgeschäften, denen er vorgestanden hätte. Allerdings wurde er, wie schon angedeutet, der Freund und technische Berater des Königs Hieron. Dem Sohn und Mitregenten Hierons, Gelon, hat er eine geistreiche populäre Abhandlung über ‹Die Sandzahl› gewidmet, von der noch die Rede sein wird. Es gibt viele und zum Teil recht glaubwürdige Berichte über seine mechanischen Leistungen für private Zwecke des Königs und bei der Verteidigung seiner Vaterstadt gegen die Römer unter dem Feldherr *Claudius Marcellus* in den Jahren 214–212 v. Chr. Besonders drastisch ist die Schilderung der Wirkung Archimedischer Verteidigungskunst bei Plutarch. (Diese Schilderung kann man im Buch von Kowalewski über ‹Große Mathematiker›, S. 27, nachlesen.) Erst nach zweijähriger erfolgloser Belagerung und nur durch eine Überrumpelung von der Landseite her, gelang es den Römern im Jahre 212 v. Chr. Syrakus zu erobern. Bei dieser Gelegenheit wurde der 75jährige Archimedes das Opfer der Roheit eines römischen Soldaten, der ihn mit seinem Schwerte niederstreckte, während Archimedes, des Tumults nicht achtend, geometrische Figuren in den Sand zeichnete. (Berühmt ist die Äußerung geworden, die Archimedes getan haben soll, als er des herannahenden Soldaten gewahr wurde. Er soll nämlich zum Soldaten bloß die Worte gesagt haben: «Mann, berühre meine Figuren nicht!»)

Marcellus, der römische Consul und Feldherr, gegen dessen ausdrücklichen Befehl Archimedes umgebracht worden war, soll große Trauer über den Tod des berühmten Gegners empfunden haben. Er ließ ihm ein Grabmal setzen mit der Abbildung eines Zylinders und einer eingeschriebenen Kugel sowie einer Inschrift über die größte und schönste Entdeckung des Archimedes betreffend den Rauminhalt der Kugel. Der römische Staatsmann *Cicero*, der das Grabmal bei einem Aufenthalt in Syrakus aufsuchte, als er im Jahre 75 v. Chr. als Quästor in Sizilien weilte, hat es nur mit Mühe unter überwucherndem, dornigem Gestrüpp entdeckt und es an der Inschrift erkannt. Er ließ das Grabmal darauf wieder instand setzen.

II. Astronomische und physikalisch-technische Leistungen

1. Archimedes als Astronom

Als Sohn eines Astronomen hat Archimedes sehr wahrscheinlich ebenfalls als Astronom angefangen. Sein Studienfreund war der Astronom (und Mathematiker) Konon, der auf Sizilien astronomische Beobachtungen angestellt hat. Archimedes hat dann

selbst Untersuchungen und Beobachtungen über die Jahreslänge durchgeführt und dabei den relativ sehr geringen Fehler von einem Vierteltag gemacht. In seiner Abhandlung über die ‹Sandzahl› beschreibt er einen Apparat, mit dem er den scheinbaren Durchmesser der Sonne gemessen hat. Der Hauptzweck des ‹Sandrechners› ist, zu zeigen, daß man mit Hilfe einer geeigneten Schreibweise für große Zahlen leicht eine Zahl angeben kann, die größer ist als die Anzahl der Sandkörner, die der (ganze) Kosmos enthielte, wenn er ganz mit Sand gefüllt wäre.

Die größte Leistung von Archimedes auf dem Gebiete der Astronomie, die im Altertum vor allem bewundert wurde, war die Konstruktion eines *Planetariums*. Er hat es in einer eigenen Abhandlung ‹Über die Anfertigung von Sphären› beschrieben, welche leider verlorengegangen ist. Der römische Feldherr Marcellus hat dann das Planetarium mit nach Rom gebracht, wo noch Cicero es bewundern konnte.

