

Stern-Dreieck-Umwandlung mit Quellen

Autor(en): **Herzog, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins :
gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen
Elektrotechnischen Vereins (SEV) und des Verbandes
Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)**

Band (Jahr): **61 (1970)**

Heft 23

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-915999>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Stern-Dreieck-Umwandlung mit Quellen ¹⁾

Von W. Herzog, Mainz

1167-1184

621.372.57: 621.316.765.1

Ersatzbilder von Elektronenröhren und Transistoren in II- oder T-Form enthalten eine oder mehrere Quellen. Zur Umwandlung zusammengesetzter aktiver Schaltungen, z. B. aktiver Filter, können Stern-Dreieck-Beziehungen dienen. Es werden daher die Umwandlungsbeziehungen Stern-Dreieck mit Quellen in jedem Zweig angegeben. Als Beispiel werden bekannte Transistor-Ersatzschaltbilder abgeleitet.

Les circuits équivalents de tubes électroniques ou de transistors en forme H ou T renferment une ou plusieurs sources. Les relations étoile-triangle peuvent servir à la conversion de circuits actifs composés, p. ex. de filtres actifs. On indique de ce fait les relations de conversion étoile-triangle avec des sources dans chaque branche, ainsi, qu'à titre d'exemple, des circuits équivalents connus de transistors.

1. Quellbeziehungen

In Fig. 1 ist die bekannte Umwandlung einer Spannungs- in eine Stromquelle gezeigt. Die abzulesenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= R_i I + U \\ R_i (I_k - I) &= U \\ R_i I_k &= R_i I + U \end{aligned} \right\} (1)$$

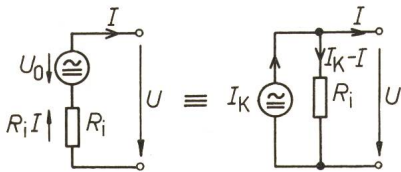


Fig. 1

ergeben:

$$U_0 = R_i I_k \quad (2)$$

wobei U_0 als Leerlaufspannung und I_k als Kurzschlußstrom bezeichnet werden. R_i ist der Innen- oder Quellwiderstand. Für $I = 0$ lässt sich Gl. (2) direkt entnehmen.

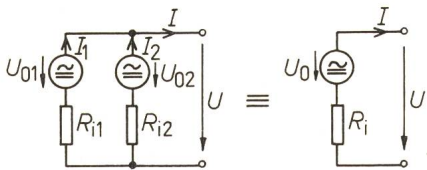


Fig. 2

Fig. 2 gibt die Parallelschaltung zweier Quellen und ihr Ersatzbild wieder. Die Berechnung kann entsprechend Fig. 1 erfolgen. Einfacher ist die Umwandlung in Stromquellen nach Fig. 1, wie sie Fig. 3 wiedergibt. Das Ergebnis lautet:

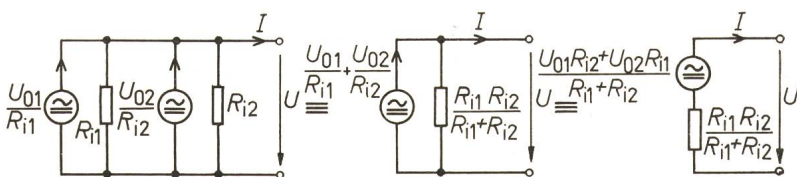


Fig. 3

¹⁾ Mitteilung des Instituts für Elektrotechnik der Universität Mainz.

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{U_{01} R_{i2} + U_{02} R_{i1}}{R_{i1} + R_{i2}} \\ R_i &= \frac{R_{i1} R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}} \end{aligned} \right\} (3)$$

In gleicher Weise erhält man für die Reihenschaltung von zwei Stromquellen und deren Ersatzquelle entsprechend Fig. 4:

$$\left. \begin{aligned} I_k &= \frac{I_{k1} R_{i1} + I_{k2} R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}} \\ R_i &= R_{i1} + R_{i2} \end{aligned} \right\} (4)$$

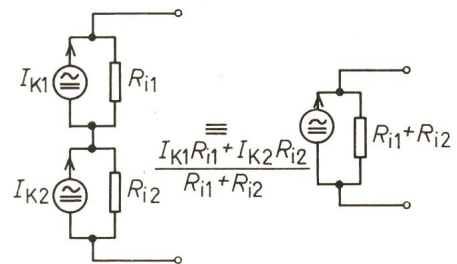


Fig. 4

Mit Innenleitwerten anstatt der Innenwiderstände lassen sich die Gln. (4) durch eine Dualbetrachtung den Gln. (3) entnehmen.

2. Die Stern-Dreieck-Beziehung mit Spannungsquellen

Fig. 5 gibt die zu vergleichenden Anordnungen wieder. Alle Quellen — beim Dreieck U_{e12} , U_{e23} und U_{e31} und beim Stern U_{e1} , U_{e2} und U_{e3} — sind Spannungsquellen. Zur Berechnung kann man die Spannungen U_{12} , U_{23} und U_{31} , die als Eingangsspannungen bezeichnet werden, bei beiden Schaltungen ermitteln und die Formeln vergleichen. Einfacher ist der Vergleich, wenn man einen der drei Ströme I_1 , I_2 oder I_3 (Eingangsströme genannt) gleich null setzt (Leerlauf) oder zwei Ströme verbindet (Kurzschluss).

Trotzdem sei zunächst die allgemeine Berechnung durchgeführt. Die Gründe ergeben sich im Laufe der Berechnung.

Fig. 5a liefert die leicht ablesbaren Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= D_3 I_{12} + U_{e12} \\ U_{23} &= D_1 (I_{12} + I_2) + U_{e23} \\ U_{31} &= D_2 (I_{12} + I_2 + I_3) + U_{31} \end{aligned} \right\} (5)$$

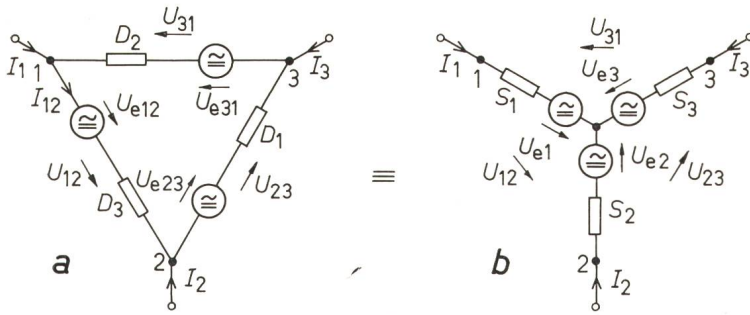


Fig. 5

Ausserdem gilt:

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0 \quad (6)$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (7)$$

lauf ändern sich die Ströme und Spannungen, wie man z. B. in Fig. 6 sehen kann. Der dortige Strom I_1' entspricht natürlich dem Strom I_{12} für $I_3 = 0$ ($I_2 = -I_1$), keineswegs aber dem Strom I_1 . Entsprechendes gilt für die Spannungen. Diese Grössen erhalten daher in Fig. 6 einen Strich.

Für die gestrichenen Grössen gelten daher die Gln. (6) und (7) nicht. Nur der Vergleich jeder einzelnen Gleichung ist gegeben.

Fig. 6 zeigt die Formeln für U'_{12} bei $I_3 = 0$. Hierbei sind in Fig. 6a die Spannungen U'_{23} und U'_{31} in Serie geschaltet und die entstehende Parallelschaltung nach Fig. 2 zu einer Quelle vereinfacht (Fig. 6b). Fig. 6c ist die Sternanordnung für $I_3 = 0$, während Fig. 6d die Vergleichsanordnung zu Fig. 6b ist.

