"Neue" Mathematik im Kreuzfeuer der Kritik

Autor(en): **Bächinger, Konrad**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **59 (1972)**

Heft 11

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-531206

psychologischen Dienstes und die Bildung von Kreisoberschulen vorsieht.

Die Delegiertenversammlung des aargauischen Lehrervereins, die rund 2500 Lehrkräfte aller Stufen vertritt, beauftragte ferner den Vorstand, auf Frühling 1973 ein halbamtliches Sekretariat zu schaffen und sich für eine Erhöhung der Alterspensionen einzusetzen.

«Neue» Mathematik im Kreuzfeuer der Kritik

Eine Buchrezension (mit ausführlichen Auszügen), zusammengestellt von Konrad Bächinger

Das Wort «Mode» wird im Schweizer Lexikon wie folgt erklärt: «Kurzfristig allgemein herrschender Geschmack. Ihre wichtigsten Einflußbereiche sind Kleidung, Schmuck, Lebensweise und Kunst.» Man ist gerne versucht, die Didaktik dazuzureihen. Wer schon einige Jahrzehnte in der Schulstube steht, weiß, wie rasch sich die Methoden in der Schulführung abgelöst haben. Man denke an die Schrift, die Hulliger einer Reform unterzog und die sich dann wieder schön brav zu guten Lateinschrift durchmauserte. Man denke an die Methodik im Sport: Wie viele Ski-Techniken (Vorlage, Rotationsschwung, Wedeln, Kurzschwung, Miniskischwung usw.) haben einander buchstäblich gejagt! Man erinnere sich an die Lesemethode, wo sich zuerst Synthese und Analyse gegenüberstanden, dann die Ganzheitsmethode aufkam. Gegenwärtig ist die «neue Mathematik» Mode. Wer die Unterrichtsliteratur und die Schulbücher aus dem Ausland kennt, stellt fest, daß «neue» Mathematik die Lehrmittel erobert hat. In Deutschland wagt kaum ein Verlag mehr, ein «Rechnungsbuch» herauszugeben, das Wort «Mathematik» allein hat Klang im didaktischen Orchester, das sehr lautstark spielt. Und wieder einmal reiten da auf der methodischen Welle Pädagogen und Methodiker, die mitunter lächeln über die gute alte Schule, in der man schlicht «gerechnet» hat. Neu ist, daß die «moderne» Mathematik sich des Fernsehens zu bemächtigen vermochte, um die Eltern und Kinder nicht nur zu informieren, sondern da und dort auch zu verwirren, und zwar in dem Sinne, als man jene Lehrer, die nicht «moderne» Mathematik unterrichten, als antiquiert bezeichnet. Fehlleistungen und Unvermögen der eigenen Kinder werden ganz einfach darauf zurückgeführt, daß der Lehrer eben nicht «modern» ist. Es gab auch Lehrer, die an Elternabenden zuviel versprachen von der «neuen» Mathematik, so daß die Eltern sich euphorisch die Zukunft ihres kleinen Mathematikers vorstellten. Daß da Lehrer auf der farbigen Fernsehwelle sich als Stars fühlten, gehört mit zum publizistischen Aufwand, der rund um die «neue» Mathematik in der Volksschule betrieben wird.

Nun ist sich die Schule auch gewohnt, Neues kritisch unter die Lupe zu nehmen. Selbstverständlich ist es immer sehr schwierig, mit Leuten zu diskutieren, die, beispielsweise im Rechnungsunterricht, auf einer ganz anderen Bezugsebene stehen. Man redet gerne aneinander vorbei, weil keiner des andern Begriffe verstehen will. Dazu ist es schon immer so gewesen, daß Vertreter neuer Methoden voraussetzten, die alte, abzulösende hätte keine Leistungen zustande gebracht. «Das pflegt seit Kühnel die Ausgangsposition jeder Didaktik zu sein», schreibt Karaschewski.

Viele Lehrer werden trotz längerer Praxis in der kritischen Diskussion nicht ernst genommen, weil man ihnen Mangel an mathematischer Bildung vorwerfen kann. Mit Recht, denn in der Volksschule unserer Schweiz wird auf breiter Basis «gerechnet». Nun ist im Verlag Dürrsche Buchhandlung in Bonn vom bekannten Mathematiker und Didaktiker an einer pädagogischen Hochschule, Prof. Dr. Horst Karaschewski, eine kritische Analyse der «neuen Mathematik» unter dem Titel

«Irrwege moderner Rechendidaktik»

erschienen, die beachtet werden muß.* Karaschewski ist bekannt durch seine klaren

didaktischen Werke ganzheitlicher Richtung. Als Mathematiker und Didaktiker besitzt er das wissenschaftliche Rüstzeug, die «neue Mathematik» kritisch zu durchleuchten. Und wir versuchen, aus dem 110 Seiten starken Band einige uns wesentlich scheinende Punkte herauszulösen, die es zu widerlegen gilt, ehe die «neue Mathematik» sich das (meist von Erziehungsdirektionen vorgeschriebene) Recht herausnehmen kann, das Bisherige zu verdrängen.
Leider ist das Buch nicht mehr erhältlich. Wir zitieren im Wortlaut einige uns wichtig erscheinende Ausschnitte aus den Kapiteln. Die Zwischentitel stammen von uns. (Weggelassen sind alle Fußnoten und Literaturhinweise.)

«Mathematik» oder «Rechnen»?

Ein sogenannter Fachmann schreibt mir: «Es wird nicht lange dauern, bis auch in der Grundschule an Stelle des weithin praktizierten Rechenunterrichtes die Mathematik tritt!» Meine Gegenfragen lauten: «Wie ist es mit der den Mathematikern so sehr nachgerühmten Konsequenz zu vereinbaren, daß nun an Stelle des Rechenunterrichts in der Grundschule etwas treten soll, was früher den Mittel- und Oberstufen unserer Gymnasien vorbehalten blieb? Weshalb sollte man nicht gleich alle Unterrichtsfächer der Sonne eines solchen modernisierenden Geistes öffnen? Weshalb beginnt man an Stelle des ebenso mühevollen wie inferioren Lesen- und Schreibenlernens bei den Sechsjährigen nicht sofort mit moderner Literatur, etwa mit Henry Miller oder Günter Grass?» – Hat doch tatsächlich ein amerikanischer Hirnchirurge schon allen Ernstes die Auffassung vertreten, Babys könne man ab 10 Monaten lesen lehren, noch ehe sie sprechen lernen.
Das Wort «Rechnen» entbehrt jeden Glanzes. Was liegt daher näher als eine achtunggebietende «Verwissenschaftlichung» des tristen Unterrichts im Rechnen durch Übernahme von Inhalten, Zeichen und Fachausdrücken aus der Mathematik?
Einer solchen Hochflut überschwenglicher Erwartungen stehen nun allerdings Realitäten gegenüber, die geeignet sein müßten, auch die unbeirrbarsten Bildungsenthusiasten ideologisch ins Wanken zu bringen. Da besteht zunächst einmal der traurige Gegensatz zwischen dem Glanz der mathematischen Wissenschaft und dem Elend selbst des gymnasialen mathematischen Unterrichts. Wieviel weniger berechtigt ist dann aber der Glaube, daß ausgerechnet der Rechenunterricht der Grundschüler durch Heranziehen spezifischer Inhalte aus der modernen Mathematik verbessert werden könne!
Um so weniger ist eine Aufwertung des Grundschulrechenunterrichts durch solche Mathematisierungsbestrebungen zu erwarten, als Hand in Hand mit ihnen völlig apädagogische Bemühungen gehen, die im Endeffekt dazu führen müßten, daß nicht nur der gymnasiale Unterricht pseudouniversitätsmäßig, sondern neuerdings auch der Grundschulunterricht pseudogymnasial erteilt würde.
Weil man gleich etwas sein will, kann man nichts werden; weil man die Prinzipien der Begriffsentwicklung, der Anschauung, des Ausgehens vom individuell bedingten Spezialfall unbeachtet läßt, wird ein didaktisch verantwortliches Handeln verhindert, und die im Fache selbst liegenden Möglichkeiten bleiben ungenutzt. Vom Standpunkt des Schülers aus bewirkt man damit das genaue Gegenteil von dem, was man zu erreichen glaubte, nämlich eine Entmathematisierung des Rechenunterrichts, wie sehr man ihn rein äußerlich auch mit mathematikähnlichen Ausdrücken und Zeichen drapiert.
Viele Reformer sind offenbar dem Irrglauben verfallen, man müßte etwas allen bisherigen Erfahrungen Widersprechendes, Neues propagieren, um als modern und fortschrittlich gelten zu können. Je fortschrittlicher und moderner man sich gibt, um so extremer wird von dem abgewichen, was unsere Didaktik geworden ist und was sie gegenwärtig zu sein vermag. Es gilt offenbar als unmodern zu glauben, daß etwas praktisch unmöglich oder schädlich sein kann. – Nun ist es sehr schwer, neue Wahrheiten zu entdekken, dagegen hat die Phantasie einen unbe-