2. *Die mechanischen Leistungen des Archimedes*

Auch die physikalischen Leistungen des Archimedes gehören einer frühen Periode seines Lebens an. In Alexandria soll Archimedes nach dem griechischen Geschichtsschreiber Diodorus eine *Wasserschraube* zum Hinaufpumpen von Wasser erfunden haben, ein praktisches Hilfsmittel, das später unter anderem auch in den spanischen Silberbergwerken benützt wurde. Mit dieser Schraubpumpe hat Archimedes zum Beispiel das Riesenschiff des Königs Hieron versehen. Daraus läßt sich der Schluß ziehen, daß Archimedes sich ebenfalls früh mit *Mechanik* abgegeben hat. Und ohne bedeutende mechanische Kenntnisse ließ sich sein Planetarium auch nicht konstruieren. Bei seinem wissenschaftlichen Geiste ist es begreiflich, daß er durch diese praktischen Aufgaben auf den Gedanken gebracht wurde, die mechanischen Gesetze exakt zu begründen. Archimedes gilt als der *Begründer der theoretischen Mechanik*. Er ist überhaupt der *erste theoretische Physiker*. – Archimedes soll (angeblich) durch die Prüfung der gefälschten Goldkrone des Königs Hieron auf die Entdeckung des spezifischen Gewichts und des nach ihm benannten hydrostatischen Prinzips geführt worden sein. Das Ergebnis liegt vor in dem ausgezeichneten Werk *Über schwimmende Körper*, welches die exakte Grundlegung der Hydrostatik enthält. Im *Ersten Buch* dieses Werkes wird das Verhalten von festen Körpern (in Form von Kugelflächen) in Flüssigkeiten, deren spezifisches Gewicht gleich bzw. kleiner bzw. größer ist als jenes der Flüssigkeit, untersucht. Es handelt sich um die Anwendung des *Prinzips von Archimedes* (das hier plausibel gemacht wird). Im *Zweiten Buch* handelt es sich um die Untersuchung der Frage, wie ein Segment eines Rotationsparaboloids, dessen Grundfläche auf der Achse des Paraboloids senkrecht steht und das aus einem Stoffe besteht, welcher spezifisch leichter ist als eine Flüssigkeit, in dieser Flüssigkeit schwimmt.

An dieser Stelle läßt sich eine zweite berühmte Anekdote über Archimedes einflechten: Als Archimedes beim Baden im Meer über das Problem nachdachte, wie er die goldene Königskrone auf ihre Echtheit bzw. auf die vermutete Fälschung prüfen könnte, sei ihm plötzlich die Lösung eingefallen. Ohne weitere Überlegung sei er sofort vollständig nackt nach Hause gerannt, wobei er immer wieder ausrief: «heureka! heureka!» (= ich hab's gefunden!)

Von ganz besonderer Bedeutung ist der Beitrag von Archimedes in der *reinen Mechanik*. In seiner Arbeit *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* hat er nämlich das *Hebelgesetz* exakt bewiesen und es in vielseitiger Weise vor allem auf Schwerpunkts-, Flächen- und Volumenbestimmungen angewendet. Als Archimedes diese Untersuchungen auf Gebilde höherer Ordnung ausdehnte, wie die von Kegelschnitten begrenzten Flächen und ihre Umdrehungskörper (die von Archimedes *Konoiden* und *Sphäroiden* genannt wurden), entdeckte er die Fruchtbarkeit der mechanischen Betrachtungsweise für die Mathematik und bildete eine Methode zur (vorläufigen) Auffindung von Flächeninhalts- und Volumenbestimmung aus, die der Infinitesimalrechnung der modernen Mathematik entspricht. Die Methode selbst erläuterte Archimedes in einem Brief an *Eratosthenes*, der erst im Jahre 1907 von Heiberg herausgegeben wurde, nachdem sein Vorhandensein im vorhergehenden Jahre in Konstantinopel in einer Klosterbibliothek entdeckt worden war.

