Piaget, die Mathematik-Didaktik und die Unterrichtspraxis im Rechnen

Autor(en): **Lüdi, Werner**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **68 (1981)**

Heft 10: **Jean Piaget (1896-1980)**

PDF erstellt am: **19.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-530490

Piaget, die Mathematik-Didaktik und die Unterrichtspraxis im Rechnen

Werner Lüdi

Wir gehen aus von den klinischen Experimenten von Piaget (vgl. deren Darstellung im fünften Beitrag dieses Hefts). In weitgehender Analogie zu diesem Verfahren sucht man seit einigen Jahren für den Mathematikunterricht der Volksschulen in vielen Teilbereichen Unterrichtssituationen zu finden, welche die Schüler anregen sollen, möglichst selbständig zu gewissen Erfahrungen und Erkenntnissen zu gelangen. Diese Bemühungen sind dokumentiert im Bericht über das Schweizerische Mathematik-Forum II mit dem Titel «Motivierende Situationen im Mathematikunterricht» (herausgegeben von der Schweizerischen Konferenz der Kantonalen Erziehungsdirektoren, 1977).
Piagets Versuche sind für Situationen im Rechenunterricht von Bedeutung, in denen bestimmte Erkenntnisse neu erarbeitet werden. Wir befassen uns deshalb nicht mit den Problemen des Übens im Sinne der Sicherung und Verinnerlichung bestimmter Abläufe. Es ergeben sich jedoch einige Anmerkungen zu Problemstellungen bei Einführungslektionen in verschiedenen Teilbereichen des Rechenunterrichts.

Problemstellungen zur Entwicklung des Zahlbegriffs

Piaget selber hat dazu sehr viele brauchbare Experimente beschrieben. Diese können direkt oder in Varianten auch in den Unterricht eingebracht werden. Interessante Beispiele dazu finden sich bei Piaget/Szeminska, «Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde» (Studienausgabe Klett, 1979) im Kapitel «Provozierte Korrespondenz und die Gleichsetzung korrespondierender Mengen». Da der Zahlbegriff nicht nur die natürliche Zahl in ihrem kardinalen und ordinalen Aspekt umfasst, sondern auch den der Masszahl, werden die weit verbreiteten Cuisénaire-Stäbe als Modell für Längenmasszahlen benützt. Können diese Stäbe im Sinne Piagets eingesetzt werden? Die Antwort auf diese Frage fällt nicht leicht. Als Arbeitsmaterial zur Bildung eines tragfähigen Zahlbegriffs sind die Cuisénaire-Stäbe zu starr. Man wird aber wegen des verschiedenen Entwicklungsstandes der Schüler nicht scharf trennen wollen zwischen dem Aufbau des Zahlbegriffs und dem Erarbeiten der elementaren additiven Zahlbeziehungen. Unter diesem zweiten Gesichtspunkt lassen sich mit Cuisénaire-Stäben gute und genügend offene Problemstellungen erarbeiten.
Nach Piaget muss das Kind, das über den Längenbegriff (Cuisénaire-Stäbchen) an die Zahlen und ihre Beziehungen herangeführt werden soll, verstanden haben, dass eine Länge bei ihrer Verschiebung erhalten bleibt (Längeninvarianz). Diese Einsicht entsteht beim normalen Kind erst mit ca. 6 Jahren, beim schwachen später. Ob die Schüler, welche bezüglich der Längen noch keine genügende Invarianzvorstellungen entwickelt haben, durch die Cuisénaire-Stäbe eher verwirrt oder gerade im Hinblick auf dieses Defizit gefördert werden, bedarf noch der Klärung.
Aus der Beobachtung der Praxis muss eine Feststellung hier ganz deutlich ausgesprochen werden: Als Kennzeichen eines selbstentdeckenden funktionellen Lernens im Sinne Piagets genügt das Vorhandensein von konkreten Gegenständen oder strukturierten Materialien und das handelnde Umgehen mit diesen nicht. Es geschieht nicht selten, dass auch mit diesen Voraussetzungen blosse Dressurübungen durchgeführt werden. Zur Begründung für solches Vorgehen hört man, dass «es so eben rascher gehe» oder, dass «man darauf angewiesen sei, weil der Kollege (die Kollegin) mit der Parallelklasse schon seit sechs Wochen am Rechnen sei». Es ist wohl offensichtlich, dass die Entwicklung des Zahlbegriffs nicht durch organisatorische Massnahmen beliebig beschleunigt werden kann. Auch das Konkurrenzverhalten der Lehrerschaft unter sich ist nicht zwingend mit der Entwicklung der Erkenntnisse bei den Schülern verknüpft.