Man kann ablesen:

$$U'_{12} = I_1' \frac{D_3(D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e12}(D_1 + D_2) - (U_{e23} + U_{e31})D_3}{D_1 + D_2 + D_3} = I_1'(S_1 + S_2) + U_{e1} - U_{e2} \quad (12)$$

Die Summierung der Gln. (5) ergibt mit den Gln. (6) und (7) eine Beziehung für den Strom I_{12} :

Durch zyklische Vertauschung gewinnt man die beiden übrigen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} U'_{23} &= I_2' \frac{D_1(D_2 + D_3)}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e23}(D_2 + D_3) - (U_{e31} + U_{e12})D_1}{D_1 + D_2 + D_3} = I_2'(S_2 + S_3) + U_{e2} - U_{e3} \\ U'_{31} &= I_3' \frac{D_2(D_3 + D_1)}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e31}(D_3 + D_1) - (U_{e12} + U_{e23})D_2}{D_1 + D_2 + D_3} = I_3'(S_3 + S_1) + U_{e3} - U_{e1} \end{aligned} \right\} (13)$$

$$I_{12} = \frac{D_2 I_1 - D_1 I_2}{D_1 + D_2 + D_3} - \frac{U_{e12} + U_{e23} + U_{e31}}{D_1 + D_2 + D_3} \quad 8))$$

mit:

$$U'_{12} + U'_{23} + U'_{31} \neq 0 \quad (14)$$

Eingesetzt in die Gln. (5) folgt:

Subtrahiert man von der Gl. (12) die entsprechenden Gln. (9) und (10), so ergibt sich:

$$U'_{12} - U_{12} = \frac{D_3}{D_1 + D_2 + D_3} [I_1'(D_1 + D_2) - I_1 D_2 + I_2 D_1] = I_1'(S_1 + S_2) - I_1 S_1 + I_2 S_2 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} U_{12} &= D_3 \frac{D_2 I_1 - D_1 I_2}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e12}(D_1 + D_2) - (U_{e23} + U_{e31})D_3}{D_1 + D_2 + D_3} \\ U_{23} &= D_1 \frac{D_3 I_2 - D_2 I_3}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e23}(D_2 + D_3) - (U_{e31} + U_{e12})D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \\ U_{31} &= D_2 \frac{D_1 I_3 - D_3 I_1}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e31}(D_3 + D_1) - (U_{e12} + U_{e23})D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \quad (9)$$

Dem Stern in Fig. 5b entnimmt man:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= S_1 I_1 - S_2 I_2 + U_{e1} - U_{e2} \\ U_{23} &= S_2 I_2 - S_3 I_3 + U_{e2} - U_{e3} \\ U_{31} &= S_3 I_3 - S_1 I_1 + U_{e3} - U_{e1} \end{aligned} \right\} (10)$$

Der Vergleich der Beziehungen (9) und (10) liefert:

Nimmt man an, dass trotz des Leerlaufes ($I_3 = 0$) der Strom I_1 seinen Wert nicht ändert, also $I_1' = I_1$ ist, so wird aus Gl. (15):

$$\frac{D_3 D_1}{D_1 + D_2 + D_3} (I_1 + I_2) = S_2 (I_1 + I_2) \quad (16)$$

Damit wäre eine wesentliche Einschränkung der ganzen Betrachtung eingeführt, denn die Gln. (9) und (10) sowie (12) und (13) würden in einen Widerstands- und einen Quellenanteil aufgespalten. Für den Widerstandsanteil würde [s. Gl. (16)] die bekannte Stern-Dreieck-Transformation für passive Schaltungen gelten.

$$\left. \begin{aligned} D_3 \frac{D_2 I_1 - D_1 I_2}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e12}(D_1 + D_2) - (U_{e23} + U_{e31})D_3}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_1 I_1 - S_2 I_2 + U_{e1} - U_{e2} \\ D_1 \frac{D_3 I_2 - D_2 I_3}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e23}(D_2 + D_3) - (U_{e31} + U_{e12})D_1}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_2 I_2 - S_3 I_3 + U_{e2} - U_{e3} \\ D_2 \frac{D_1 I_3 - D_3 I_1}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e31}(D_3 + D_1) - (U_{e12} + U_{e23})D_2}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_3 I_3 - S_1 I_1 + U_{e3} - U_{e1} \end{aligned} \right\} (11)$$

Bei dem anderen Verfahren wird die Rechnung durch Umwandlung der Schaltungen ersetzt. Bei Kurzschluss oder Leer-

Nun können aber die Quellspannungen den Strömen I_1 , I_2 und I_3 oder Kombinationen derselben proportional sein.

Beispielsweise wird beim Transistor (T-Er-satzbild) die Einspeisung dem Emitt-erstrom proportional gesetzt, um das phys-ikalische Ersatzbild anzugleichen.

In solchen Fällen müssen die Formeln (11), (12) und (13) entsprechend ergänzt werden.

Nimmt man an, dass eine solche Pro-portionalität nicht besteht [in Übereinstim-mung mit dem zu Gl. (16) Gesagten]:

$$\left. \begin{aligned} U_{eij} &\sim I_i & i, j = 1, 2, 3 & \quad i \neq j \\ U_{ei} &\sim I_i & i = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} (17)$$

so kann man die Formeln (12) und (13) aufteilen in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_3(D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_1 + S_2 \\ \frac{D_1(D_2 + D_3)}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_2 + S_3 \\ \frac{D_2(D_3 + D_1)}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_3 + S_1 \end{aligned} \right\} (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{e12}(D_1 + D_2) - (U_{e23} + U_{e31})D_3}{D_1 + D_2 + D_3} &= U_{e1} - U_{e2} \\ \frac{U_{e23}(D_2 + D_3) - (U_{e31} + U_{e12})D_1}{D_1 + D_2 + D_3} &= U_{e2} - U_{e3} \\ \frac{U_{e31}(D_3 + D_1) - (U_{e12} + U_{e23})D_2}{D_1 + D_2 + D_3} &= U_{e3} - U_{e1} \end{aligned} \right\} (19)$$

Aus den Beziehungen (18) folgen die Stern-Dreieck-Be-ziehungen für passive Schaltungen:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{D_2 D_3}{D_1 + D_2 + D_3} \\ S_2 &= \frac{D_3 D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \\ S_3 &= \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \right\} (20)$$

und nach den Dreieckseiten aufgelöst:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_1} \\ D_2 &= \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2} \\ D_3 &= \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_3} \end{aligned} \right\} (21)$$

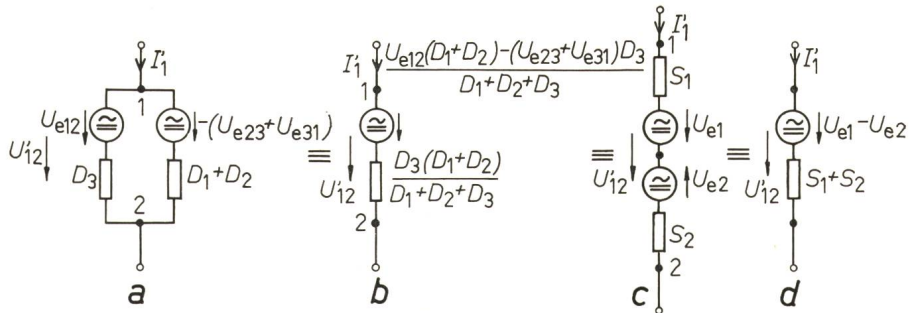


Fig. 6

Mit den Gln. (21) lassen sich die passiven Dreieckelemente in den Gln. (19) durch Sternelemente wie folgt ersetzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{e12} S_3 (S_1 + S_2) - (U_{e23} + U_{e31}) S_1 S_2}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3} &= U_{e1} - U_{e2} \\ \frac{U_{e23} S_1 (S_2 + S_3) - (U_{e31} + U_{e12}) S_2 S_3}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3} &= U_{e2} - U_{e3} \\ \frac{U_{e31} S_2 (S_3 + S_1) - (U_{e12} + U_{e23}) S_3 S_1}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3} &= U_{e3} - U_{e1} \end{aligned} \right\} (22)$$

Für den Kurzschlussfall $U_{23} = 0$ erhält man aus dem Dreieck in Fig. 5a die Anordnungen Fig. 7a und b und aus dem Stern in Fig. 5b die Anordnungen Fig. 7c, d und e.