III. *Bis zu welchem Umfange war die Mathematik vor Archimedes entwickelt worden?*

Um die großen Verdienste des Archimedes auf dem Gebiet der Mathematik richtig würdigen zu können, sollte man zunächst die wesentlichen Tatsachen aus

der Geschichte der Mathematik bis zu seinem Auftreten kennen. Ich muß mich hier darauf beschränken, den Leser wenigstens ganz kurz über den ungefähren Stand der Mathematik am Anfang des 3. Jahrhunderts v. Chr. zu orientieren.

Das Gebäude der *elementaren Planimetrie* war durch Euklid fertiggestellt worden. Euklid hinterließ die Lehre von der Kongruenz, von der Ähnlichkeit, von der Ausmessung geradlinig begrenzter Figuren. In der *Stereometrie* war die Volumenbestimmung jener Körper gelungen, die durch ebene Flächen und Kegelflächen begrenzt werden. Ferner waren die drei klassischen Probleme der Geometrie in Angriff genommen, aber noch lange nicht abgeklärt worden. Während für die *Verdoppelung des Würfels* und für die *Dreiteilung des Winkels* schon verschiedene gut brauchbare Lösungsversuche vorlagen, ist der erste wesentliche Beitrag zur Lösung der *Quadratur des Kreises* erst Archimedes gelungen.

Welches waren die bisherigen Ergebnisse in der *Algebra?* – Die Algebra der Griechen hat es niemals zu einer selbständigen Existenz gebracht. Ich muß es mir versagen, hier die beiden Hauptgründe auseinanderzusetzen, die der Ausbildung der Algebra zur Zeit der alten Griechen hindernd im Wege standen.

Bis zu Archimedes kannte die Algebra die Gesetze über die vier Grundoperationen mit den positiven rationalen Zahlen, das heißt positiven ganzen und gebrochenen Zahlen. Insbesondere waren die drei algebraischen Grundformeln für $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ und $(a+b)\,(a-b)$ bekannt. Die Lehre von den Proportionen war vollständig ausgebildet, woran *Eudoxos*, ein Zeitgenosse Platos, das Hauptverdienst hatte. Bekannt war ferner die Summenformel für die arithmetische Folge.

Damit ist in großen Zügen der Stand der Mathematik skizziert, wie er von Archimedes vorgefunden wurde.

IV. Die planimetrischen Leistungen des Archimedes

1. Kreismessung – ‹Quadratur des Zirkels›

Mit dem alten und berühmten Problem der ‹Quadratur des Kreises› hat sich Archimedes eingehend in seiner leider nur verstümmelt erhaltenen Abhandlung *Über die Kreismessung* beschäftigt.

Archimedes beginnt damit, daß er als erster auf strenge Art den Satz beweist, *die Kreisfläche sei gleich einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete gleich dem Radius und dessen andere Kathete gleich dem Umfang des Kreises ist:* $F = \frac{r \cdot u}{2}$

Das nächste Problem, das Archimedes (mit Hilfe der Rechnung) zu lösen versucht, ist die Bestimmung einer Strecke, deren Länge gleich dem Umfang eines gegebenen Kreises ist, also die ‹Geradstreckung› oder ‹Rektifikation› des Kreisumfanges. Er benützt dazu also ein Verfahren, welches Euklid noch entschieden abgelehnt hätte, weil das numerische Rechnen noch zu Euklids Zeiten als eines Mathematikers nicht würdig betrachtet wurde. Archimedes benützt dabei den Grundgedanken, der von *Antiphon*, einem Zeitgenossen von Sokrates, eingeführt und von *Bryson* weiterentwickelt worden war, um die Zahl π zu bestimmen. (Antiphon hat nur einbeschriebene regelmäßige Vielecke, nämlich Quadrat, Achteck usw. benützt, Bryson dazu auch die umbeschriebenen Vielecke.) Archimedes geht vom ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Sechseck aus, und durch fortgesetzte Halbierung des Zentriwinkels dringt er bis zum einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen *96-Eck* vor. Damit hat er den berühmten und noch heute (vor allem von den Handwerkern) häufig verwendeten Näherungswert $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ gewonnen (Fig. 1). Die Rechnung besteht in einer Verbindung von Verhältnissen durch geschickte Anwendung der Lehre von den Proportionen und durch Einsetzen von nahezu richtigen, aber etwas zu kleinen Quadratwurzelwerten. Auf alle Fälle hat sich Archimedes mit seinem höchst wertvollen Beitrag zur Kreismessung als vorzüglicher Zahlenrechner ausgewiesen.

