

Von der Quelle zur Verschiebung und zur Induktion

Autor(en): **Herzog, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins :
gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen
Elektrotechnischen Vereins (SEV) und des Verbandes
Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)**

Band (Jahr): **63 (1972)**

Heft 13

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-915711>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Von der Quelle zur Verschiebung und zur Induktion ¹⁾

Von W. Herzog, Mainz

621.391.5:621.318.43

Nach dem Vorgehen in der Nachrichtentechnik, das eine Quelle – meistens mit Dazwischenschaltung eines eigenschaftsverändernden Vierpols – auf einen Verbraucher arbeiten lässt, werden Verschiebung und Induktion gleicherweise behandelt, wobei das Hauptziel eine leicht verständliche Darstellung ist. Die möglichen Quellen arbeiten auf Kondensator und Spule als Verbraucher. Die Verbrauchereigenschaft wird durch die Berechnung der auftretenden Kräfte nochmals aufgezeigt. Ein Vergleich Magnet-Solenoid weist auf die Vortäuschung von magnetischen Dipolen hin.

Afin de représenter d'une façon aisément compréhensible le déplacement et l'induction, ceux-ci sont traités comme en technique des télécommunications, où une source alimente un récepteur d'énergie – généralement avec interposition d'un quadripôle qui en modifie les propriétés. Les sources possibles alimentent un condensateur et une bobine jouant le rôle de récepteurs d'énergie et dont la propriété de récepteurs est en outre mise en évidence par le calcul des forces produites. Une comparaison aimant-solénoïde démontre la simulation de dipôles magnétiques.

1. Einführung

Für die Begriffe Verschiebungsdichte, Feldstärke und Induktion gibt es viele Erläuterungen, dazu kommt die wieder abgelegte Einführung von freier und wahrer Ladung. Die Einordnung ist für einen Studierenden sehr schwierig. Natürlich kann man sich an den Maxwell'schen Gleichungen orientieren, doch auch hierzu fehlt oft die systematische Darstellung. Die Veranschaulichung überlässt man gern den Formeln. Im folgenden sei eine Zuordnung, wie sie in der Nachrichtentechnik üblich ist, durchgeführt. Hierbei bleiben alle Formeln erhalten, auch die Definitionen werden übernommen. Die Systematik besteht in der Aufteilung Quelle–Verbraucher. Es wird zuerst nach der Quelle gefragt. Die Quellen sind die Ladungsmenge oder die von derselben erzeugte Spannung und der stationäre Strom oder der von demselben herrührende Fluss. Die nicht-konstante Grösse der Quelle wird an den Verbraucher geliefert.

Zum Vergleich seien die bekannten Darstellungen von Spannungs- und Stromquelle herangezogen (Fig. 1). Mit den in Fig. 1 eingezeichneten Grössen (U_0 Leerlaufspannung, R_i Innenwiderstand, I_k Kurzschlussstrom, G_i Innenleitwert) lassen sich die Quellen mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} U_0 &= R_i I_k \\ G_i &= 1/R_i \end{aligned} \quad (1)$$

ineinander überführen. Sie sind dual. Die Namensgebung richtet sich nach der konstanten Grösse.

Innenwiderstand und Innenleitwert treten immer dann auf, wenn die Elektronen (oder Löcher) der Quelle erst erzeugt werden müssen. Dieses ist beispielsweise bei den chemischen

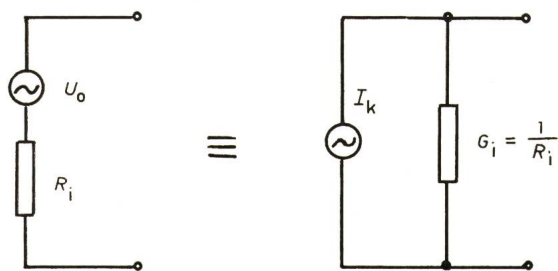


Fig. 1
Spannungs- und Stromquelle

Elementen, bei der Bewegung eines Leiters im Magnetfeld und bei der Elektronenemission aus Metallen der Fall. Sind die Elektronen bereits vorhanden, wie z. B. bei einem geladenen isolierten Leiter, so ist der Innenwiderstand gleich null, allerdings ist naturgemäss auch die Menge der Elektronen beschränkt.

Zunächst sei ein solcher geladener Leiter betrachtet.