* Prof. Dr. HORST KARASCHEWSKI: Irrwege moderner Rechendidaktik, eine kritische Analyse, mit einem Vorwort von KARL ODENBACH, Verlag Dürrsche Buchhandlung, Bonn-Bad Godesberg, 110 Seiten, ist vergriffen. Eine Neuauflage ist nicht vorgesehen.

grenzten Spielraum, um täglich neue Unwahrheiten oder Torheiten erfinden und propagieren zu können. Die Sucht nach Modernität, der Wunsch zu imponieren, «Leute von heute» zu sein oder aber die Bequemlichkeit, sich mit dem Gewordenen und Vorhandenen auseinanderzusetzen, vielleicht auch ganz einfach nur schlichte Unkenntnis in Fragen der Schule: Damit dürfte der – wenn auch nicht vollständige – Ursachenkomplex für die zahlreichen didaktischen Fehlformen der letzten Jahre umrissen sein. Was wir in diesem Zusammenhang unter «didaktischen Fehlformen» verstehen wollen, sei zunächst nur durch drei Beispiele angedeutet:

1. Es ist in gleichem Maße falsch, wie es sensationell klingt, wenn Autoren wie L. Félix die «Mathematik» bereits im Kindergarten anfangen lassen.

2. Es handelt sich um die von jedem Kind des 1. Schuljahres verstehbare Zahlengleichung «$6 + 1 = 7$» «Klaus hat 6 (Murmeln) und gewinnt 1 (Murmel) dazu, dann hat er zusammen 7 (Murmeln)». – Nach der Ansicht von Z.P. Dienes soll man den Kindern nun folgende Schreib- und Sprechweise andrillen – anders kann man es ja wohl kaum nennen –:
$\{6 + 1 = (\ )\} = \{7\}$ «Die Menge der Zahlen, die die Eigenschaft besitzen, genau um 1 größer zu sein als 6, enthält genau ein Element, nämlich 7».
Warum soll nun aber schon gleich für die Kleinen eine terminologische Übereinstimmung mit der fertigen Wissenschaft herbeigeführt werden? – Glaubt man denn gleich im Knospenzustand die reifen Früchte ernten zu können?

3. Schließlich hieße es, sich aller Vernunft entschlagen, wenn man meint, man könne nun plötzlich in der gleichen Unterrichtszeit ein Mehrfaches an Stoff bewältigen, nämlich Rechnen und Mathematik, Mengenalgebra und mathematische Logik.

Sollte es sich aber vielleicht so verhalten, daß unsere Grund- und Hauptschüler allzu perfekt rechnen können, so daß man die Zahl der Rechenstunden drastisch kürzen und dafür Mathematik lehren kann? – Leider ist das genaue Gegenteil zutreffend!
Wir wollen hier zunächst auf die für Wirtschaft und Schule in gleichem Maße beunruhigende Tatsache eingehen, daß unsere Schüler und Lehrlinge nicht rechnen können. Immerhin hat sich gezeigt, daß weniger begabte Schüler, die durch Mathematik nicht verbildet wurden, selbst in der Schulmathematik mehr zu leisten vermochten als die Begabten, deren Geist durch eine unangemessene Mathematisierung vergittert wurde.

Rechnen mit farbigen Stäbchen
(ohne Einereinteilung)

Diese Stäbchen sind, wie es den Anschein hat, wahre Zauberstäbe: «Die Eigenart des hier benuzten Rohmaterials bringt es mit sich, daß auf der konkret-anschaulichen Ebene bereits Aufgaben gelöst und Probleme behandelt werden können . . ., deren Bewältigung ohne ein solches Material kaum möglich wäre.» – Wie unberechtigt der immer wiederkehrende Tenor ist, durch und nur durch das Material werde sonst Unmögliches möglich, werden die folgenden Ausführungen zeigen.

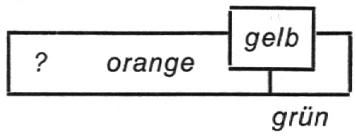
Das Material

Das Material zum Rechenwerk Fricke-Besuden* besteht aus jeweils quadratischen Säulen der Farben orange, blau, braun, schwarz, dunkelgrün, gelb, lila (nur als dunkelrot erkennbar) ,hellgrün, rot und weiß von der Länge 10 cm bzw. 9 cm, 8 cm bzw. 7 cm usw. Die Grundflächen dieser Säulen sind Zentimeterquadrate. Da der Zentimeter die Grundeinheit ist, sind sie zur Längenmessung hervorragend geeignet. Daher ist es nur folgerichtig, daß bereits im 2. Schuljahr mit Metern und Zentimetern gearbeitet und gerechnet wird. Es hätte sicherlich auch kein ernsthaftes Hindernis gegeben, den Dezimeter namentlich einzuführen.
Sehr problematisch jedoch erscheint, daß diese Stäbe nun Mengen und Zahlen darstellen bzw. vertreten sollen. Man befindet sich mit dieser Annahme u. a. im Widerspruch zu den Grundlagen der Mengenlehre, wonach die Wohlunterschiedenheit der Elemente Voraussetzung dafür ist, daß wir im Sinne der Mathematik von einer «Menge» sprechen dürfen. Die Kubikzentimeter, die auf den Stäben durch keinerlei Einkerbungen sichtbar gemacht werden, können «im

* entspricht etwa dem Cuisinaire-Material

Denken oder in der Anschauung» der Schulanfänger wohl kaum als «wohlunterschieden» vorausgesetzt werden.
Angeblich sind die Einkerbungen weggelassen, um das dem operativen Rechnen abträgliche Zählen unmöglich zu machen. Da die Kinder aber sowieso nur durch Aneinanderlegen von Einerwürfeln feststellen können, daß der dunkelrote Stab aus vier, der dunkelgrüne aus sechs, der gelbe aus fünf usw. Längeneinheiten besteht, wäre ein Zählen dabei ja doch möglich. Auch ist es inkonsequent, den Hunderter aus einzelnen Zehnern aufzubauen und diese einzeln darstellen zu lassen, beim Zehner, Neuner usw. aber die Einer unerkennbar zu machen.
Was wird von den Kindern eigentlich verlangt, wenn das Legen der Einzelwürfel verboten ist und sie mit den Stäbchen die einfache Operation 3 + 4 vollziehen sollen? Die Kinder müssen behalten haben, daß der dunkelrote Stab die 4 und der hellgrüne die 3 vertritt. Darauf suchen sie den Stab, der so lang ist wie die beiden andern zusammen; es ist der schwarze. Wiederum müssen die Kinder auswendig wissen, daß er die 7 vertritt. Die Farbbezeichnungen haben hier also ganz eindeutig die Funktion von Ersatzzahlwörtern, obwohl Farben doch ganz und gar zahlinadäquate Darstellungsmittel sind. Außerdem widerspricht das Aneignen einer Skala von Ersatzzahlwörtern und Ersatzzeichen durchaus dem Ökonomieprinzip des Lernens. Besser hätte man dann unmittelbar jeden Stab mit der zugehörigen Ziffer versehen und das dazugehörige Zahlwort lernen lassen sollen. Das Fricke-Besudensche Material verhindert also selbst bei dieser einfachen Aufgabe die anschauliche Evidenz. Wer aber die anschauliche Evidenz mutwillig verwirft, handelt so, als ob sich jemand die Augen verbindet, um mit den Händen mühsam zu ertasten, was seine Augen mühelos sehen können.
Der wesentliche Nachteil des Materials von Fricke-Besuden ist aber noch nicht einmal in der Darstellung der Zahlen gegeben, sondern in der Darstellung der Rechenoperationen. So wird z. B. das Abziehen extrem anschauungswidrig dargestellt: Soll etwa die Aufgabe 13 – 5 = ? «verinnerlicht» werden, so muß zuerst ein hellgrüner Stab (3) an einen orangefarbenen Stab (10) gefügt werden; sodann hat man, obwohl etwas abgezogen werden soll, einen gelben Stab dazuzulegen, nämlich auf den gesamten grünen und teilweise auch auf den orangefarbenen. Schließlich muß ein Stab gesucht werden, um ihn auf das noch nicht zugedeckte Stück des orangefarbenen Stabes legen zu können; es stellt sich heraus, daß ein brauner Stab paßt. Wer nun weiß, daß der braune Stab die 8 vertritt, hat das Ergebnis bestimmt.