2. Die Quadratur der Parabel

In der Abhandlung mit dem Titel *Die Quadratur der Parabel*, die vollständig erhalten ist, gibt Archimedes zwei strenge Beweise für den Satz über den Flächeninhalt eines Parabelabschnitts: einen mechanischen und einen geometrischen Beweis.

a) Mechanischer Beweis. Die ‹mechanische› Methode beruht auf statischen Überlegungen. Sie besteht darin, das zu bestimmende Parabelsegment in Streifen zu zerlegen und diese dann auf einer Waage auszubalancieren (Fig. 2). Die Strecke BC wird um die Strecke BA gleich BC verlängert und AC als Waagebalken mit dem Drehpunkt B aufgefaßt. In A werden Flächenstücke R, U, V, W, G ange-

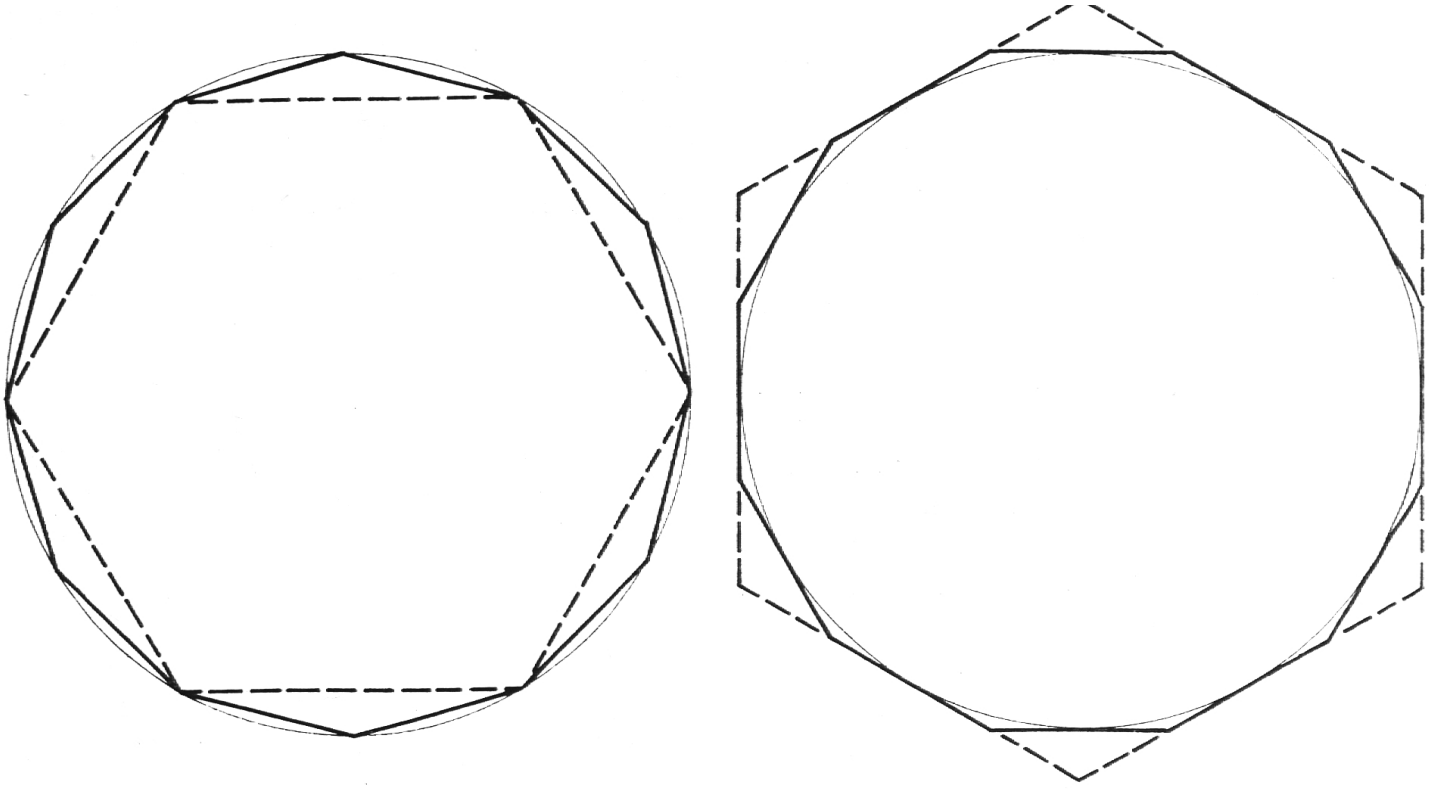


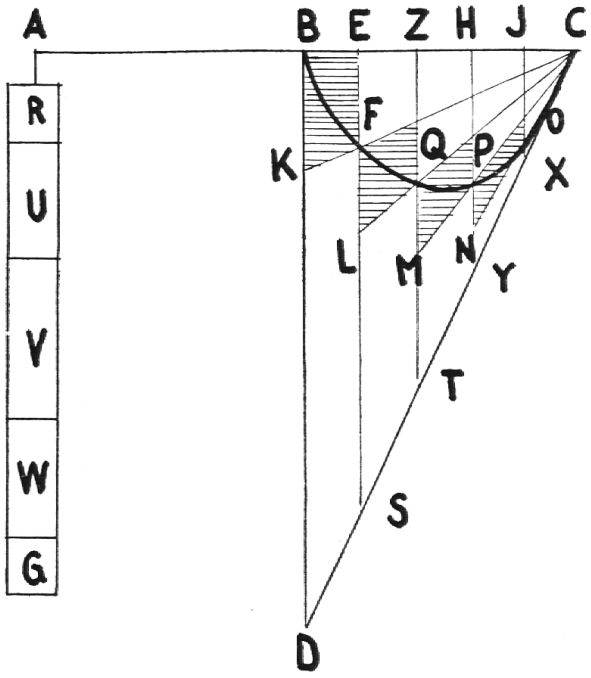
Fig. 1

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

$$3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots$$

bracht, die bzw. im Gleichgewicht sind mit den Trapezen DE, ZS, TH, YI und dem Dreieck XIC. Alle Flächenstücke zusammen werden dann im Gleichgewicht sein mit dem Dreieck BCD und einen Drittel dieses Dreiecks ausmachen. Die Trapeze DE, ZS usw., an ihrem rechten Eckpunkt aufgehängt, werden im Gleichgewicht sein mit den

Fig. 2



Trapezen KE, LZ usw., aufgehängt in A. Werden die ersten Trapeze aber nicht an diesen Punkten, sondern an den Strecken BE, EZ usw. aufgehängt, so sind sie im Gleichgewicht mit R, U, V usw. Mithin sind die Flächenstücke R, U, V usw. kleiner als die Trapeze KE, LZ usw. Somit ist die Summe R + U + V + W + G, also ein Drittel des Dreiecks BCD, kleiner als die Summe der Trapeze KE, LZ usw. und des Dreiecks IXG, die zusammen das Parabelsegment überdecken.