Der Vergleich von Fig. 7b mit Fig. 7e ergibt:

$$\begin{aligned} U_{12}'' &= I_1'' \frac{D_2 D_3}{D_2 + D_3} + \frac{U_{e12} D_2 - U_{e31} D_3}{D_2 + D_3} = \\ &= I_1'' \left(S_1 + \frac{S_2 S_3}{S_2 + S_3} \right) + U_{e1} - \frac{U_{e2} S_3 + U_{e3} S_2}{S_2 + S_3} \end{aligned} \quad (23)$$

und durch zyklische Vertauschung mit $U_{31} = 0$ bzw. $U_{12} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} U_{23}'' &= I_2'' \frac{D_3 D_1}{D_3 + D_1} + \frac{U_{e23} D_3 - U_{e12} D_1}{D_3 + D_1} = \\ &= I_2'' \left(S_2 + \frac{S_3 S_1}{S_3 + S_1} \right) + U_{e2} - \frac{U_{e3} S_1 + U_{e1} S_3}{S_3 + S_1} \\ U_{31}'' &= I_3'' \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} + \frac{U_{e31} D_1 - U_{e23} D_2}{D_1 + D_2} = \\ &= I_3'' \left(S_3 + \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \right) + U_{e3} - \frac{U_{e1} S_2 + U_{e2} S_1}{S_1 + S_2} \end{aligned} \right\} (24)$$

Auch hier ist eine Vereinfachung nur mit den Bedingungen (17) möglich. Der Vergleich der Stromfaktoren führt zu den Gln. (21). Für die Spannungen folgt:

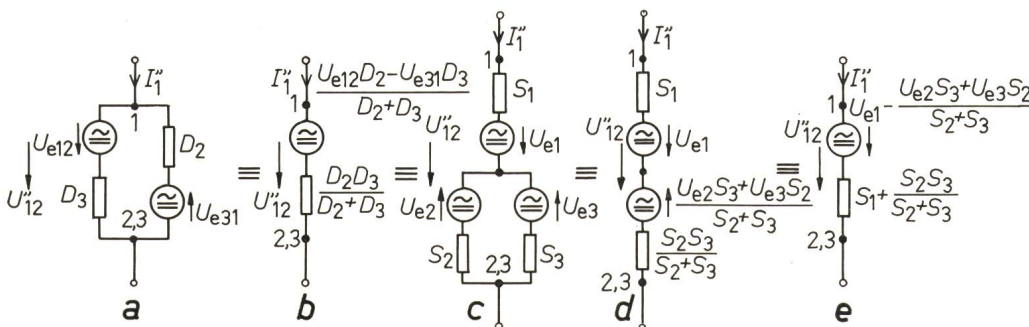


Fig. 7

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{e12} D_2 - U_{e31} D_3}{D_2 + D_3} &= \\ &= U_{e1} - \frac{U_{e2} S_3 + U_{e3} S_2}{S_2 + S_3} \\ \frac{U_{e23} D_3 - U_{e12} D_1}{D_3 + D_1} &= \\ &= U_{e2} - \frac{U_{e3} S_1 + U_{e1} S_3}{S_3 + S_1} \\ \frac{U_{e31} D_1 - U_{e23} D_2}{D_1 + D_2} &= \\ &= U_{e3} - \frac{U_{e1} S_2 + U_{e2} S_1}{S_1 + S_2} \end{aligned} \right\} (25)$$

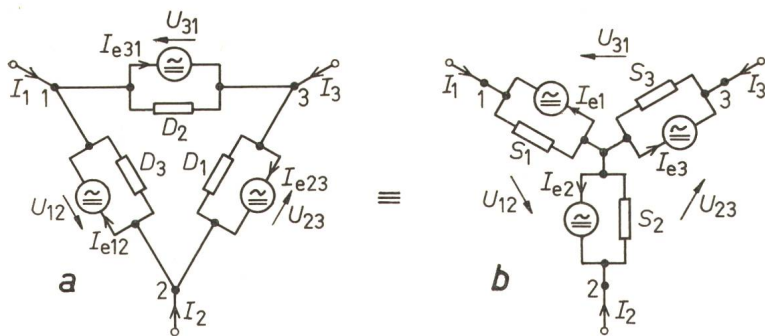


Fig. 8

Ersetzt man die passiven Dreieckelemente nach den Gln. (21) durch die Sternelemente, so ändern sich die Gln. (25) in:

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} S_3 - U_{e31} S_2 &= (U_{e1} - U_{e2}) S_3 - (U_{e3} - U_{e1}) S_2 \\ U_{e23} S_1 - U_{e12} S_3 &= (U_{e2} - U_{e3}) S_1 - (U_{e1} - U_{e2}) S_3 \\ U_{e31} S_2 - U_{e23} S_1 &= (U_{e3} - U_{e1}) S_2 - (U_{e2} - U_{e3}) S_1 \end{aligned} \right\} (26)$$

Falls die passiven Sterngrößen keine Beziehungen zu den Spannungen haben:

$$S_i \neq F(U_{eij}, U_{ei}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (27)$$

so lassen sich die Gln. (26) aufteilen in:

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} &= U_{e1} - U_{e2} \\ U_{e23} &= U_{e2} - U_{e3} \\ U_{e31} &= U_{e3} - U_{e1} \end{aligned} \right\} (28)$$

3. Die Stern-Dreieck-Beziehungen mit Stromquellen

Fig. 8 zeigt den Stern-Dreieck-Vergleich mit Stromquellen. Die Pfeilrichtungen sind entsprechend Fig. 1 gewählt.

$$U''_{12} = I_1'' \frac{D_2 D_3}{D_2 + D_3} + (I_{e12} - I_{e31}) \frac{D_2 D_3}{D_2 + D_3} = I_1'' \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2 + S_3} + \frac{I_{e1} S_1 (S_2 + S_3) - (I_{e2} + I_{e3}) S_2 S_3}{S_2 + S_3} \quad (34)$$

Für den Leerlauf ($I_3 = 0$) ist in Fig. 9a, b, c, e und f die zum Vergleich erforderliche Vereinfachung mittels Stromquellen

$$\left. \begin{aligned} U''_{23} &= I_2'' \frac{D_3 D_1}{D_3 + D_1} + (I_{e23} - I_{e12}) \frac{D_3 D_1}{D_3 + D_1} = I_2'' \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_3 + S_1} + \frac{I_{e2} S_2 (S_3 + S_1) - (I_{e3} + I_{e1}) S_3 S_1}{S_3 + S_1} \\ U''_{31} &= I_3'' \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} + (I_{e31} - I_{e23}) \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} = I_3'' \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_1 + S_2} + \frac{I_{e3} S_3 (S_1 + S_2) - (I_{e1} + I_{e2}) S_1 S_2}{S_1 + S_2} \end{aligned} \right\} (35)$$

durchgeführt. Bessere Übersicht erhält man, wenn man die Stromquellen nach Fig. 1 in Spannungsquellen verwandelt (Fig. 9d und g). Eingangsströme und Eingangsspannungen werden wieder mit einem Strich versehen, wobei die gestrichelten Größen von denen des Abschnitts 2 verschieden sein können.

Es ergibt sich durch Vergleich

$$U'_{12} = I_1' \frac{D_3 (D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{I_{e12} D_3 (D_1 + D_2) - I_{e23} D_1 D_3 - I_{e31} D_2 D_3}{D_1 + D_2 + D_3} = I_1' (S_1 + S_2) + I_{e1} S_1 - I_{e2} S_2 \quad (29)$$

und durch zyklische Vertauschung mit $I_1 = 0$ und $I_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} U'_{23} &= I_2' \frac{D_1 (D_2 + D_3)}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{I_{e23} D_1 (D_2 + D_3) - I_{e31} D_2 D_1 - I_{e12} D_3 D_1}{D_1 + D_2 + D_3} = I_2' (S_2 + S_3) + I_{e2} S_2 - I_{e3} S_3 \\ U'_{31} &= I_3' \frac{D_2 (D_3 + D_1)}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{I_{e31} D_2 (D_3 + D_1) - I_{e12} D_3 D_2 - I_{e23} D_1 D_2}{D_1 + D_2 + D_3} = I_3' (S_3 + S_1) + I_{e3} S_3 - I_{e1} S_1 \end{aligned} \right\} (30)$$

Mit den Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} I_{eij} &\sim I_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \\ I_{ei} &\sim I_i \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} (31)$$

oder den Formeln (21) zerfallen die Gln. (29) und (30) in die Gln. (18) und in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_{e12} D_3 (D_1 + D_2) - I_{e23} D_1 D_3 - I_{e31} D_2 D_3}{D_1 + D_2 + D_3} &= I_{e1} S_1 - I_{e2} S_2 \\ \frac{I_{e23} D_1 (D_2 + D_3) - I_{e31} D_2 D_1 - I_{e12} D_3 D_1}{D_1 + D_2 + D_3} &= I_{e2} S_2 - I_{e3} S_3 \\ \frac{I_{e31} D_2 (D_3 + D_1) - I_{e12} D_3 D_2 - I_{e23} D_1 D_2}{D_1 + D_2 + D_3} &= I_{e3} S_3 - I_{e1} S_1 \end{aligned} \right\} (32)$$

Ersetzt man die passiven Dreieckgrößen durch die Sterngrößen, so ergibt sich aus den Gln. (32):

$$\left. \begin{aligned} (I_{e12} - I_{e31}) S_1 - (I_{e23} - I_{e12}) S_2 &= I_{e1} S_1 - I_{e2} S_2 \\ (I_{e23} - I_{e12}) S_2 - (I_{e31} - I_{e23}) S_3 &= I_{e2} S_2 - I_{e3} S_3 \\ (I_{e31} - I_{e23}) S_3 - (I_{e12} - I_{e31}) S_1 &= I_{e3} S_3 - I_{e1} S_1 \end{aligned} \right\} (33)$$

Mit den Gln. (33) können die Gln. (26) verglichen werden.