Problemstellungen zur Entwicklung der Grössenbegriffe

Auch in diesem Sachbereich hat Piaget sehr viele experimentelle Möglichkeiten gezeigt. Allerdings nennt Piaget die Grössen anders; sie heissen «physikalische Mengenbegriffe» (Piaget/Inhelder; Die Entwicklung der physikalischen Mengenbegriffe beim Kinde, Studienausgabe, Klett 1975). Sie werden oft dem Sachunterricht oder den Realien zugeordnet. Dies spielt an sich keine Rolle. Leider werden auch hier die vorgeschlagenen Möglichkeiten und damit im Zusammenhang die Erkenntnisse über die Entwicklung der Begriffe in der Unterrichtspraxis oft nicht ernst genommen. Man weicht hier ins «Sortenverwandeln» aus. Statt mit dem Rückgriff auf Anschauungen oder dem Schaffen neuer Erfahrungen wird hier das Heil in vermehrtem Üben gesucht. Es ist schon wahr, dass Sortenverwandeln und Rechnen mit Grössen rein mechanisch gedrillt werden können. Die Ergebnisse solcher Bemühungen sind auch leicht prüfbar. Die Lernergebnisse allerdings sind und bleiben vielfach unsicher und oberflächlich. Dies besonders bei den Schülern, welche die nötigen Erfahrungen nicht anderswo erwerben können. Benachteiligt werden somit die Schüler aus einem anregungsarmen sozialen Milieu.

Problemstellungen zur Entwicklung der logischen Funktionen im engeren Sinne

Piaget hat auch in diesem Bereich Untersuchungen vorgenommen. In der fachdidaktischen Praxis haben diese aber kaum Auswirkungen gezeigt. Die «Mengenspiele», wie sie von Dienes und anderen propagiert worden sind, hatten eine so viel grössere Wirkung, dass die Erneuerung des Mathematikunterrichts geradezu mit der «Mengenlehre» gleichgesetzt wurde.
Die Gründe für diese relative Unwirksamkeit der Untersuchungen von Piaget in diesem Bereich sind nicht ganz klar. Seine Terminologie weicht in diesem Bereich sehr stark von der in der Mathematik üblichen ab. Es könnte sein, dass deshalb die konkreten Aussagen von Piagets *Stadientheorie* hier im Gegensatz zu den Bereichen «Grössen» und «Zahlbegriff» nur wenig zur Kenntnis genommen wurden. Hier ist in der Mathematik-Didaktik ein breiter Einbruch einer fachwissenschaftlich orientierten formal-abstrakten Sicht des Unterrichtsstoffes geschehen. Am Hochschulstoff interessierte Didaktiker haben umfassende Programme entwickelt, die ohne nähere Überprüfung hinsichtlich ihrer Eignung für die entsprechnde Altersstufe vielerorts durch Erlasse in die Schulen gebracht wurde. Das Ausmass des Debakels ist allgemein bekannt und muss hier nicht näher beschrieben werden. Inzwischen wurde nachgewiesen, dass die in diesen Programmen enthaltenenen, für Erwachsene und damit auch für Fachleute plausiblen Denkweisen, welche als «Schülerlösungen» vorgeschlagen wurden, eben doch nicht der Entwicklung des Denkens entsprechen.
Diese Fehlentwicklung macht die Bedeutung der Forderung Piagets, dass der Unterricht sich am Kinde zu orientieren habe, überdeutlich.
Vor einem Missverständnis muss allerdings deutlich gewarnt werden. Trotz des Scheiterns der abstrakten Mengenlehre spielen die logischen Operationen, welche der Mengenlehre zugrundeliegen, eine entscheidende Rolle im kindlichen Denken. Man hat sich beim Abenteuer «Mengenlehre» nicht am Kind, sondern an der Hochschule orientiert.
Die logischen Operationen des Kindes bilden auf der jeweiligen Entwicklungsstufe durchaus die Grundlage für spätere Entwicklungen des Denkens. Ihre Entwicklung soll durch die Schule gefördert und nicht gestört werden. Sie sind eine wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung eines differenzierten und logisch einwandfreien Denkens.
Die in einigen Kreisen von Piaget-Anhängern vertretene These, dass die logischen Operationen bzw. der Mengenbegriff nur als Grundlage zur Entwicklung des Zahlbegriffs anzuschauen und zu verwenden sei, beruht auf einem verständlichen Abwehrreflex gegenüber den oft behavioristisch oder gar nicht begründeten Mengenspielen. Die These ist aber trotzdem falsch.