Abb. 1 (Original farbig)



13 – 5 = ? Abziehen

Uneinsichtig, das heißt nicht zurückbezogen auf schon entwickelte Einsichten und Fertigkeiten, muß infolge der Einseitigkeit des Materials auch das Verdoppeln von 6, von 7, von 8 usw. erfolgen: Zur Aufgabe 6 + 6 = ? hat das Kind zwei Sechserstäbe aneinanderzulegen und, da dies Legebild nichts Arithmetisches aussagt, wird jetzt mit einem Zehner und einem noch zu suchenden Stab probierend ausgemessen. Es stellt sich heraus, daß dies ein roter, also ein Zweierstab sein muß, womit bestätigt ist 6 + 6 = 12. – Auf dem Tisch liegt dann aber nicht 6 + 6, sondern 12 + 12.

Wie aber würde sich die Darstellung von 6 + 6 = ? mit dem so sehr verschmähten Anschauungsmittel aus Einzelelementen vollziehen lassen?

●●●●● ●
●●●●● ●

Im Blick auf diese Figur sieht man sofort: erstens, daß es sich um die Darstellung der Aufgabe 6 + 6 handelt; und zweitens, daß man insgesamt einen Zehner (zwei Fünfer) und einen Zweier, also 12 erhält. Entscheidend für das Umschlagen der figuralen Darstellung in eine generalisierbare Einsicht ist die Gestaltlücke jeweils hinter den Fünfern. Die Stäbe sind in ihrer Gestalt festgelegt, eine Beschränkung der Freiheitsgrade des Sehens und des Einsehens ist die Folge; das Figurieren und Transfigurieren kann nicht zum Problem werden. Die Farben aber dienen nicht nur als Ersatzzahlwörter, sondern außerdem noch als Ersatzmaßzahlen;

wie hoch ist der «Schornstein?» – «Blau»; wie hoch ist der «Turm»? – «Schwarz» . . .

4 Einwände gegen das Rechnen mit Stäben

Dagegen lassen sich vielerlei Bedenken nicht unterdrücken, die auch die Darstellung der Subtraktion mit einbeziehen:

1. Die Stäbe dienen zur Darstellung von Mengenelementen und Mengen. Jetzt bedeuten gewisse Anordnungen von Mengen zugleich bestimmte Operationen: Übereinanderlegen = Abziehen, Kreuzen = Malnehmen; aber selbst in der Mengentheorie ist es nicht üblich, daß die geometrische Anordnung von Mengen bereits operative Bedeutung hat. Es geraten hier zwei Funktionsebenen durcheinander: einmal die Darstellung von Mengen und zum andern die signitive Darstellung der mit diesen Mengen auszuführenden Operationen.

2. Drei übereinandergekreuzte Fünfer- oder Zehnerstäbe für eine Veranschaulichung oder wenigstens Erklärung von 5 hoch 3 (= 5^3) oder 10 hoch 3 (= 10^3) zu halten, wäre nun wirklich rein verbal und an den Haaren herbeigezogen. Es würde damit nur das eine erreicht: Der Bestand an Chiffren wird vermehrt; zusätzlich zu 10^3, 5^2 . . . treten jetzt auch noch die Figuren der übereinandergekreuzten Stäbe.

3. Oft wird die Sache so dargestellt, als gäbe es eine Alternative zwischen dem aus Einzelelementen dargestellten Tausender und den drei übereinandergekreuzten Stäben, also einem Symbol für den Tausender. Eine solche Darstellung muß als irreführend bezeichnet werden. Dem Symbol kann man nichts über die Zusammensetzung aus Hundertern, Fünfzigern, Zweihundertfünfzigern usw. entnehmen. Ein Arbeiten nur mit dem Symbol, in welcher Form auch immer, setzt in jedem Falle die abgeschlossene Durcharbeitung der betreffenden Menge voraus, und zwar in allen Einzelheiten. – Die Nichtdarstellbarkeit großer Zahlen durch Mengen aus diskreten Elementen muß von den Kindern erlebt worden sein. Das Symbol als solches hat allein keinerlei erkenntnisbringende Funktion.

4. Ein weiterer Einwand lautet: Man könne die Felddarstellung der Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender nicht beliebig systembildend fortsetzen, wohl aber beliebig Zehnerstäbe übereinander kreuzen; daher sei diese Darstellungsweise den Felddarstellungen überlegen. Abgesehen davon, daß man schon zum Kreuzen von mehr als 3 Stäben Fingerfertigkeit und eine sehr ruhige Hand braucht, erledigt sich dieser Einwand im wesentlichen durch die Tatsache, daß die gekreuzten Stäbe nichts anderes als Symbole für vorher durchzuarbeitende Zehner (= 10), Hunderter (= 10 · 10), Tausender (= 10 · 10 · 10) usw. sein können; die Türmung der Stäbchen ist nur sehr viel umständlicher, ohne mehr zu leisten als die auch sonst übliche symbolische Darstellung durch Z = 10, H = 100, T = 1000, ZT = 10 000 . . . , die natürlich beliebig fortsetzbar ist.

Mathematik als «Spiel»?

Überhaupt wird durch Ausdrücke wie «Spiel» oder «erspielt» etwas vorgetäuscht, was unmöglich ist; mindestens kann es sich um keine Spiele im Sinne der Kinder handeln. Entweder spielt das Kind altersgemäß, dann sind es bestimmt keine mathematischen Spiele und können folglich auch nicht zu mathematischen Lösungen führen. Oder aber man ist tatsächlich zu mathematischen Lösungen gelangt, dann aber war das gewiß kein «Kinderspiel».

Ein Sechsjähriger kann sich mancherlei «erspielen», nur eben nicht eine mathematische Lösung. Ein Satz wie der folgende: «Man kann so erreichen, daß die Kinder die Merkmalklötze mehr als Spiel denn als Lernmaterial ansehen, so daß sie später ‹spielend› lernen», ist irreführend formuliert oder durch und durch unwahr. – Natürlich schließt das nicht aus, daß es auch bei Neunzig-Sorger einzelne Aufgaben mit Spielcharakter gibt, z. B. das auf S. 24 des Lehrbuches beschriebene Suchspiel oder das auf S. 8 angeregte «Unterschiedsspiel», sobald die Kinder in der Lage sind, die Spielregel richtig aufzufassen.

Das «spielende Lernen» des Lesens oder der Mathematik aber hat lediglich durch eine Urteilstrübung gewisser Autoren Eingang in die Literatur gefunden. Je nachdem, ob man will oder nicht, kann man spielen oder nicht spielen; Lernen dagegen soll und muß man in jedem Fall. – Das wirkliche

Spielen folgt natürlich nicht den vorgezeichneten Bahnen eines Lehrgangs und ist nicht auf die systematische Durchdringung eines Fachbereiches gerichtet. Die vielleicht größte Kulturleistung der Menschheit, wie sie sich in der Mathematik manifestiert, kann man sich als kleines Kind nicht einfach erspielen. Vor einer solchen Täuschung sollte man alle bewahren, die an dem großen Lernprozeß der Menschheit beteiligt sind. Ein echtes Lernen braucht keine freudlose Sache zu sein, weil wirklich gelernt wird, ebensowenig wie eine Tätigkeit die Kinder beglückt, nur weil der Lehrer sie als «Spiel» bezeichnet.

Man sage nicht, daß die moderne Mathematik auf dieser frühen Stufe ja nur mit wechselndem Material gespielt werden soll. Etwas, was nur Spiel sein soll und sein kann, gehört keinesfalls in die Schule, falls diese Spiele nicht unmittelbar auf Ernstsituationen hin transzendiert werden können. Die nur gespielte Mathematik hat mit der eigentlichen Mathematik ebensowenig gemeinsam, wie das Kriegsspiel der Kinder mit dem wirklichen Krieg oder das Spiel mit Stofftieren mit der Zoologie.

Mengenlehre für die Primarschule?