2. Die Ladungsquelle

Gegeben ist eine Anhäufung von Elektronen oder Löchern auf einem Leiter. Eine solche Anhäufung mit der Ladung Q ist noch keine Quelle. Bringt man einen zweiten – ungeladenen – Leiter in die Nähe, so erzeugt die Ladung Q durch Influenz eine ihr gleich grosse Gegenladung $-Q$. Beide Ladungen ergeben die Quelle. Hierbei können die beiden Leiter völlig verschieden sein. Quellen können sich auf gleichen und verschieden grossen Kugeln befinden, auf Platten und auf einem Leiter und einem Bezugspunkt. Als häufigster Bezugspunkt dient die Erde. Ist der Bezugspunkt bei einer geladenen Kugel unendlich weit entfernt, so kann man – zumindest in der Umgebung der Kugel – das Verhalten der Ladung auf die Umgebung durch radiale Linien, die zunächst nur als Wirkungslinien bezeichnet werden sollen, kennzeichnen (Fig. 2).

Die Summe der Linien nennt man den Fluss Φ_e und setzt ihn gleich der Ladung

$$\Phi_e = Q \quad (2)$$

Die Quelle kann von nichtleitender Materie, Luft oder Vakuum umgeben sein. Da das Verhalten bei verschiedener Umgebungsmaterie verschieden ist, so soll dieselbe nicht in die Quelle einbezogen werden.

Die Dichte der Elektronen ist je nach Form des Leiters verschieden, entsprechend auch der abgehende Fluss und somit ist meistens der Fluss inhomogen. Führt man nun die Flussdichte D ein, die auch Verschiebungsdichte oder dielektrische Verschiebung genannt wird, so gilt für ein kleines Flächenstück dF , von dem der Fluss $d\Phi_e$ ausgeht die Beziehung

$$d\Phi_e = D dF \quad (3)$$

und für den gesamten Fluss

$$\Phi_e = Q = \oint D dF \quad (4)$$

¹⁾ Mitteilung des Instituts für Elektrotechnik der Universität Mainz.

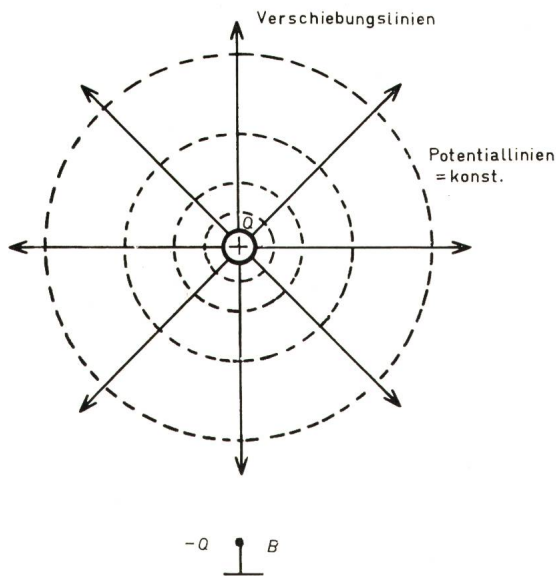


Fig. 2
Geladene Kugel mit Potentiallinien und Fluss

Hat man zwei Ladungen $+Q$ und $-Q$ — also eine Quelle, so kann man durch leitende Verbindung derselben einen Ausgleich der Ladungen erzielen, der je nach dem Widerstand der Verbindung eine Zeit t benötigt. Für den durch den Ladungsausgleich fließenden Strom I gilt:

$$Q = I t \quad (5)$$

Mit Hilfe einer Elektrisiermaschine oder eines chemischen Elementes können die Elektronen nachgefüllt werden, was zu einem Dauerstrom führt. Ein Strom kann nur fließen, wenn eine Spannung U zwischen den Ladungen besteht. Man teilt den Ladungen, entsprechend ihrem Vorzeichen, ein Potential φ_+ und φ_- zu. Dann gilt für die Spannung U

$$U = \varphi_+ - \varphi_- \quad (6)$$

Zwischen den Potentialen φ_+ und φ_- sind alle Zwischenwerte möglich. Für jeden Zwischenwert gibt es eine Fläche, die sog. Potential- oder Niveaufläche. In Fig. 2 findet man die Projektion der Potentialflächen als Kreise eingezeichnet.

In Fig. 3 seien zwei gleiche entgegengesetzte Ladungen — eine Quelle — nebeneinander mit Fluss- und Potentiallinien gezeichnet. Das Potential null ist auf der senkrechten Ebene in der Mitte der Verbindungslinie beider Leiter. Ist der Bezugsort eine leitende Ebene (z. B. die Erde), so erhält man die in Fig. 4 gegebene Darstellung. Der Leiter wird in der Ebene gespiegelt, und die Flusslinien werden zwischen Leiter und Spiegelbild nach Thomson nur bis zur Ebene gezogen.

Das Potential rührt von den abstossenden Kräften der Elektronen und Löcher her. Diese Kräfte wirken auf die Umgebung des Leiters. Damit ist das Potential auf der Oberfläche einer Quelle abhängig von der Umgebung, genauer von dem umgebenden Dielektrikum.