Analog wird bewiesen, daß ein Drittel des Dreiecks BCD größer ist als die Summe der Trapeze FZ, QH, IP und des Dreiecks ICO, welche sämtlich innerhalb des Parabelsegments liegen.

Der Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Reihe von Trapezen und Dreiecks ist gleich der Summe der kleinen Trapeze BF, FQ, QP, PO und des kleinen Dreiecks COX, durch welche gerade die Parabel hindurch läuft. Diese Summe ist aber gleich dem Dreieck BCK, welches ein willkürlich kleiner Teil (in unserer Figur ein Fünftel) des Dreiecks BCD ist.

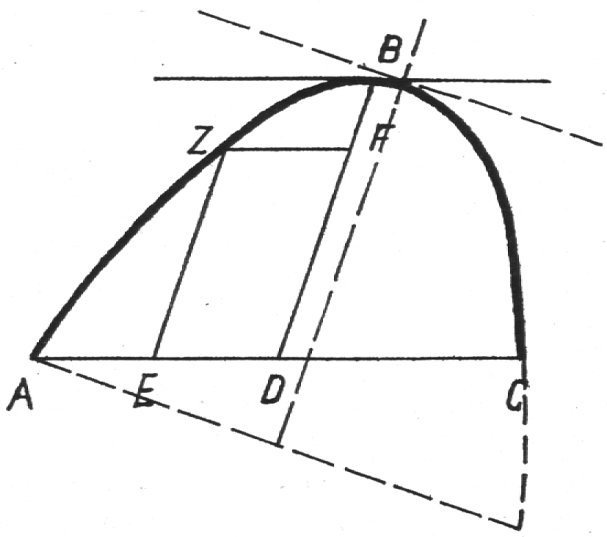
Es folgt der *Exhaustionsbeweis:* Es sei das Parabelsegment gleich s, ein Drittel des Dreiecks BCD gleich z. Dann ist zu beweisen, daß $s = z$. s ist eingeschlossen zwischen zwei Flächen s_1 und s_2, deren Unterschied ein beliebig kleiner Teil (ε) des Drei-

ecks BCD ist, und es wurde ‹mechanisch› bewiesen, daß z ebenfalls zwischen s_1 und s_2 liegt.
Also: (1) $s_1 > s > s_2$, (2) $s_1 > z > s_2$, (3) $s_1 - s_2 = \varepsilon$.
Angenommen, es sei: $s > z$. Man wähle: $\varepsilon < s - z$.
Dies ergibt einen Widerspruch:
$s - z > \varepsilon = s_1 - s_2$,
$s > z + (s_1 - s_2) > s_2 + (s_1 - s_2) = s_1$, was unmöglich ist.
Archimedes suchte also die Abnahme des Fehlers bei Vermehrung der Trapezstreifen abzuschätzen, ein Weg, der konsequent weiter verfolgt zum strengen *Integralbegriff* hätte führen müssen.
Diese indirekte Beweismethode kommt, mit kleinen Abänderungen, in den Werken von Archimedes immer wieder vor. Manchmal arbeitet Archimedes auch mit *Verhältnissen* anstatt mit Differenzen und beweist, daß das Verhältnis $s_1 : s_2$ kleiner gemacht werden kann als das Verhältnis der größeren von zwei beliebig vorgeschriebenen Größen zur kleineren.
Nach diesem mechanischen Beweis folgt eine mindestens ebenso schöne, rein geometrische Herleitung.

b) Geometrischer Beweis

Hier folgt die genaue Wiedergabe der authentischen deutschen Übersetzung des Archimedischen Textes mit den zugehörigen Figuren in *A. Czwalina: Die Quadratur der Parabel* (Ostwalds Klassiker der exakt. Wissensch., Heft Nr. 203, S. 23–29). An diesem Beispiel soll sich der Leser selbst ein Bild machen können von der einwandfreien, gründlichen Art der Archimedischen Beweisführung.