Der Kurzschlussfall $U_{23} = 0$ wird in Fig. 10 aus Fig. 8 entwickelt. Beim Dreieck lässt sich in Fig. 10a die Reduzierung auf eine Stromquelle, die in Fig. 10b in eine Spannungsquelle umgewandelt wird, leicht vornehmen. Für die Umwandlung des Sterns in Fig. 10c bis e benötigt man das Ersatzbild nach Fig. 4. Aus den Fig. 10b und e liest man ab, wobei für die gestrichelten Größen das zu Fig. 9 Gesagte gilt:

Die beiden anderen Möglichkeiten liefert die zyklische Vertauschung zu:

Das Ersetzen der Dreieckgrößen nach den Gln. (21) ergibt aus Gl. (34):

$$\begin{aligned} I_{e12} - I_{e31} &= I_{e1} \frac{S_1 (S_3 + S_2)}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3} - \\ &\quad - (I_{e2} + I_{e3}) \frac{S_2 S_3}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3} \end{aligned} \quad (36)$$

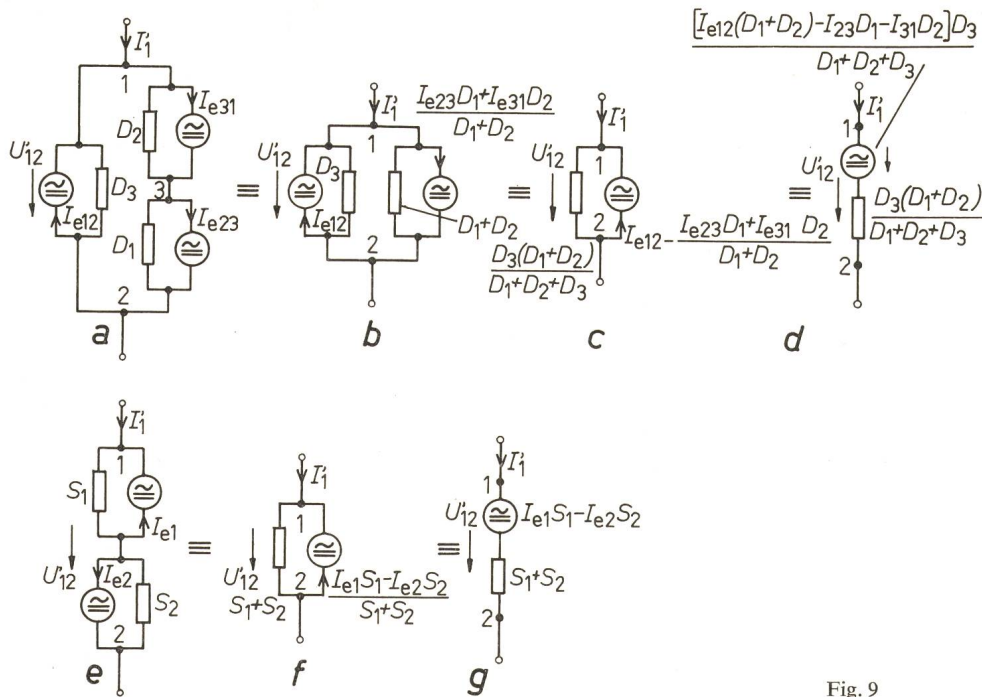


Fig. 9

oder das Ersetzen der Sterngrößen nach den Gln. (20):

$$I_{e12} - I_{e31} = I_{e1} \frac{D_2 + D_3}{D_1 + D_2 + D_3} - (I_{e2} + I_{e3}) \frac{D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (37)$$

Zyklische Vertauschung bringt die beiden übrigen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} I_{e23} - I_{e12} &= I_{e2} \frac{D_3 + D_1}{D_1 + D_2 + D_3} - (I_{e3} + I_{e1}) \frac{D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \\ I_{e31} - I_{e23} &= I_{e3} \frac{D_1 + D_2}{D_1 + D_2 + D_3} - (I_{e1} + I_{e2}) \frac{D_3}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \right\} (38)$$

4. Die Beziehungen zwischen Stern mit Spannungsquellen und Dreieck mit Stromquellen

Da bei Transistorschaltungen als Ersatzschaltung T-Schaltungen mit Spannungsquelle und Π -Schaltungen mit Stromquelle benutzt werden, sollen im folgenden auch eine Dreieckschaltung mit Stromquellen und eine Sternschaltung mit Spannungsquellen verglichen werden.

Man kann die bisherigen Formeln benutzen, wenn man einer der Anordnungen die entgegengesetzte Quellenart gibt. Die Dreieckanordnung in Fig. 11a wird in Fig. 11b mit Spannungsquellen versehen und mit der Sternanordnung in Fig. 11c verglichen. Damit gelten die Gleichungen, die für die Anordnung in Fig. 5 abgeleitet wurden auch hier, wenn man in denselben die Quellspannungen U_{e12} , U_{e23} und U_{e31} in nachstehender Weise ersetzt:

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} &= I_{e12} D_3 \\ U_{e23} &= I_{e23} D_1 \\ U_{e31} &= I_{e31} D_2 \end{aligned} \right\} (39)$$

5. Die Stern-Dreieck-Beziehungen mit Quellen ohne Widerstände

Wenn es praktisch auch keine Quellen ohne Innenwiderstände gibt, so können sie doch vernachlässigbar klein sein. Der Vergleich der Quellen nach Fig. 12 liefert die abzulesenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} &= U_{e1} - U_{e2} \\ U_{e23} &= U_{e2} - U_{e3} \\ U_{e31} &= U_{e3} - U_{e1} \end{aligned} \right\} (40)$$

Schaltet man die Anordnungen in Fig. 12 parallel zu den entsprechenden Widerstandsarrangements, so ergeben sich nicht die Anordnungen gemäss Fig. 8, da die beiden Sternpunkte nicht zusammenfallen. Auf die Herleitung der durch Matrizenaddition leicht erhaltbaren Formeln sei hier verzichtet.

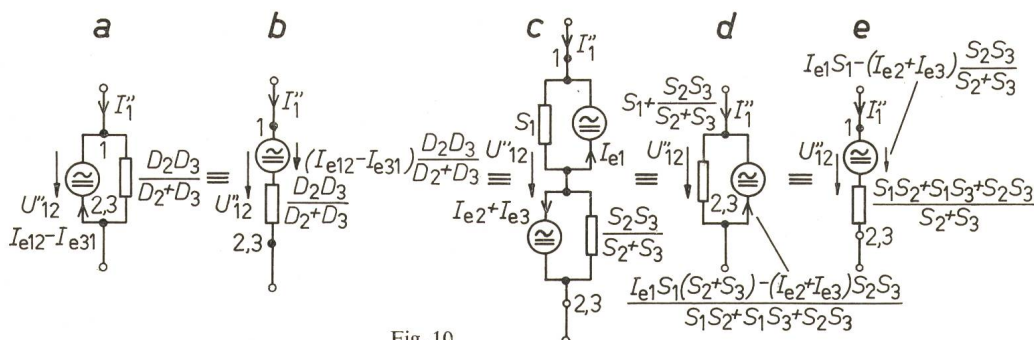


Fig. 10

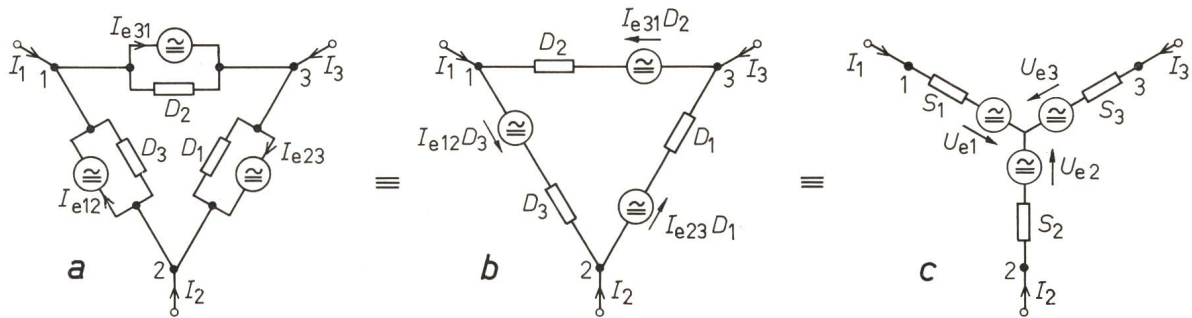


Fig. 11

6. Sich aufhebende Quellen

Schliesst man in Fig. 5a die Quellen im Dreieck kurz

$$U_{e12} = U_{e23} = U_{e31} = 0 \quad (41)$$

so wird aus der ersten Gl. (11):