Es mag gerade noch hingenommen werden, Kindern den nicht nur ihnen fremden Gebrauch des Ausdrucks «Menge» aufzuzwingen. Sie tun einem schließlich gewiß den Gefallen, nicht mehr von den Kindern der Klasse I, sondern von der Menge der Kinder von Klasse I, nicht mehr von den Fingern der rechten Hand, sondern von der Menge der Finger der rechten Hand, nicht mehr von den Fenstern des Klassenraumes, sondern von der Menge der Fenster unseres Klassenraumes, nicht von den Mützen der Jungen, sondern von der «Menge der Jungenmützen» zu sprechen. Es mag didaktisch auch gerade noch erträglich sein, wenn die Autoren glauben, den Unterschied zwischen einer real vorliegenden und einer gezeichneten Menge zusätzlich «herausarbeiten» zu müssen.

Unverständlich bleibt mir aber, daß die Kinder schon nach 1 oder 2 Monaten Schulzeit dahingehend belehrt werden, daß auch ein Element, ja sogar das Nichts Mengen sind; letzteres die «leere Menge». Das Kind hat ein Anrecht darauf, das Verstehbare zu verstehen. Dieses Recht wird mißachtet, wenn man den Kindern Scheinwissen in Form von Prestigeausdrücken aufzwingt und abverlangt. – Doch aus rein formalen Gründen sind die Mathematiker darauf gekommen festzulegen, daß ein Element sowie das Nichts «Mengen» sein sollen: Die Lehrsätze der Mengenlehre wären andernfalls nur mit großer Umständlichkeit formulierbar. Eine solche Bezeichnungsweise aber muß jedem Kind und auch jedem Erwachsenen, der diese formalen Gründe nicht kennt, als unverständlich und widersinnig erscheinen. Der Geist allein kann die Einführung von Bezeichnungen und Zeichen motivieren. Wo es nicht einmal einen Sprachgeist gibt, sind alle Beziehungen völlig geistlos, sinnlos, zwecklos. Das gesamte Verstehen geht über das Mittel des eigenen verständlichen Sprechens. – Eine trockene, klischeehafte Übernahme der Cantor'schen Erstbegriffe ist offensichtlich ungeeignet als Grundlage eines Lehrgangs für das 1. Schuljahr.

Aufträge an Kinder des 1. Schuljahrs nach etwa 10 Wochen lauten: «Nimm aus der Menge der kleinen Bausteine die Teilmenge der gelben heraus!» – «Das ist die Menge der Kinder unserer Klasse, die schwimmen können. Wie heißt die Restmenge?» – «Bilde aus der Menge der Kinder unserer Klasse die Teilmengen der Kinder, die Milch trinken und die, die Butterbrot essen!» «Wie heißt die Schnittmenge? Wie heißen die übrigen Mengen!» Antwort: «Die Schnittmenge ist die Menge der Kinder, die Butterbrot essen und Milch trinken»; übrige Mengen: «Kinder, die Butterbrot essen, aber nicht Milch trinken»; ferner: «Kinder, die Milch trinken, aber nicht Butterbrot essen». – «Hier soll das kommutative Gesetz beim Bilden der Vereinigungsmenge anklingen», daher sollen die Kinder verstehen lernen, daß die Vereinigungsmengen aus «den roten Bausteinen oder Dreiecken» einerseits, der aus «den Dreiecken oder den roten Bausteinen» anderseits gleich sind. – Der Versuch des Einschleifens wissenschaftlicher Fachtermini wird also fortgesetzt, und zwar durch Einführung der Ausdrücke «Teilmenge», «Restmenge», «Schnittmenge», «Vereinigungsmenge»!

Daraus, daß das Alte (angeblich) schlecht ist, folgt ja nicht unbedingt, daß das Neue gut ist und der prämathematische Zug nicht in «falscher Richtung fährt».
Auf die Frage nach der Berechtigung der Reform soll hier nur unter einem Gesichtspunkt eingegangen werden. Fuchs begründet die Herausgabe seines Buches mit der Notwendigkeit, die Eltern für die häusliche Mithilfe bei den Hausaufgaben auszurüsten. Er zitiert dazu den Pädagogen Werner Loch von der Universität Erlangen: «Die Eltern haben vielleicht die größte Last der Schule heute zu tragen, weil sie in der Betreuung und Nachhilfe bei den Hausaufgaben ihrer Kinder stark beansprucht sind.» Und er erzählt von einer Vorortsschule in Kopenhagen, für die neue Richtlinien für den Rechenunterricht erlassen wurden. «Aber weder die Schüler noch die Eltern verstanden, was der Lehrer vortrug. Jetzt haben sieben Väter und fünf Mütter einen Lehrgang samt Abschlußprüfung mitgemacht und sind in der glücklichen Lage, ihren ABC-Schützen wieder bei den Hausaufgaben helfen zu können.»
Wenn dem so ist, dann fragt es sich wirklich, ob nicht das Kommando: «Das Ganze halt!» am Platze wäre. Denn trotz aller Kurse und Bücher wird es immer nur ein kleiner Teil der Eltern sein, die zu leisten vermögen, was da von ihnen verlangt wird.
Da haben wir in den letzten Jahrzehnten das Latein als Barriere für Kinder aus bildungsfernem Milieu durchschaut und um der «Chancengleichheit» willen durch die Anerkennung lateinloser Bildungswege umgehbar gemacht. Und nun sind wir drauf und dran, bereits in der Grundschule eine neue Bildungsbarriere aufzubauen.
Und bald wird das Privatstundenelend an den Gymnasien in die Primarschule verpflanzt werden. Und unsere Schulpsychologen werden nicht mehr nur die Legastheniker (deren explosionsartige Vermehrung wir ja wohl auch einer Methodenreform verdanken), sondern auch die Mathastheniker ausfindig machen, und dem logopädischen wird ein mathopädischer Dienst angegliedert werden müssen.
(Aus: Basler Schulblatt, Nr. 5, 1971) pn

Auch vor Negationen und «Venn-Diagrammen» wird nicht haltgemacht. Kinder des 1. Schuljahres sollen Zusammenhänge wie diese erkennen können: «Die Menge der nicht-blauen Dreiecke ist die Menge der Dreiecke, die gelb oder rot sind». – Ein Beispiel für ein Venn-Diagramm: Wenn zwei Kreise einander schneiden, entstehen drei Bereiche, die aus Stücken der sich teilweise überdeckenden Kreisflächen gebildet werden: ein dritter Kreis. Schneide die beiden ersten so, daß sieben Bereiche entstehen! Wir bezeichnen nun die ganzen Kreise mit I, II, III und setzen fest, daß enthalten sein sollen: in I die Menge aller Runden, in II die Menge aller Gelben und in III die Menge aller Dünnen.
Kindern des 1. Schuljahres wird nun beispielsweise die Aufgabe gestellt, die sieben Teilbereiche zu «benennen»; die richtigen von Kindern (etwa 4 Monate nach Schulbeginn) erwarteten Antworten wären folgende: «Die Menge der Dünnen, die nicht gelb und nicht rund sind.» – «Die Menge der Bausteine, die zugleich dünn und gelb und rund sind» usw.
Solche Vorschläge können offensichtlich nur von Fachleuten kommen, die die Mathematik zu wenig als etwas Werdendes zu sehen vermögen, weil sie zu sehr im Banne der fertigen Wissenschaft stehen. Lehrern und Schülern aber wird damit das Gift der Entfremdung vom elementaren, grundbezogenen Denken verabreicht, weil das Haus vom Dach aus gebaut werden soll. Das genetische Lehren will erst gelernt sein! Sonst dient man nur scheinbar dem Fortschritt, während den Kindern in Wirklichkeit mathematische Bildung unmöglich gemacht wird.
Eine solche Bildungsvereitelung betreibt man mit Sicherheit, wenn den kleinen Kindern die Anzahl als Eigenschaft von Mengen offeriert wird: Abgebildet sind drei Mengen, die erste bestehend aus 4 Blumen, die zweite aus 4 Teilen eines Eßbestecks, die dritte aus 2 Stühlen, einem Tisch und einem Glas. Die Kinder sollen nun lernen, daß alle diese Mengen «eine gleiche Eigenschaft» haben, nämlich die gleiche Anzahl. Selbst im zweiten Schuljahr weiß kein Kind etwas mit dem Wort «Eigenschaft» anzufangen! Nicht einmal dann kennen sie die Bedeutung von «Eigenschaft», wenn dies Wort im Sinne der Umgangssprache gebraucht wird. Später lernen sie dann, daß rot, grün, hart, naß Eigenschaftswörter sind. Jetzt aber sollen sie gleich im 1. Schuljahr lernen, daß die Anzahl die «Eigenschaft» einer Menge ist! Offensichtlich trägt man zur Sprachverderbnis der Kinder bei, wenn man Redeweisen der Fachwissenschaft unmodifiziert in ein Buch

für das 1. Schuljahr setzt. – Haben die Autoren denn niemals in einem ersten Schuljahr unterrichtet oder hospitiert? Sie wüßten dann doch ganz gewiß, daß diese kleinen Kinder den folgenden ihrer Sätze keinerlei Sinn entnehmen können: «Wir ordnen unsere Mengen nach steigender Anzahl», oder «Die zweite Aufgabe macht die erste immer rückgängig». – «. . . nach steigender Anzahl» enthält schon deswegen eine Summierung von Unverständlichkeiten, weil das Wort «Anzahl» für die Kinder kaum mit den spezifischen Vorstellungen zu besetzen ist.