Fig. 3



1) § 18. *Vor:* AD = CD, BD ∥ Parabeldurchmesser.
Beh: B = Scheitel des Parabelsegmentes.
Beweis: Tangente in B ∥ AC.

2) § 19. *Vor:* AE = ED, ZE ∥ DD.
Beh: $BD = \frac{4}{3} EZ$.
Beweis: Nach den Elementen der Kegelschnittlehre gilt: $BD : BF = AD^2 : ZF^2 = 4 : 1$.

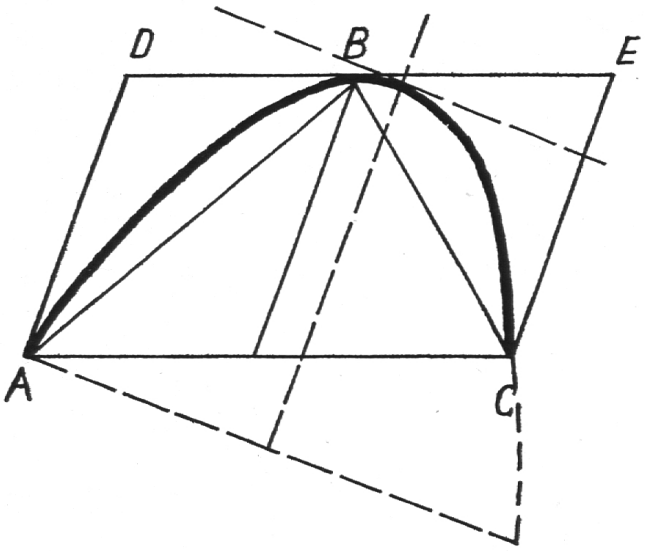


Fig. 4

3) § 20. *Vor:* △ ABC gleiche Grundlinie und Höhe wie Segment ABC.
Beh: $\triangle ABC > \frac{1}{2}$ Segment ABC.

Zusatz: Es ist möglich, einem Parabelsegment ein Vieleck einzubeschreiben derart, daß die Summe der Restsegmente kleiner ist als jede vorgeschriebene Fläche.
(*Satz von Eudoxos:* X_1 der ‹Elemente›.)

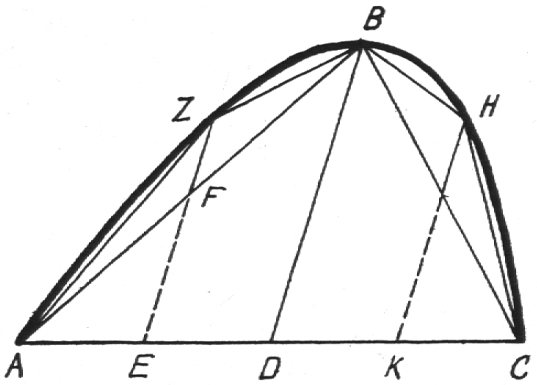


Fig. 5

4) § 21. *Beh:* $\triangle ABZ = \triangle BCH = \frac{1}{8} \triangle ABC$

Bew: $BD = \frac{4}{3} EZ = 2\,EF$,

df. $EF = \frac{2}{3} EZ = 2\,FZ$.

$FZ = \frac{1}{4} BD$

5) § 22. *Vor:* $M = 4N$, $N = 4P$, $P = 4Q$

$M = \triangle ABC$.

Beh: Segment $ABC > M + N + P + Q$.

Bew: $\triangle ABC = 4(\triangle ABZ + \triangle BCH)$

$= M$

$\triangle ABZ + \triangle BCH = N$.

Dreiecksumme in den nun übrig bleibenden Restsegmenten $= P$, Dreiecksumme in den alsdann übrig bleibenden Restsegmenten $= Q$.

$M + N + P + Q$ = einbeschriebenes Polygon < Parabelsegment.

6) § 23. A, B, C, D, E seien Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$.