$$D_3 \frac{D_2 I_1 - D_1 I_2}{D_1 + D_2 + D_3} = S_1 I_1 - S_2 I_2 + U_{e1} - U_{e2} \quad (42)$$

Die Quellen im Stern verschwinden also nicht.

Sind die Spannungen der Quellen des Sterns unabhängig von den Eingangsströmen, so liefert Gl. (42) mit den Gln. (11):

$$U_{e1} = U_{e2} = U_{e3} \quad (43)$$

Alle Sternquellen heben sich auf.

In gleicher Weise folgt bei Nullsetzung der Sternquellen

$$U_{e1} = U_{e2} = U_{e3} = 0 \quad (44)$$

aus den Gln. (25), wobei die Unabhängigkeit der Quellen von den Eingangsströmen bereits enthalten ist:

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} D_2 &= U_{e31} D_3 \\ U_{e23} D_3 &= U_{e12} D_1 \\ U_{e31} D_1 &= U_{e23} D_2 \end{aligned} \right\} (45)$$

Die Gln. (45) ergeben:

$$\frac{U_{e12}}{D_3} = \frac{U_{e23}}{D_1} = \frac{U_{e31}}{D_2} = \bar{I} \quad (46)$$

Es fliesst also ein zusätzlicher Strom \bar{I} innerhalb des Dreiecks.

Für die Anordnung in Fig. 8 entnimmt man für

$$I_{e12} = I_{e23} = I_{e31} = 0 \quad (47)$$

der Gl. (29):

$$I_1' \frac{D_3 (D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} = I_1' (S_1 + S_2) + I_{e1} S_1 - I_{e2} S_2 \quad (48)$$

mit entsprechenden Gleichungen aus den Gln. (30).

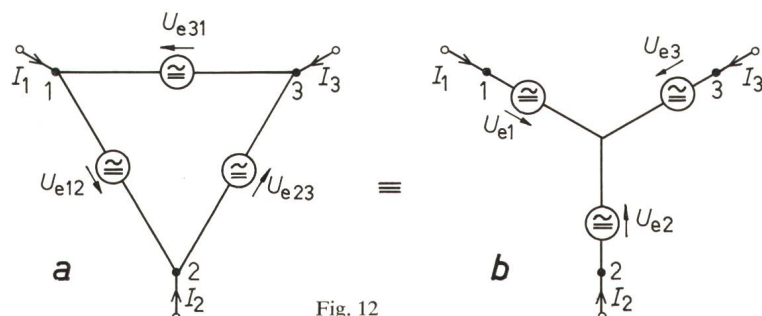


Fig. 12

Die Quellen im Stern verschwinden nicht. Sind sie unabhängig von den Strömen I_1, I_2 und I_3 und entsprechend von I_1', I_2' und I_3' , so gilt nach Gl. (48) und weiteren den Gln. (30) zu entnehmenden Gleichungen oder durch zyklische Vertauschung

$$I_{e1} S_1 = I_{e2} S_2 = I_{e3} S_3 = \bar{U} \quad (49)$$

Die durch die Sternwiderstände fliessenden Ströme erzeugen dort die zusätzlichen gleichen Spannungen \bar{U} , deren Summe null ist.

Setzt man in der Anordnung in Fig. 8

$$I_{e1} = I_{e2} = I_{e3} = 0 \quad (50)$$

so liefert Gl. (34):

$$\begin{aligned} I_1'' \frac{D_2 D_3}{D_2 + D_3} + (I_{e12} - I_{e31}) \frac{D_2 D_3}{D_2 + D_3} &= \\ = I_1'' \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2 + S_3} \end{aligned} \quad (51)$$

Unter gleichen Voraussetzungen ergibt sich aus Gl. (51) und den durch zyklische Vertauschung gewonnenen Gleichungen:

$$I_{e12} = I_{e23} = I_{e31} = \bar{I} \quad (52)$$

Es fliesst also im Dreieck von Fig. 8 ein zusätzlicher Strom \bar{I} .

7. Stern-Dreieck-Beziehungen mit weniger als drei Quellen

In dem Dreieck von Fig. 5 soll nur eine Quelle verbleiben. Ausserdem soll die Bedingung (17) gelten. Es sei:

$$U_{e23} = 0 \quad U_{e31} = 0 \quad (53)$$

Anstelle der Gln. (19) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} \frac{D_1 + D_2}{D_1 + D_2 + D_3} &= U_{e1} - U_{e2} \\ - U_{e12} \frac{D_1}{D_1 + D_2 + D_3} &= U_{e2} - U_{e3} \\ - U_{e12} \frac{D_2}{D_1 + D_2 + D_3} &= U_{e3} - U_{e1} \end{aligned} \right\} (54)$$

Da von den Gln. (54) nur zwei unabhängig sind, lassen sie sich nicht nach den Sternquellen auflösen. Ein Ergebnis, das nach den Ausführungen des Abschnitts 6 zu erwarten war. Zur Verminderung der Quellenanzahl kann man eine beliebige der drei Quellen gleich null setzen. Es sei z. B.:

$$U_{e3} = 0 \quad (55)$$

Damit liefert Gl. (54):

$$\left. \begin{aligned} U_{e1} &= U_{e12} \frac{D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \\ U_{e2} &= -U_{e12} \frac{D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \right\} (56)$$

Einer Quelle im Dreieck von Fig. 5 entsprechen zwei Quellen im Stern, wobei eine beliebige Sternquelle gleich null gesetzt werden kann.

Für

$$U_{e2} = 0 \quad (57)$$

ist

$$\left. \begin{aligned} U_{e1} &= U_{e12} \frac{D_1 + D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \\ U_{e3} &= U_{e12} \frac{D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \right\} (58)$$

und für

$$U_{e1} = 0 \quad (59)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{e2} &= -U_{e12} \frac{D_1 + D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \\ U_{e3} &= -U_{e12} \frac{D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \right\} (60)$$

Setzt man in Fig. 5 zwei Sternquellen gleich null

$$U_{e2} = 0 \quad U_{e3} = 0 \quad (61)$$

so gelten unter Berücksichtigung der Bedingung (17) die Gln. (19) und (25).

Aus den Gln. (25) wird mit den Gleichungen (61):

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{e12} D_2 - U_{e31} D_3}{D_2 + D_3} &= U_{e1} \\ \frac{U_{e23} D_3 - U_{e12} D_1}{D_3 + D_1} &= -U_{e1} \frac{S_3}{S_3 + S_1} \\ \frac{U_{e31} D_1 - U_{e23} D_2}{D_1 + D_2} &= -U_{e1} \frac{S_2}{S_1 + S_2} \end{aligned} \right\} (62)$$

| | | | | |
|----|---------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. | $U_{e12} = 0$ | $U_{e23} = -S_4 I_1$ | $U_{e31} = S_4 I_1$ | |
| 2. | $U_{e23} = 0$ | $U_{e12} \frac{D_1}{D_3} = S_4 I_1$ | $U_{e12} = \frac{S_1 S_4}{S_3} I_1$ | $U_{e31} \frac{D_1}{D_1 + D_2} = S_4 I_1$ |
| 3. | $U_{e31} = 0$ | $U_{e12} \frac{D_2}{D_3} = -S_4 I_1$ | $U_{e12} = -\frac{S_2 S_4}{S_3} I_1$ | $U_{e23} \frac{D_2}{D_1 + D_2} = -S_4 I_1$ |

Übersichtlicher ist die Benutzung der Gln. (26), die ergeben:

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} S_3 - U_{e31} S_2 &= U_{e1} (S_3 + S_2) \\ U_{e23} S_1 - U_{e12} S_3 &= -U_{e1} S_3 \\ U_{e31} S_2 - U_{e23} S_1 &= -U_{e1} S_2 \end{aligned} \right\} (63)$$

Dieselben entsprechen in ihrem Aufbau den Gln. (54) und sind ebenfalls nur zwei unabhängige Gleichungen. Für

$$U_{e31} = 0 \quad (64)$$

lauten die Formeln für die beiden verbleibenden Quellen im Dreieck:

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} &= U_{e1} \frac{S_3 + S_2}{S_3} \\ U_{e23} &= U_{e1} \frac{S_2}{S_1} \end{aligned} \right\} (65)$$

Entsprechende Formeln lassen sich für die Anordnungen in Fig. 8 leicht aufstellen.