Zusammenfassung

1. Die Mengenlehre im eigentlichen Sinne bleibt im 1. Schuljahr natürlich in primitivsten Anfängen stecken. Diese vermittelt man einem Universitätsstudenten der Mathematik, der noch nie etwas von der Mengenlehre gehört hat, in längstens 5 Minuten. Im 1. Schuljahr aber braucht man dafür 3 Monate! Ein solcher Widerspruch zur Ökonomie des menschlichen Lernens ist nichts anderes als Zeitverschwendung, die man sich bei unserer immer nur begrenzten Zeit des Lernens einfach nicht leisten kann.
2. Wegen des unangemessenen zeitlichen Aufwandes mit einem nicht altersgemäßen Stoff lernen die Kinder Entscheidendes nicht! Was sie lernen können und lernen müßten, bleibt vielfach unberücksichtigt: Der so vielfältige und vielbezogene Aufgabenbereich des 1. Schuljahres schrumpft bei Neunzig-Sorger zusammen auf ein Rechnen bis 20 in den Operationen «+» und «–»! Und selbst von diesen bleiben Aufgaben des Zehnerübergangs wie $8 + 6$; $6 + 7$ unerklärt. Dabei ist der Bezug auf die Sachwelt so gut wie überall unmotiviert und unzureichend. Es ist aber nicht zu verantwortender didaktischer Substanzverlust, den Zahlenraum im 1. Schuljahr nun wieder künstlich auf 20 zu beschränken und dabei die Entwicklung der Mal-Operationen sowie ihrer Umkehrungen überhaupt nicht einzuleiten.

Ist das stufengemäß?

Besteht denn irgendeine Notwendigkeit, die Art und die Inhalte des Lernens unserer Schulanfänger von Matrizen, Karnaugh-Diagrammen oder der Theorie der Rechenautomaten bestimmen zu lassen? Offenbar wird hier der fachliche Ehrgeiz blind für die im Unterricht selbst angelegten Beschränkungen und Möglichkeiten. «Es bleibt dabei, daß das formal-logische, abstrakte Denken bei uns um das 13./14. Lebensjahr möglich wird.» Und selbst dann nur für eine Auslese von Schülern, möchte ich hinzufügen. Wo aber zwischen Möglichkeiten und Zielsetzungen eine so unübersehbare Ferne liegt, da wird das Gesetz der Nähe und damit das Naheliegende mißachtet und folglich nichts weiter als Unheil angerichtet. Beim Aufbau eines Grundschulrechenlehrgangs hat die Mathematik durchaus eine Funktion, hier aber wird sie extrem disfunktional eingesetzt.

Offenbar möchte man schon gleich den kleinen Kindern ein Bildungsgewand umhängen, das selbst viele Große nicht ausfüllen können. Ich kann mir einfach nicht vorstellen, daß die «Mathematisierer» solche Unvereinbarkeiten nicht bemerken. Vielleicht glauben sie, die unlösbaren didaktischen Probleme einfach wegüben zu können, indem sie die Einsicht in die mathematische Struktur als sekundär ansehen. Mit Recht sagt hierzu B. Bierbaum: «Vor solchen Versuchen muß dringend gewarnt werden, sie stellen einen Rückfall in mittelalterliche Paukmethoden dar, und sind deshalb besonders gefährlich, weil sie sich auf moderne Mathematik berufen.»

Wenn Autoren selbst in der Forderung nach entwicklungsgemäßer Anschauung und Einsicht unsicher zu werden beginnen, wenn sie längst gesicherte Prinzipien des Lehrens und Lernens ignorieren, wenn sie sich diskussionslos über Selbstverständlichkeiten hinwegsetzen, dann ist ein Unterrichtschaos, wenn nicht sogar die Auflösung des Unterrichtsbegriffes überhaupt die unausbleibliche Folge.

Begriffe der Mengenlehre unter der Lupe

1. *Die Vereinigungsmenge.* Wer zu seinen 3 Äpfeln noch 5 Äpfel dazusammelt, rechnet die Aufgabe $3 + 5 = 8$, um die Gesamtzahl seiner Äpfel zu bestimmen. Auf diese Weise wurde bisher die Addition erklärt und veranschaulicht. Dienes will nun aber mit dem allgemeinen Begriff der Vereinigungsmenge beginnen: Wenn man drei dicke Kinder und fünf Jungen zu einer Menge vereinigt, so

können das insgesamt 5 oder 6 oder 7 oder 8 Kinder sein. Letzteres trifft nur in dem Spezialfall zu, daß keiner der 5 Jungen dick ist. Die beiden Mengen der 3 dicken Kinder und der 5 Jungen haben dann kein Element gemeinsam. Nur in diesem Falle der Elementfreiheit erhalten wir die gewöhnliche Addition, die also ein Spezialfall der Mengenvereinigung ist, der nach Dienes'scher Auffassung nicht Ausgangspunkt unterrichtlicher Bemühungen sein soll.

2. *Die Verbindungsmenge.* Wer $3 \cdot 4$ veranschaulichen soll, pflegt seinen Kindern zu erklären, daß Malaufgaben nur Kurzschreibweisen für die ihnen schon bekannten Additionsaufgaben mit gleichen Summanden sind. Wollen wir also den Zahlenwert von $3 \cdot 4$ bestimmen, so haben wir $4 + 4 + 4$ auszurechnen, denn $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$. Figural kann man diesen Ausdruck darstellen als 3 Male mit je 4 Kringeln darin oder aber auch als Dreier-Vierer-Feld. – Modernisten wie Z. P. Dienes, H. Schlechtweg, G. Simm u. a. wollen dagegen bereits im 2. Schuljahr den Begriff der «Verbindungsmenge» einführen. Diesen Begriff braucht man aber in der Tat, um das Produkt von zwei transfiniten Kardinalzahlen bilden zu können. – Wieder holt man das Allgemeine sehr weit her, um damit eine einführende Erklärung für etwas sehr Einfaches und Spezielles geben zu können, nämlich für den Ausdruck $3 \cdot 4$: Man denkt sich zwei Mengen, eine aus den drei Jungen Albert, Berthold, Christian bestehend, die wir mit $\{a, b, c\}$ bezeichnen und eine zweite, die aus den vier Mädchen Anna, Brunhild, Cäcilie und Dora gebildet sei, die mit $\{A, B, C, D\}$ bezeichnet wird. Unter der Verbindungsmenge versteht man nun die Menge, die aus allen möglichen verschiedenen Paaren mit je einem der Jungen a, b, c und einem der Mädchen A, B, C, D gebildet wird.

$$\{a, b, c\} \times \{A, B, C, D\} = \{\{a, A\}, \{a, B\}, \{a, C\}, \{a, D\}, \{b, B\}, \{b, C\}, \{b, D\}, \{c, A\}, \{c, B\}, \{c, C\}, \{c, D\}\}$$

Wenn man genau hinschaut, so stellt man beruhigt fest, daß in der schematischen Darstellung 12 Verbindungsstriche gezeichnet werden müssen und daß die Verbindungsmenge aus 12 Paaren besteht; $3 \cdot 4$ ist eben auch nach dieser Produktdefinition gleich 12.