Vor: $A = 4B$, $B = 4C$, $C = 4D$, $D = 4E$

Beh: $A + B + C + D + E + \frac{1}{3} E = \frac{4}{3} A$

Beweis: Es sei $M = \frac{1}{3} B$, $N = \frac{1}{3} C$,

$P = \frac{1}{3} D$, $Q = \frac{1}{3} E$.

Somit ist $B + M = \frac{1}{4} A + \frac{1}{12} A = \frac{1}{3} A$,

$C + N = \frac{1}{4} B + \frac{1}{12} B = \frac{1}{3} B$,

$D + P = \frac{1}{4} C + \frac{1}{12} C = \frac{1}{3} C$,

$E + Q = \frac{1}{4} D + \frac{1}{12} D = \frac{1}{3} D$.

$$B + C + D + E + \underbrace{M + N + P}_{} + Q$$

$$= \frac{1}{3}(A + B + C + D)$$

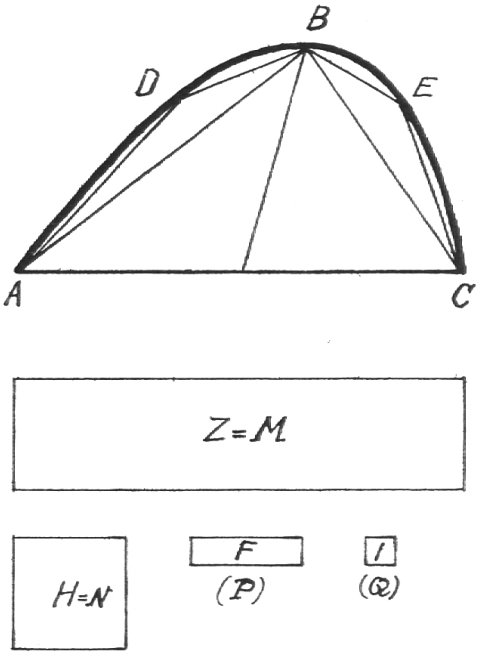
Es ist aber $M + N + P = \frac{1}{3}(B + C + D)$

Df. $B + C + D + E + Q$

$$= B + C + D + E + \frac{1}{3} E = \frac{1}{3} A.$$

7) § 24. *Satz:* Der Inhalt eines Parabelsegments ist $\frac{4}{3}$ des Inhalts des Dreiecks, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Fig. 6



Vor: Parabelsegment und $\triangle ABC$ haben gleiche Grundlinie und Höhe.

Beh: Parabelsegment $= \frac{4}{3} \triangle ABC = K$.

Bew: 1. Fall: Segment $> K$.

Man beschreibe in die Figur die Dreiecke ABD, BCE ein, den Restsegmenten wiederum Dreiecke (gleiche Grundlinie und Höhe!) usw.

Schließlich gilt: Summe der übrigbleibenden Restsegmente < Segment — K: unmöglich!

Denn $\triangle ABC + (\triangle ABD + \triangle BCE) + \ldots$

$< \frac{4}{3} \triangle ABC = K$ (§ 23!)

D. h. Summe der Restsegmente > Segment — K.

Exhaustionsbeweis!

2. Fall: Segment $< K$.

$\triangle ABC = M = 4N$, $N = 4P$ usw.

Letzte Fläche $Q < K$ — Segment.

Dann ist $M + N + P + Q + \frac{1}{3} Q = \frac{4}{3} M = K$

Also $K - (M + N + P + Q) < Q$,

aber K — Segment $> Q$,

D. f. *$M + N + P + Q$ > Segment:* unmöglich!

(Forsetzung folgt)

Die Lehreragenda 1965 ist soeben erschienen!

In den vergangenen Jahren war die Agenda jeweils in kurzer Zeit ausverkauft. Sichern Sie sich sofort ein Exemplar!

Lehreragenda KLVS,
6048 Horw Tel. 041 41 94 16