Problemstellungen zur Zahldarstellung und zu den schriftlichen Operationen

Piaget hat sich bei seinen Experimenten, soweit sie auf die Mathematik und die Physik ausgerichtet sind, an einem bestimmten Stand der beiden Wissenschaften orientiert. Die grundlegenden Vorstellungen betreffen dabei in ihren wichtigsten Zügen etwa die bisher beschriebenen. Die Mathematik hat sich indessen seither zwei neue Teilgebiete zu eigen gemacht. Einerseits handelt es sich um kybernetische Fragestellungen, andererseits um die Untersuchung von Prozessabläufen.

Bei den kybernetischen Fragen geht es darum, zu untersuchen, wie man überhaupt mathematische Ideen darstellen und mitteilen könne. Die Theorien über die formalen Sprachen, also auch das Problem der Algebraisierung und im praktischen Bereich der Handhabung von Taschenrechnern, gehören dazu. In der Grundschule stellt die Zahlschreibweise in einem Stellenwertsystem (dezimal oder nichtdezimal) das wichtigste Problem aus diesem Bereich dar, obwohl auch die Darstellung von Grössen ganz bestimmte interessante Aspekte bietet. Man denke dabei etwa an die Formen der Zeitangabe in analoger oder digitaler Form, wobei bei digitalen Angaben wie 12.15 Uhr, 12^{15} oder 1:04,24 min ganz verschiedene grafische Elemente als Bedeutungsträger verwendet werden.

Die Fachdidaktiker haben im Zusammenhang mit der Stellenwertdarstellung, mit der Methode der mehrfachen Bündelung einer Menge und der Protokollierung dieser Bündel eine Möglichkeit entwickelt, die Probleme auf der Handlungsebene anzugehen. Z. Dienes hat mit seinen Multibasen ein entsprechendes Material geliefert.

Auch wenn zum Thema der Stellenwertschreibweise kaum klinische Untersuchungen vorliegen, so können doch auch in diesem Problembereich sehr fruchtbare Unterrichtssituationen gefunden werden. Allerdings lässt sich im Bereich der Praxis des Volksschulunterrichts sehr gut beobachten, wie schwer es Erwachsenen fallen kann, die verschiedenen Stufen des Verständnisses beim Kind überhaupt wahrzunehmen. Erwachsene orientieren sich an formalen Regeln, die beim Umgang mit nichtdezimalen Zahlsystemen gelten. Diese Sicht verbaut vielen Lehrern den Zugang zu den konkreten Operationen, welche von den Schülern ohne weiteres ausgeführt und verstanden werden. Auf diesen Zustand verweist auch die Tatsache, dass vielfach geradezu groteske Fehlurteile über den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben in nichtdezimalen Zahlsystemen gefällt werden. Hier müsste man vermehrt die von Piaget als «konkrete» bezeichneten Operationen der in diesem Stadium befindlichen Kinder fördern (und kennenlernen!).

Der zweite neuere Bereich ist derjenige der Prozessabläufe. Einerseits bestehen gegenüber den neu erarbeiteten Darstellungsformen wie der Operatorenschreibweise und den Flussdiagrammen starke emotionelle Widerstände, weil das «Denken in Prozessabläufen» aus der Informatik oder, wie man häufig hört, aus dem Computerfach stammt. Wenn man die Probleme dem Erarbeiten der schriftlichen Operationen etwas näher betrachtet, wird klar, dass dies schon immer Prozessabläufe waren und dass sie auch in der Schule als solche behandelt werden mussten. Die Schwierigkeiten lassen sich am Beispiel des Begriffs des Normalverfahrens (schriftliches Rechnen) illustrieren. Es gibt verschiedene Varianten, zwei grössere Zahlen schriftlich zu addieren. Ausgehend von den konkreten Operationen lässt sich sehr schön zeigen, dass das übliche Normalverfahren eine Sonderstellung einnimmt, weil es ein optimales Verfahren ist. Im Unterricht muss es darum gehen, diesen Begriff «optimal» an den Schüler heranzutragen. Auf der konkret operatorischen Basis fällt dies nicht schwer. Der Schüler erfährt dabei, welcher Unterschied zwischen einer Gesetzmässigkeit und einer wegen ihrer «Optimalität» als «normal» gesetzten Konvention besteht. Trotz solcher weitreichender Aspekte konnte man kürzlich in einer nicht zur Veröffentlichung bestimmten Prüfungsarbeit lesen, dass die Begriffe «Algorithmus» (Rechenprozess oder ganz allgemein Prozessablauf) und «Normalverfahren» kurzerhand gleichgesetzt wurden, ohne dass sich gegen diese Aussage Widerspruch erhoben hätte.