Man ist sehr stolz darauf und spricht es auch aus, daß auf diese Weise das Malnehmen völlig unabhängig vom Addieren eingeführt wird. – Welchen Vorteil sollte aber diese Separierung der Begriffe Summe und Produkt für den Unterricht der Siebenjährigen haben? – Natürlich verdeutlicht das Gewirr der sich vielfach schneidenden Verbindungsstriche diesen Kindern gar nichts, daher hat man die Striche gelegentlich auch durch Rosen ersetzt, die der Junge jedesmal bei einer Paarbildung seiner Partnerin schenkt. Dadurch wird die Verbindungsmenge wieder aus dem Rennen genommen und gleich nach ihrer Einführung als überflüssig erwiesen.

B. Bierbaum hat in einer scharfsinnigen Analyse geziegt, daß Kinder im 2. Schuljahr den Begriff der Verbindungsmenge überhaupt nicht bilden können. Die Kinder müßten mit Mengen grundsätzlich verschiedener Art nebeneinander arbeiten, einmal mit einfachen Mengen, deren Elemente Kinder $\{a, b, c\}$, $\{A, B, C, D\}$ sind; dann aber auch mit Mengen von Mengen, also mit Mengen, deren Elemente selbst Mengen, nämlich Paare sind: $\{a, A\}$, $\{a, B\}$, $\{a, C\}, \ldots$ Die Schwierigkeit wird dadurch erhöht, daß dieselben Dinge, hier also die mit a, b, c, A, B, C, D bezeichneten Kinder, einmal selbst Elemente sind, dann aber wiederum nur als Teile je eines Elementes, nämlich der Paare dienen. –

Dienes weist darauf hin, daß der Übergang von einfachen Mengen zu Mengen von Mengen den Kindern nur nach vielfältiger praktischer Übung ermöglicht werden könne. – Und wozu dient diese Übung? Ausschließlich dazu, um den Kindern eine anschauungsinadäquate «Erklärung» im Laufe der Zeit erklären zu können! – Die Umständlichkeit eines solchen Vorgehens zur Einführung des Malnehmens scheint zumindest Z. P. Dienes bewußt zu sein. Die Neuerer beruhigen sich aber offenbar bei dem Gedanken, daß sie den Kindern einen Begriff und eine Operation der modernen Mathematik näherbringen wollen. Daß der Begriff der Verbindungsmenge seinen Nutzen frühestens 12 Jahre später beim Fachstudium der Mathematik erweisen kann, zeigt den ganzen Widersinn einer solchen Verfrühung.

Die Einführung der Verbindungsmenge im 2. Schuljahr, die viel Übungszeit erfordert, kann in jedem Falle nur eine verlorene Arbeit sein. – Jede noch so fachwissenschaftlich betonte Didaktik wird unwissenschaftlich und unexakt, wenn sie nicht sinnadäquat angesetzt wird. Dieser Sinn aber ist stets die «Emporbildung» noch junger, unreifer Menschen.

3. *Nichtdekadische Stellenwertsysteme.* Selbst unser Zahlensystem mit der Grundzahl 10 ist Z. P. Dienes noch zu speziell. Dem Arbeiten im Zehnersystem soll ein solches in Stellenwertsystemen mit verschiedenen Basen vorangehen. Da man hierzu den Potenzbegriff braucht, soll auch dieser gleich mitentwickelt werden. Nehmen wir beispielsweise das Dreiersystem, so lautet die Darstellung der natürlichen Zahlen 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, ... In diesem System wäre natürlich $1 + 2$ nicht gleich 3, sondern 10; $2 + 11$ nicht gleich 13, sondern 20; $2 \cdot 2$ nicht gleich 4, sondern 11.
Ich glaube, daß diese drei Beispiele als Kostproben genügen. Wer ihnen gemäß unterrichtet, verhält sich wie ein Gärtner, der seinen Pflanzen zumutet, mit den Wurzeln oben in der Luft nach unten in den Boden zu wachsen. Eine Einwurzelung ist dann unmöglich. Man will die geistige Entwicklung zu höheren Abstraktionen einfach nicht abwarten, sondern möchte die Kinder möglichst direkt in den mathematischen Ideenhimmel versetzen. Es ist aber nicht nur nutzlos, sondern dezimiert auch die Ernte, wenn man dem Korn wachsen helfen will, indem man an den Halmen zieht. Eine solche Illusion ist noch folgenschwerer als der Irrtum, in dem die sogenannte alte Schule befangen war, man brauche den Kindern nur vorwiegend Stoffe und Ergebnisse zu vermitteln; die Rückwandlung dieses Denkmaterials in Probleme könne man ihnen überlassen. – Man weiß es nicht oder will es nicht wahrhaben, daß «Werdende am wirksamsten am Werdenden (lernen)».

Laßt uns erraten lehren ...

Eine gleichsam ritualisierte Aneignung der Mathematik, die selbst mit einem Prädikatsexamen vereinbar sein mag, kann zwar wissenschaftsgläubig, aber nicht wissenschaftsverständig machen. So kann es dahin kommen, daß man die kleinen Kinder imposante und trickreiche mathematische Trapezkunststückchen in der Zirkuskuppel vollführen lassen möchte, anstatt sie zunächst einmal das Bodenturnen zu lehren.
Wie sich an den von mir ausgewählten Beispielen gezeigt hat, ist solch ein Verfahren zumal in der Grundschule weder kindgemäß noch logikgemäß und daher auch nicht mathematikgemäß. Es kann sich in der Grundschule am wenigsten um eine sogenannte Modernisierung des Stoffes unter den Aspekten der modernen reinen Mathematik handeln. – Leider kann man zwar Mathematik, aber offenbar nicht didaktische Vernunft und pädagogischen Instinkt studieren. Vielleicht wird der Widersinn am deutlichsten, wenn man den «Reformern» ein Zitat von G. Pólya entgegenhält: «Man muß einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist, man muß die Idee eines Beweises erraten, ehe man die Einzelheiten durchführt ... der Beweis wird durch plausibles Schließen, durch Erraten, entdeckt ... Laßt uns erraten lehren.»

Es gibt zwei miteinander unvereinbare Lehrmeinungen:

1. Der Spezialfall kann nur mit Aussicht auf Verständnis behandelt werden, nachdem die Schüler den allgemeinen und folglich abstrakteren Fall kennen und verstehen gelernt haben.
2. Nur wenn die Schüler allmählich von Spezialfällen zum Allgemeinen aufgestiegen sind, können sie zu allgemeingültigen Einsichten gelangen.

Unsere Gründlichkeit sollte immer darin bestehen, daß wir vom Speziellen, Einfachen, Vorzeigbaren, Seh- und Einsehbaren ausgehen. Demgegenüber tritt bei den «modernen» Mathematisierern die gegenteilige Tendenz zutage. Z. P. Dienes, der kompromißloseste unter diesen Stoffmodernisten, spricht dies am deutlichsten aus: «Wir wenden gegen diese konventionelle Methode ein, daß die Kinder zuerst einen besonderen Fall lernen und dann einen Verallgemeinerungsprozeß durchführen müssen, um die vollständige logische Situation meistern zu können, wenn der letztere eintritt. Tatsächlich haben die Kinder mehr Mühe, einen schon gebildeten Begriff zu verallgemeinern als am Anfang eine allgemeine Vorstellung zu bilden.»

Leider sind solche didaktischen Auffassungen im unguten Sinne, «modern» geworden, so daß man sich mit ihnen auseinandersetzen muß; denn Z. P. Dienes möchte nicht nur in höchst fragwürdiger Weise theoretisieren, sondern alles in unsern Schulen schon Erreichte in Frage stellen.

Sprache und Mathematik

Erst wenn Menschen eine Sache mit ihren eigenen Worten darstellen können, haben sie von dieser Sache eine Anschauung; also nicht bereits dann, wenn sie diese Sache mit irgendwelchen Mitteln nur manuell aufzubauen vermögen. Da man immer nur als Einzelner eine Anschauung gewinnen kann, ist Anschauung ein individueller Prozeß, der auch jeweils nur ein individuelles Ergebnis haben kann: Es kommt darauf an, das individuelle Wort-Sach-Verhältnis zu entwickeln. Daher hat vor der Fachsprache stets die Muttersprache zu stehen. Nur was im Boden der Mutter- und Umgangssprache verwurzelt wird, ist störungsresistent gegen Sinnverlust. Es ist also nicht damit getan, daß irgendwelche Zeichen, Termini und Operationen «gebracht» werden, vielmehr müssen diese an Hand von Figuren gedeutet werden, indem das Kind dazu in der Sprache spricht, in der es sich selbst versteht. Der Fehler der heutigen Fachmodernisten besteht darin, daß sie das Problem der Muttersprache bei ihren Mathematisierungsversuchen überhaupt nicht erkennen. Viel zu abrupt und ohne den Blick zurück verläßt man das sichere «Gehäuse der Muttersprache», um in die Welt der Fachausdrücke und Fachsymbole «aufzusteigen». Zumal in der Grundschule kann nur die Muttersprache die Sprache des Verstehens sein, während die Fachsprache den Verstehensprozeß abschließt, objektiviert und konzentriert sowie für den weiteren Ausbau des Kalküls verwendbar macht.