8. Quellen proportional den Eingangsströmen (I_i , $i=1,2,3$) mit Beibehaltung der passiven Stern-Dreieck-Transformation

Um eine übersichtliche Darstellung zu erhalten, wird die Anzahl der Quellen reduziert und nur eine Quellspannung (U_{e3}) einem Strom (I_1) proportional gewählt. Es sei in Fig. 5b:

$$U_{e1} = 0 \quad U_{e2} = 0 \quad U_{e3} = S_4 I_1 \quad (66)$$

Benutzt werden die Gln. (9) und (10), die ergeben:

$$\left. \begin{aligned} D_3 \frac{D_2 I_1 - D_1 I_2}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e12} (D_1 + D_2) - (U_{e23} + U_{e31}) D_3}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_1 I_1 - S_2 I_2 \\ D_1 \frac{D_3 I_2 - D_2 I_3}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e23} (D_2 + D_3) - (U_{e31} + U_{e12}) D_1}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_2 I_2 - S_3 I_3 - S_4 I_1 \\ D_2 \frac{D_1 I_3 - D_3 I_1}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e31} (D_3 + D_1) - (U_{e12} + U_{e23}) D_2}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_3 I_3 - S_1 I_1 + S_4 I_1 \end{aligned} \right\} (67)$$

Zu beachten ist, dass die Gln. (67) wegen Gl. (6) nur zwei unabhängige Gleichungen sind und ausserdem Gl. (7) gilt.

Gesucht sind die drei Quellspannungen U_{e12} , U_{e23} und U_{e31} . Mit Beibehaltung der passiven Stern-Dreieck-Transformation [s. die Gln. (20) und (21)] folgt aus den Gln. (67):

$$\left. \begin{aligned} U_{e12} (D_1 + D_2) - (U_{e23} + U_{e31}) D_3 &= 0 \\ \frac{U_{e23} (D_2 + D_3) - (U_{e31} + U_{e12}) D_1}{D_1 + D_2 + D_3} &= -S_4 I_1 \\ \frac{U_{e31} (D_3 + D_1) - (U_{e12} + U_{e23}) D_2}{D_1 + D_2 + D_3} &= S_4 I_1 \end{aligned} \right\} (68)$$

Zur weiteren Vereinfachung setzt man nacheinander eine der Spannungsquellen gleich null und erhält durch Einsetzen in die Gln. (68) (von denen eine entfallen kann):

$$U_{e12} (D_1 + D_2) - (U_{e23} + U_{e31}) D_3 = 0 \quad (69)$$

$$U_{e31} \frac{D_1}{D_1 + D_2} = S_4 I_1 \quad U_{e31} = \frac{S_1 + S_2}{S_2} S_4 I_1 \quad (70)$$

$$U_{e23} \frac{D_2}{D_1 + D_2} = -S_4 I_1 \quad U_{e23} = -\frac{S_1 + S_2}{S_1} S_4 I_1 \quad (71)$$

Aus den Gln. (70) lässt sich der Ausdruck

$$\frac{U_{e12}}{D_3} = \frac{U_{e31}}{D_2} \cdot \frac{D_2}{D_2 + D_1} \quad (72)$$

bilden. Der Faktor $D_2/(D_2 + D_1)$ verhindert, dass die durch die Quellen U_{e12} und U_{e31} erzeugten Ströme U_{e12}/D_3 und U_{e31}/D_2 gleich sein können. Der Fall 2 ist in Fig. 13 dargestellt. Wie man den Gln. (68) leicht entnehmen kann, können zwei Quellen nicht gleichzeitig gleich null gesetzt werden. Um nur eine Quelle zu erhalten, interessieren Ströme gleichen Betrages und gleicher Richtung (Umlaufssinn), denn zwei gleiche Quellen lassen sich durch einen gleichgrossen Gegenstrom eliminieren, wobei im quellenlosen Zweig eine neue Quelle entsteht. Auf diese Weise könnte eine Stern- oder Dreieck-Schaltung mit einer Quelle in eine Dreieck- oder Sternschaltung mit nur einer

Quelle übergeführt werden. Da Gl. (72) nur eine Lösung für $D_1 = 0$ liefert, dürfen die passiven Umwandlungsgleichungen, die zu den Gln. (68) führten, nicht verwendet werden, während die Gln. (66) und (67) beibehalten werden können.

9. Quellen proportional den Eingangsströmen ($I_i, i = 1, 2, 3$) ohne Beibehaltung der passiven Stern-Dreieck-Transformation

Wegen der Beziehung (6) sind die Gln. (9) und (10) nur je zwei unabhängige Gleichungen. Mit Hilfe von Gl. (7) werden die Gln. (9) umgewandelt in:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= D_3 \frac{D_2 I_1 - D_1 I_2}{D_1 + D_2 + D_3} + \\ &\quad + \frac{U_{e12} (D_1 + D_2) - (U_{e23} + U_{e31}) D_3}{D_1 + D_2 + D_3} \\ U_{23} &= D_1 \frac{D_2 I_1 + (D_2 + D_3) I_2}{D_1 + D_2 + D_3} + \\ &\quad + \frac{U_{e23} (D_2 + D_3) - (U_{e31} + U_{e12}) D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \right\} (73)$$

und entsprechend die Gln. (10) in:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= S_1 I_1 - S_2 I_2 - U_{e1} - U_{e2} \\ U_{23} &= S_3 I_1 + (S_2 + S_3) I_2 + U_{e2} - U_{e3} \end{aligned} \right\} (74)$$

Um die Arbeit übersichtlich zu halten, sei die Anzahl der Quellen auf eine beschränkt:

$$U_{e23} = 0 \quad U_{e31} = 0 \quad (75)$$

$$U_{e1} = 0 \quad U_{e2} = 0 \quad (76)$$

Damit ändern sich die Gln. (73) und (74) in:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= D_3 \frac{D_2 I_1 - D_1 I_2}{D_1 + D_2 + D_3} + \frac{U_{e12} (D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} \\ U_{23} &= D_1 \frac{D_2 I_1 + (D_2 + D_3) I_2}{D_1 + D_2 + D_3} - \frac{U_{e12} D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \right\} (77)$$

und

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= S_1 I_1 - S_2 I_2 \\ U_{23} &= S_3 I_1 + (S_2 + S_3) I_2 - U_{e3} \end{aligned} \right\} (78)$$

9.1 Spannungs-Einspeisung proportional einem Eingangsstrom

Dreieck und Stern werden zunächst gesondert betrachtet. Für das Dreieck wird eingeführt:

$$U_{e12} = x I_1 \quad (79)$$

wobei x eine noch nicht festgelegte Grösse ist. Will man ein gegebenes Dreieck mit einer Einspeisung nach Gl. (79) in einen Stern verwandeln, so ist auch x gegeben.