Dieser Sachverhalt gibt Anlass zu einigen Bemerkungen über die *Probleme der interdisziplinären Zusammenarbeit* zwischen der lernpsychologischen Schule von Piaget und den Fachmathematikern im didaktischen Bereich: Auf die Probleme der verschiedenen Terminologie wurde bereits hingewiesen. Auf beiden Seiten bestehen zudem Widerstände gegenüber einer «Verwässerung der jeweilen reinen Lehre».

Zuerst die Seite der Psychologen: Piaget hat von seinen Mitarbeitern sehr vielfältige Untersuchungen im Bereich der mathematischen Vorstellungen durchführen lassen. Aus diesen

Ergebnissen die Stadientheorie abzuleiten, stellt eine ungeheure intuitive Leistung dar. Es ist aber falsch zu glauben, dass aus dieser Theorie ein einziger allgemeingültiger Lernablauf für alle Kinder abzuleiten wäre. Vielmehr bestehen für die individuelle Abfolge der Art der Schritte, in denen sich die Erkenntnisse entwickeln, viele verschiedene Möglichkeiten, ohne dass diese Vielfalt im Widerspruch zur Stadientheorie stehen müsste. Aus einer zu engen Interpretation der Stadientheorie erwachsen Widerstände, welche es erschweren, dass die Untersuchungen im Sinne Piagets auch in bezug auf neuere Analysen der Lehrstoffe und die feineren Zerlegungen in mögliche Lernschritte, welche die Mathematik-Didaktik hervorgebracht hat, wirklich durchgeführt werden. Das zitierte Beispiel über die Normalverfahren gehört in diesen Zusammenhang. Wichtige Aspekte der Feinstruktur mathematischer Zusammenhänge entfallen, wenn man sich, wie dies einige Piaget-Schüler tun, auf allzuweit zurückliegende Darstellungen in Schulbüchern stützt.
Von Seiten der Mathematiker ergeben sich andere Widerstände. Die Lehrstoffe und deren Präsentationen für die Volksschule (und auch für die Mittelschule) werden ausschliesslich mit den Kriterien für die Wissenschaftlichkeit mathematischer Abhandlungen beurteilt. Die Möglichkeit und der Wert mathematischer Erkenntnisse wird nach dem Grad ihrer Formalisierung, an ihrem Abstraktionsniveau gemessen. Interessant ist dabei, dass nicht nur die Mathematiker solche Bewertungen vornehmen. Auch in der Oberstufe der Volksschule, vereinzelt sogar in der Mittelstufe, trifft man auf ähnliche Argumente. Die von Piaget als wesentlich hervorgehobene Möglichkeit, auf der Handlungsebene gültige Erkenntnisse zu gewinnen, wird teils bestritten, teils als kindliche Spielerei abgetan. Piagets Verdienst besteht hier unter anderem darin, dass er den natürlichen Weg zur abstrakten Erkenntnis erkannt und für die Didaktik salonfähig gemacht hat.

Zusammenfassung: Die Stadientheorie Piagets, entstanden aus seiner Methode der Beobachtung und Befragung der Kinder, weist die Existenz verschiedener Verständnisebenen nach. Sie zeigt im besonderen die Entstehung mathematischer Begriffe und das Erkennen ihrer Zusammenhänge aus den konkreten Handlungsvorgängen.
In methodischer Hinsicht verlangt Piaget eine ständige Orientierung an den Reaktionen der Schüler. Voraussetzung für dieses ständige Eingehen und Reagieren auf die Schüler ist eine differenzierte Beobachtung der Lernvorgänge.
Mathematikunterricht im Sinne Piagets lässt sich nicht durch Eigenschaften des Lehrstoffs, sondern durch das Verhalten des Lehrers im Unterricht und die Form der sozialen Wechselwirkungen zwischen Lehrer und Schülern bzw. zwischen Schülern unter sich definieren.