Den Bereich des Signitiven und der Fachtermini sollte man also von der lebensgestaltenden eigenen Sprache nicht abspalten, sondern mit dieser zusammenwachsen lassen. Natürlich ist die eigene Sprache der Kinder sehr viel umständlicher und unbeholfener als die der Wissenschaft. Sie bedarf der systematischen Entwicklung durch den Unterricht. Indem die Sprache sich weiterentwickelt, werden zugleich auch die Vorbedingungen für eine weitere geistige Entwicklung des Sprechenden erfüllt. Wo immer Zweifel auftreten, ob eine Sache verstanden worden ist, sollte man als Lehrer in der dem jeweiligen Sprachniveau der Kinder angehörenden Muttersprache «verhandeln», um über Verstehen oder Nichtverstehen urteilen zu können. – Dieser Zusammenhang zwischen Muttersprache und Fachsprache scheint den modernen Reformern völlig fremd zu sein.

Wahrscheinlich meint man, was nicht zur Mathematik gehört, dem dürfe auch keine Bedeutung für den Mathematikunterricht beigemessen werden. Daher wird das Kind aus dem «Allgesamt seiner Umwelterfahrungen» gerissen, indem man die ihm eigene Sprache als Mittel des Verstehens vernachlässigt und das heimatkundlich ausgerichtete Sachrechnen für mathematisch bedeutungslos hält.

Methodenfreiheit

Es gehört zu den zahlreichen Widersinnigkeiten unserer Zeit zu meinen:

1. Schulreform auf dem Gebiet des Rechenunterrichts könne man realisieren, indem man Pläne macht und mit dem Stempel der amtlichen Verbindlichkeit versehen läßt. – Alle diese Bestrebungen verkennen, daß der Lehrer die «Zentralfigur» jeder Schulreform ist und bleibt. Beginnen kann ein wirklicher Fortschritt nur damit, daß man um den einzelnen Lehrer wirbt, indem man ihn in mühevoller Kleinarbeit zu überzeugen versucht. Die positive, zustimmende Einstellung der Lehrer zu einer Reformidee ist zeitlich und sachlich vorrangig und kann weder durch Erlasse noch durch Bildungspläne herbeigeführt oder ersetzt werden.

In Deutschland gab es stets mehrere didaktische Systeme des Rechenunterrichts, die um ihre Anhänger werben und sich überzeugend darstellen mußten. Ein Lehrer, der einer vielleicht nur mittelwertigen didaktischen Auffassung folgte, von der er überzeugt und persönlich angesprochen war, hat immer noch mehr erreicht als ein anderer, der gezwungen wurde, nach einer höherwertigen Konzeption zu unterrichten, die ihm wesensfremd war.

Nicht weiter beunruhigend wäre es gewesen, wenn eine Gruppe von Neuerern es unternommen hätte, den Grundschulunterricht mit einem Spiel der modernen Mathematik zu überlagern. Alle Auswüchse, welcher Art auch immer, stellen sich in der Praxis sehr bald als solche dar. Gefährlich an diesen Bestrebungen ist nur, daß es keine Alternativen mehr geben darf, daß es nun plötzlich wieder heißt: «Im Gleichschritt marsch!»

Einen Lehrplan durchzusetzen, sollte niemals eine Frage der Macht, sondern allein der wissenschaftlichen Einsicht sein. Man kann hier nicht umhin, Lichtenberg zu zitieren: «O fehlte doch immer die Macht, wo die Einsicht fehlt!»

Zum Schluß

Soweit die Auszüge aus dem vergriffenen Buch des Didaktikers und Mathematikers. Die Sprache Karaschewskis ist klar, angriffig, da und dort pointiert, damit man Wichtiges nicht überliest und jedermann, der anderer Meinung ist, herausgefordert wird. Aber seine Ansichten decken sich weitgehend mit jenen von Lehrern mit längerer Praxis. Die «neue» Mathematik wird wohl auf die Eigengesetzlichkeit des Kindes weit mehr Rücksicht nehmen müssen. Man fragt sich, ob Mathematik als wissenschaftliche Disziplin sich überhaupt auf die Denkebene der Grundschule heruntertransformieren läßt.

In der Schweiz gibt es noch kein offizielles Lehrmittel, in das die «neue» Mathematik eingebaut ist. – Versuchswerke werden zwar in Probeklassen getestet. Bereits weiß man aber, daß Primarklassen nach sechs Jahren, in der «neuen» Mathematik unterrichtet, beim Übertritt in die nachfolgende Schule (Aufnahmeprüfungen) nicht besser abschnitten als jene, die nach den jetzt gültigen Lehrmitteln geschult wurden. Jedenfalls werden die Verfasser neuer Lehrmittel in Rechnen oder Mathematik (das deutsche Wort ist weit sympathischer!) die Kritik Karaschewskis studieren und widerlegen müssen, ehe sie weiterarbeiten.

Wer der «neuen» Mathematik gegenüber kritisch eingestellt ist, muß trotzdem versuchen, dem wirklich Neuen, das die Schüler auch wirklich weiterbringt und rechnerisch (mathematisch) fördert, grundsätzlich offen zu sein und in seinen bisherigen Unterricht einzubauen.

Ganz verfehlt und für den Lernerfolg sehr gefährlich wäre es, sich total dem «Neuen» zu verschreiben. Ein rororo-Bändchen ist mit «Revolution im Rechenbuch» betitelt – diese Revolution findet bestimmt nicht statt. Der Untertitel des gleichen Bändchens heißt vielversprechend «Die Mathematik verliert ihre Schrecken». Das ist wohl eher verkaufstechnisch denn pädagogisch-didaktisch zu verstehen, weil schwache Schüler in der «neuen Mathematik» noch mehr Schwierigkeiten haben als beim bisherigen «Rechnen».

Es stellt sich tatsächlich die ernste Frage: Kommen unsere schwächeren Schüler, auf die wir vom menschlichen Standpunkt aus Rücksicht nehmen müssen, im Rechnungsunterricht noch mit, wenn die Mengenlehre im Mittelpunkt steht? Vielleicht werden die Verfechter der Mengenlehre in der Primarschule antworten, daß Methodiker die Mathematik schon stufengemäß transferieren würden. Und schon taucht die nächste Frage auf: Ist es dann noch Mengenlehre, wenn alles transferiert und simplifiziert wird? Würde man mit der Mengenlehre nicht besser zuwarten bis zur Mittelschule? Ein bekannter Mengenlehrbestsellerautor hat soeben ein Buch herausgegeben: Mengenlehre für Kindergärtler (ex libris)! Da treibt die Didaktik ganz besondere Blüten.

Kürzlich diskutierte ich mit einem Architekten ETH über die «neue Mathematik». Er kannte dieses Gebiet der Mathematik von der Hochschule her, gestand aber: «Ich bin so froh über das simple Rechnen, besonders das eingedrillte Kopfrechnen, das ich aus der Primarschule ins Leben mitgenommen habe. Täglich muß ich ‹rechnen›, nicht aber ‹Mathematik betreiben›.» Unsere Schule bereitet darum fürs Leben vor, wenn sie die Grundoperationen und das alltägliche Rechnen so einübt, daß es fürs Leben sitzt. Mengenlehre braucht die große Mehrheit unserer Schüler im praktischen Leben nicht, nur wenige werden mit ihr in fortführenden Schulen bekanntgemacht. Dann bringen diese Schüler auch die nötige geistige Reife mit, die «neue» Mathematik dank des logischen Denkens sehr rasch besser zu verstehen als in den ersten Grundschuljahren.

Auch in der Pädagogik wird die Suppe nie so heiß gegessen, wie sie gekocht worden ist. Ohne Zweifel wird bereits im nächsten Jahrzehnt im Rechnen wieder was Neues in Mode kommen. Deshalb braucht die Schweiz noch lange nicht ein «Entwicklungsland punkto integrierte Geometrie» zu sein, wie dies ein Neuerer vermerkt hat.