Aus den Gln. (77) wird:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= \frac{D_2 D_3 + x (D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} I_1 - \frac{D_1 D_3}{D_1 + D_2 + D_3} I_2 \\ U_{23} &= \frac{D_1 D_2 - x D_1}{D_1 + D_2 + D_3} I_1 + \frac{D_1 (D_2 + D_3)}{D_1 + D_2 + D_3} I_2 \end{aligned} \right\} (80)$$

mit der Determinante:

$$\text{Det.} = \frac{D_1 D_2 (D_3 + x)}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (81)$$

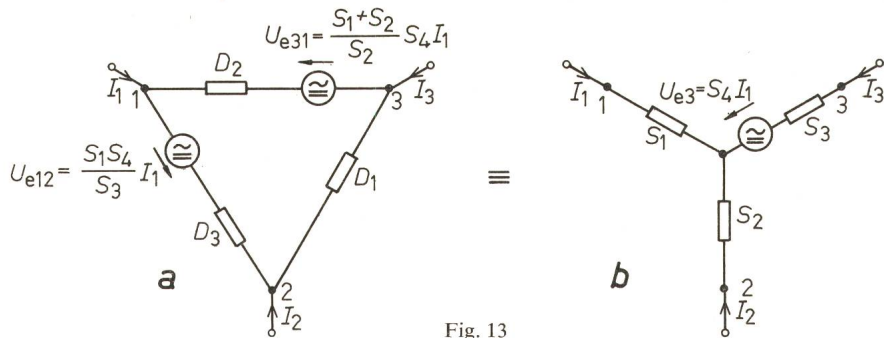


Fig. 13

Für

$$U_{e12} = x I_2 \quad (82)$$

liefern die Gln. (77):

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= \frac{D_2 D_3}{D_1 + D_2 + D_3} I_1 - \frac{D_1 D_3 - x (D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} I_2 \\ U_{23} &= \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2 + D_3} I_1 + \frac{D_1 (D_2 + D_3) - x D_1}{D_1 + D_2 + D_3} I_2 \end{aligned} \right\} (83)$$

$$\text{Det.} = \frac{D_1 D_2 (D_3 - x)}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (84)$$

und schliesslich für:

$$U_{e12} = x I_3 = -x (I_1 + I_2) \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= \frac{D_2 D_3 - x (D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} I_1 - \frac{D_1 D_3 + x (D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} I_2 \\ U_{23} &= \frac{D_1 (D_2 + x)}{D_1 + D_2 + D_3} I_1 + \frac{D_1 (D_2 + D_3 + x)}{D_1 + D_2 + D_3} I_2 \end{aligned} \right\} (86)$$

$$\text{Det.} = \frac{D_1 D_2 D_3}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (87)$$

Für den Stern sei — neben den Gln. (76):

$$U_{e3} = y I_1 \quad (88)$$

womit sich aus den Gln. (78) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= S_1 I_1 - S_2 I_2 \\ U_{23} &= (S_3 - y) I_1 + (S_2 + S_3) I_2 \end{aligned} \right\} (89)$$

$$\text{Det.} = S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3 - y S_2 \quad (90)$$

Weiterhin sei:

$$U_{e3} = y I_2 \quad (91)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= S_1 I_1 - S_2 I_2 \\ U_{23} &= S_3 I_1 + (S_2 + S_3 - y) I_2 \end{aligned} \right\} (92)$$

$$\text{Det.} = S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3 - y S_1 \quad (93)$$

Für

$$U_{e3} = y I_3 = -y (I_1 + I_2) \quad (94)$$

folgt:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= S_1 I_1 - S_2 I_2 \\ U_{23} &= (S_3 + y) I_1 + (S_2 + S_3 + y) I_2 \end{aligned} \right\} (95)$$

$$\text{Det.} = S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3 + y (S_1 + S_2) \quad (96)$$

Aus den aufgezeigten Möglichkeiten sei ein Fall ausgewählt. Verglichen sei das Dreieck mit der Einspeisung (79) mit dem Stern (88). Es ist hierbei gleichgültig, von welcher Schaltung man ausgeht.

Aus den Gln. (80) und (89) ergeben sich die zu vergleichenden Matrizen:

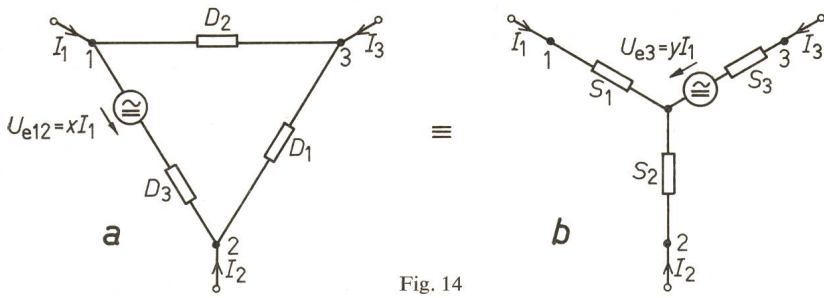


Fig. 14

$$\begin{pmatrix} \frac{D_2 D_3 + x(D_1 + D_2)}{D_1 + D_2 + D_3} & -\frac{D_1 D_3}{D_1 + D_2 + D_3} \\ \frac{D_1 D_2 - x D_1}{D_1 + D_2 + D_3} & \frac{D_1(D_2 + D_3)}{D_1 + D_2 + D_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ S_3 - y & S_2 + S_3 \end{pmatrix} \quad (97)$$

Ist die Dreieckschaltung gegeben und der Stern gesucht (Fig. 14), so liefert der durchgeführte Vergleich beider Matrizen:

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \frac{D_1 D_3}{D_1 + D_2 + D_3} & S_3 &= \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \\ S_1 &= \frac{D_2 D_3 + x(D_1 + D_3)}{D_1 + D_2 + D_3} & y &= x \frac{D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \end{aligned} \right\} (98)$$

Neben der Einspeisung proportional den Eingangsströmen gibt es auch die Möglichkeit, Einspeisungen proportional den Eingangsspannungen U_{12} , U_{23} und U_{31} vorzunehmen. Hierbei ändert sich nichts Wesentliches gegenüber den in diesem Abschnitt gebrachten Fällen. Interessanter ist die verschiedene Einspeisung, wobei Stromeinspeisung und Spannungseinspeisung verglichen werden.

ist nicht brauchbar, denn die Anordnung in Fig. 15 ist kein aktiver Vierpol, da man die Spannung $x U_{12}$ zu U_{12} hinzufügen kann. Verwendbar ist hingegen die Festlegung:

$$\begin{aligned} U_{e12} &= x U_{23} \\ U_{e23} &= 0 \\ U_{e31} &= 0 \end{aligned} \quad (100)$$

Sie ergibt mit den Gln. (77):

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= \frac{D_2(D_3 + x D_1)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} I_1 - \frac{D_1(D_3 - x D_2)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} I_2 \\ U_{23} &= \frac{D_1 D_2}{(D_1 + D_2 + D_3)N} I_1 + \frac{D_1(D_2 + D_3)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} I_2 \end{aligned} \right\} (101)$$

$$\text{Det.} = \frac{D_1 D_2 D_3}{(D_1 + D_2 + D_3)N} \quad (102)$$

mit der Abkürzung

$$N = 1 + \frac{x D_1}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (103)$$

Weitere Möglichkeiten lassen sich in gleicher Weise ableiten.

Verglichen werden jetzt die Anordnungen mit den Bedingungen (100) und (88), dargestellt in Fig. 16a und b, also die Matrizen (101) und (89):

$$\begin{pmatrix} \frac{D_2(D_3 + x D_1)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} & -\frac{D_1(D_3 - x D_2)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} \\ \frac{D_1 D_2}{(D_1 + D_2 + D_3)N} & \frac{D_1(D_2 + D_3)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ S_3 - y & S_2 + S_3 \end{pmatrix} \quad (104)$$

mit den abzulesenden Lösungen:

$$S_1 = \frac{D_2(D_3 + x D_1)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} \quad S_2 = \frac{D_1(D_3 - x D_2)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} \quad (105)$$

und den damit leicht zu berechnenden Werten:

$$S_3 = \frac{D_1 D_2 (1 + x)}{(D_1 + D_2 + D_3)N} \quad y = x \frac{D_1 D_2}{(D_1 + D_2 + D_3)N} \quad (106)$$

9.2 Spannungseinspeisung proportional einer Eingangsspannung

Im folgenden sei das Dreieck mit einer spannungsproportionalen Einspeisung versehen (s. Fig. 15). Die naheliegende Festlegung

$$\begin{aligned} U_{e12} &= x U_{12} \\ U_{e23} &= 0 \\ U_{e31} &= 0 \end{aligned} \quad (99)$$

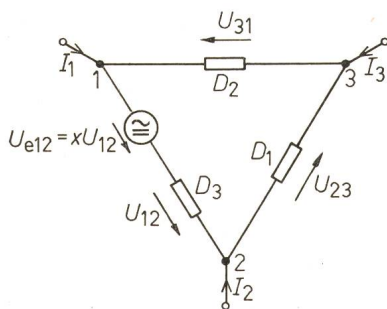


Fig. 15

9.3 Stromeinspeisung proportional einer Eingangsspannung

Da die allgemeinen Formeln nichts Neues bieten, sei auf die Ableitung verzichtet. Behandelt wird eine Stromeinspeisung mit einer Quelle, wie sie Fig. 17a zeigt.

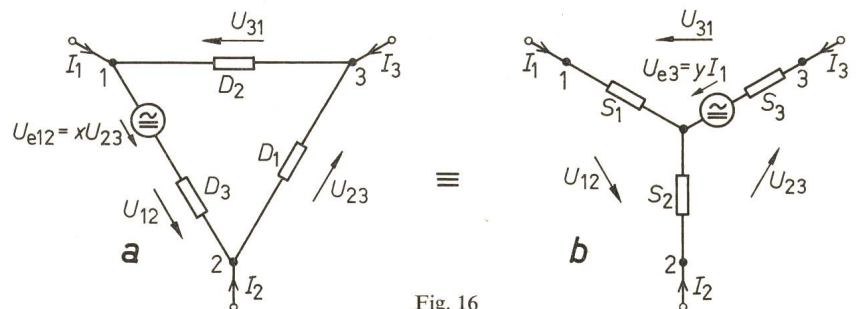


Fig. 16

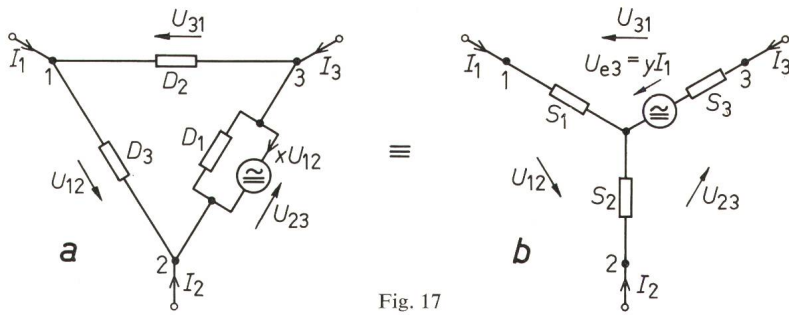


Fig. 17

Man liest ab:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{U_{12}}{D_3} - \frac{U_{31}}{D_2} \\ I_2 &= -\frac{U_{12}}{D_3} + \frac{U_{23}}{D_1} + x U_{12} \\ I_3 &= -\frac{U_{23}}{D_1} - x U_{12} + \frac{U_{31}}{D_2} \end{aligned} \right\} (107)$$

Benutzt werden die erste und dritte Gleichung, ausserdem wird U_{31} ersetzt nach:

$$U_{31} = -U_{12} - U_{23} \quad (108)$$

und man erhält:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_2}\right) U_{12} - \frac{1}{D_2} (-U_{23}) \\ I_3 &= -\left(x + \frac{1}{D_2}\right) U_{12} + \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\right) (-U_{23}) \end{aligned} \right\} (109)$$

$$\text{Det.} = |Y| = \frac{D_1 + D_2 + D_3 - x D_1 D_3}{D_1 D_2 D_3} \quad (110)$$

Verglichen werden soll mit einem Stern mit Spannungseinspeisung. Hierzu kann man die Leitwertmatrix (109) mit der Determinante (110)

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_2} & -\frac{1}{D_2} \\ -\left(x + \frac{1}{D_2}\right) & \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \end{array} \right) \quad (111)$$

nach der allgemeinen Formel (Vorzeichen beachten!)

$$(W) = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{22}}{|Y|} & -\frac{Y_{12}}{|Y|} \\ -\frac{Y_{21}}{|Y|} & \frac{Y_{11}}{|Y|} \end{pmatrix} \quad (112)$$

umwandeln in die Widerstandsmatrix

$$\left(\begin{array}{cc} W_{11} = \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2 |Y|} & W_{12} = \frac{1}{D_2 |Y|} \\ x + \frac{1}{D_2} & W_{22} = \frac{D_2 + D_3}{D_2 D_3 |Y|} \end{array} \right) \quad (113)$$

$$|W| = \frac{1}{|Y|} = \frac{D_1 D_2 D_3}{D_1 + D_2 + D_3 - x D_1 D_3} \quad (114)$$

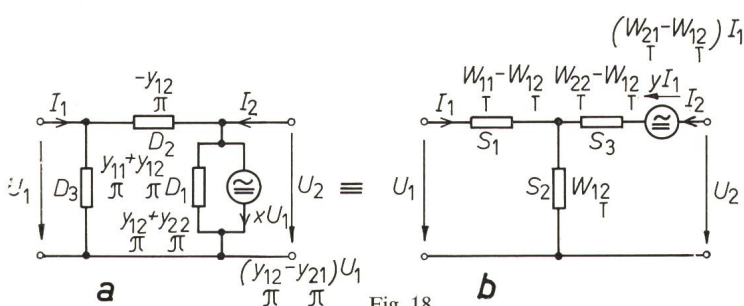


Fig. 18

Die Vergleichsschaltung sei Fig. 17b. Die Widerstandsmatrix (89) mit der Determinante (90) lässt sich nicht direkt anwenden, da die Gln. (109) die Ströme I_1 und I_3 enthalten. Man kann die Widerstandsmatrix aus den Gln. (89) berechnen oder aus Fig. 17b ablesen:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= (S_1 + S_2) I_1 + S_2 I_3 \\ -U_{23} &= (S_2 + y) I_1 + (S_2 + S_3) I_3 \end{aligned} \right\} (115)$$

$$\text{Det.} = S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3 - y S_2 \quad (116)$$

Der Vergleich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \frac{D_1 D_3}{D_1 + D_2 + D_3 - x D_1 D_3} \\ S_3 &= \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2 + D_3 - x D_1 D_3} \\ S_1 &= \frac{D_2 D_3}{D_1 + D_2 + D_3 - x D_1 D_3} \end{aligned} \right\} (117)$$

$$y = x \frac{D_1 D_2 D_3}{D_1 + D_2 + D_3 - x D_1 D_3} \quad (118)$$

10. Transistor-Ersatzschaltbilder

In Fig. 18a und b sind zwei bekannte Transistor-Ersatzschaltbilder wiedergegeben. Sie entstehen aus Fig. 17a und b, indem man dort setzt:

$$I_3 = I_2 \quad -U_{23} = U_2 \quad (119)$$

Ausser den Grössen der Fig. 17 sind auch die Grössen der Widerstands- und der Leitwertmatrix eingetragen. Die entsprechenden Umrechnungsformeln lauten:

$$\left. \begin{aligned} Y_{T11} &= \frac{S_2 + S_3}{|W_T|} & Y_{T12} &= -\frac{S_2}{|W_T|} \\ Y_{T21} &= -\frac{S_2 + y}{|W_T|} & Y_{T22} &= \frac{S_1 + S_2}{|W_T|} \\ |Y_T| &= \frac{1}{|W_T|} \end{aligned} \right\} (120)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{II11} &= \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} & Y_{II12} &= -\frac{1}{D_2} \\ Y_{II21} &= -\left(\frac{1}{D_2} + x\right) & Y_{II22} &= \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \end{aligned} \right\} (121)$$

$$|Y_{II}| = \frac{1}{|W_{II}|}$$

$$\left. \begin{aligned} W_{T11} &= S_1 + S_2 & W_{T12} &= S_2 \\ W_{T21} &= S_2 + y & W_{T22} &= S_2 + S_3 \end{aligned} \right\} (122)$$

$$|W_T| = \frac{1}{|Y_T|}$$

$$\left. \begin{aligned} W_{II11} &= \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\right) \frac{1}{|Y_{II}|} & W_{II12} &= \frac{1}{D_2 |Y_{II}|} \\ W_{II21} &= \left(\frac{1}{D_2} + x\right) \frac{1}{|Y_{II}|} & W_{II22} &= \left(\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3}\right) \frac{1}{|Y_{II}|} \end{aligned} \right\} (123)$$

$$|W_{II}| = \frac{1}{|Y_{II}|}$$

Adresse des Autors:

Prof., Dr. Phil., Dr.-Ing. W. Herzog, Direktor des Institutes für Elektrotechnik der Universität Mainz, Anselm-Franz-von-Bentzel-Weg 12, D-6500 Mainz.