Nachtrag

Kürzlich fand in Kiel die 6. Bundestagung für Didaktik der Mathematik statt. Unter den 300 Teilnehmern befanden sich praktisch alle Vertreter der Mathematikdidaktik an Pädagogischen Hochschulen. Der Kongreß schloß mit einer Überraschung: Fast alle Vortragenden haben sich gegen die von Lehrplänen geforderte (in Westdeutschland soll die Mengenlehre ab Herbst 1972 integriert sein an der Grundschule) und inzwischen von Grundschulbüchern realisierte Mengenlehre ausgesprochen.

In der Wochenzeitschrift «Die Zeit», Nr. 20, Seite 64 vom 19. Mai 1972 schreibt Helmut Linder über den Kongreß u. a.:

Nicht angezweifelt wird der Nutzen der «Logischen Blöcke», die auf Dienes zurückgehen, für die logische Schulung der Sechsjährigen. Diese «Merkmalsklötze» können in spielerischen Situationen und sehr abwechslungsreich den Unterricht beleben. Aber weshalb spricht man von der «Menge aller Klötze, die rot sind», statt schlicht «die roten Klötze» zu sagen? Die Feststellung, daß es in dem Material keinen braunen Klotz gibt, kann man freilich auch so ausdrücken: «Die Menge aller braunen Klötze ist die leere Menge.» Warum einfach, wenn es umständlich geht?

Es gibt kaum einen Abc-Schützen, der nicht bis drei zählen könnte. Aber die neuen Mathematikbücher verlangen von den Kindern, daß sie alle ihre Erfahrungen im Umgang mit Zahlen vergessen, damit ein wissenschaftlich sauberer Zahlbegriff aufgebaut werden kann.

In der Mathematik hat man es meist mit unendlichen Zahlenmengen zu tun. Bei unendlichen Mengen kann man aber nicht mehr fragen, ob zwei Mengen gleich viele Elemente haben. Die Mengenlehre definiert in dieser Situation, wann zwei Mengen gleichmächtig heißen sollen. Durch «ist gleichmächtig mit» wird nun eine Äquivalenzrelation erzeugt, die alle Mengen in Äquivalenzklassen zerlegt. Die gemeinsame Eigenschaft aller Mengen in einer solchen Klasse nennt der Mathematiker Kardinalzahl.

Dieser Begriffsapparat ist natürlich ein viel zu schweres Geschütz, um den Sechsjährigen etwa die natürlichen Zahlen bis 100 nahezubringen. Die Mengenlehre, die sich zur Hauptsache mit unendlichen Mengen befaßt, muß soweit «verdünnt» werden, bis sie auch den Schulanfängern mundet. Aber diese Bemühungen um den kardinalen Aspekt der natürlichen Zahlen stehen wieder unter dem Motto: Warum nicht einfach, wenn es auch umständlich geht?

Noch größer wird der «Krampf», wenn man die Summe von zwei natürlichen Zahlen auf die Vereinigung von Mengen zurückführen will. Hier muß man – für die Kinder völlig unmotiviert – fordern, daß die zu vereinigenden Mengen elementfremd sind.

Für die Subtraktion muß eigens die Mengendifferenz, die man sonst nie in der Grundschule benötigt, eingeführt werden. Die Analogie zur Differenz von Zahlen gilt aber nur für den Spezialfall, daß die eine Menge Teilmenge der anderen sei. Das ist zwar ein sauberer, zugleich aber ein steriler Weg, der den Schülern das Verstehen bestimmt nicht erleichtert. Entsprechendes gilt für den Zusammenhang von der Multiplikation und der Produktmenge. Schließlich kann man noch bestimmte Symbole der Mengenlehre einüben. Da diese Schreibweisen jedoch in der Grundschule nicht benötigt werden, handelt es sich nur um sinnloses Vorratslernen.

Die neuen Grundschulbücher zeigen in aller Deutlichkeit, wieviel Mühe und Scharfsinn die Autoren am falschen Objekt aufgewendet haben. Bei allen Sachkennern besteht Einigkeit darin, daß zwar der Rechenunterricht der Grundschule gründlich umgestaltet werden müßte; falsch ist aber die Annahme, daß das ausschließlich mit Hilfe der Mengenlehre geschehen könne.

Zweifellos: Die Mengenlehre ist eine der wesentlichen Grundlagen der Mathematik, die auch der Lehrplan der Schule erfassen muß. So sollten die Mengenschreibweise in den weiterführenden Schulen am Ende des fünften Schuljahres, Paarmengen (Relationen) im siebten Schuljahr besprochen werden. Das Rechnen mit Mengen, die Mengenalge-

bra, gehört etwa in die Klasse 3 des Gymnasiums. Die eigentliche Mengenlehre, also der Umgang mit nichtendlichen Mengen, ist in der 5. Klasse am Platz wie auch die Gleichgestaltigkeit (Isomorphie) von Mengenalgebra, Aussagenlogik und Schaltalgebra. Damit ist auch der Einstieg in die Informatik («Computerkunde») gegeben.
Es wird wohl noch einige Zeit dauern, bis sich die Erkenntnis durchgesetzt hat, daß die Mengenlehre nur einen Teil der Neuen Mathematik ausmacht. Die zuständigen Fachleute, nämlich die Fachdidaktiker der Pädagogischen Hochschulen, sind sich jedenfalls einig darin, daß die Mengenlehre in der Grundschule nur eine nebensächliche Rolle spielen sollte, wenn man sie überhaupt dort behandeln will.

Reform des Rechenunterrichts — ein Holzweg?

Werner Durrer

Schulbuchverleger, Fernsehleute, Erziehungsdirektoren befassen sich mit der Reform des Rechenunterrichts. An Publizität fehlt es nicht. Sporadisch melden sich auch Kritiker zu diesem Unternehmen. Die Kritiken enthalten einerseits durchaus bedenkenswerte Einwände, anderseits aber auch Mißverständnisse, Verdrehungen und Unterschiebungen. Zu beidem möchte ich im Folgenden so kurz und so deutlich wie möglich Stellung nehmen.

1. Ist der Rechenunterricht an unseren Primarschulen schlecht?

Nein, schlecht ist er nicht, aber man könnte ihn bestimmt verbessern. Die Primarlehrer sind sicher die letzten, die das bestreiten wollten. Dabei darf man aber eines auf keinen Fall vergessen: Ein schlechter Methodiker ist nicht unbedingt ein schlechter Lehrer. Bei einem schlechten Methodiker lernen die Schüler nicht viel. Schade! Bei einem schlechten Lehrer bekommen sie einen seelischen Knacks. Es bleibt eine oft lebenslange Abneigung gegen Schule und Lehrer. Und das ist verheerend!

2. Will man jetzt wirklich den Mathematikunterricht des Gymnasiums in die Primarschule verpflanzen?

Nein, eine solche Behauptung ist Unsinn. Sie beruht auf einem Mißverständnis: Daß man statt vom Rechenunterricht vom Mathematikunterricht spricht, heißt erstens: Nicht nur das Rechnen, sondern auch die Geometrie und evtl. andere Gebiete, die dem Primarschüler zugänglich sind, sollen in diesen Unterricht einbezogen werden. Zweitens meint man, daß man nicht nur mechanische Rechenfertigkeit, sondern Verständnis anstrebt.

3. Aber die Mengenlehre ist doch Stoff des Gymnasiums?

Die Mengenlehre ist eine mathematische Disziplin, die sich mit Eigenschaften und Beziehungen unendlicher Mengen befaßt. Und das ist auch heute noch zum größten Teil Hochschulstoff. Wenn man im Zusammenhang mit der Primarschule von Mengenlehre spricht, so ist das eine maßlose Übertreibung. In den Primarschulunterricht möchte man lediglich den Begriff der endlichen Menge und evtl. einige weitere mit ihm verknüpfte aber ebenso einfache Begriffe übernehmen. Wieviele dieser Begriffe sich für die Primarschule eignen, darüber ist die Diskussion noch offen.
Aber es geht ja hier gar nicht um Fragen des Stoffes, sondern um Methodik. Daß man von der Mathematik her auf Begriffe und Verfahren hinweist, die helfen könnten, den Unterricht besser zu ordnen, klarer zu begründen, durchsichtiger und damit verständlicher zu machen, das ist gedacht als eine Hilfeleistung für die Methodik.

4. Und doch werden eine Menge neuer Namen, Symbole und Begriffe eingeführt. Sind diese noch stufengemäß?

Wenn ein Schüler einen Begriff nicht verstehen kann, dann soll man ihn nicht ein-