In Ergänzung dieser Betrachtungen sei eine weitere Grösse eingeführt. Entsprechend wie man ein Gefäss nur bis zum Rand und nach seiner Form mit Wasser füllen kann, so kann ein Leiter nur eine bestimmte Anzahl von Elektronen aufnehmen (oder von Löchern aufweisen). Diese mit Kapazität bezeichnete Grösse ist unabhängig von der Anzahl der tatsächlich auf ihr befindlichen Elektronen. Sind es weniger als die maxi-

mal mögliche Anzahl der Elektronen, so haben sie mehr Platz, und entsprechend ist das Potential geringer. Zwischen der Ladung Q , dem Potentialunterschied U gegenüber dem Bezugspunkt

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U \quad (7)$$

und der Kapazität C gilt die Beziehung:

$$Q = C U \quad (8)$$

3. Kapazitäten

Zur Erläuterung der Kapazität seien zwei verschieden aussehende Kondensatoren betrachtet: Die Kugel (Fig. 2) und der Plattenkondensator (Fig. 5). Die Kapazität ist, abgesehen von der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_r , im elektrostatischen Maßsystem gleich dem Radius r

$$C = \epsilon_r r \quad (9)$$

Da es in diesem Aufsatz nicht auf die Maßsysteme ankommt, wird jeweils das einfachste bevorzugt. Als Bezugspunkt sei ein Punkt im Unendlichen angenommen. Das Feld wird radial gezeichnet. Nähere Angaben fehlen meistens in der Literatur. Bei Grave [2], wird die Gegenladung nach unendlich verlegt. Betrachtet man den Plattenkondensator Fig. 5, so liegt die Kapazität in dem Raum zwischen den beiden Platten. Würde man als Gegenplatte nur den Bezugspunkt B wählen, so wäre die Kapazität viel kleiner. Entsprechendes gilt für die Kugel in Fig. 2. Die von der Kugel ausgehenden Verschiebungslinien wären — auch auf dem Wege zu dem im Unendlichen befindlichen Bezugspunkt — keineswegs radial. Die Darstellung in Fig. 2 ist also unvollständig. Sie wird sinnvoll, wenn man nach Fig. 6 den Punkt unendlich zu einer Kugel ausdehnt. Nun gibt es keine Widersprüche mehr zwischen Kugel und Plattenkondensator. Die Verschiebungslinien der Plattenkondensatoren verlaufen nicht nur zwischen den Platten, sie gehen vertikal von den beiden Platten aus [3], die Wege zwischen den Platten sind allerdings die kürzesten. Für einen Kondensator nach Fig. 5, lässt sich bei Vernachlässigung der Randfehler

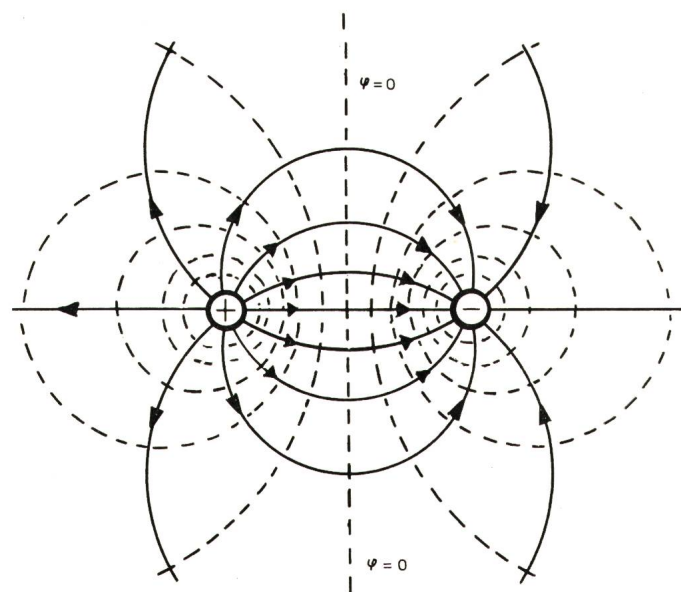


Fig. 3
Zwei geladene Kugeln mit Potentiallinien und Fluss

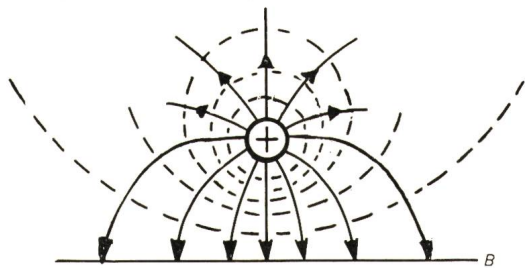


Fig. 4
Geladene Kugel mit leitender Ebene

Gl. (3) ändern in (\mathbf{D} und Flächenvertikale von \mathbf{F} gleiche Richtung):

$$\frac{\Phi_e}{F} = \frac{Q}{F} = D \quad (10)$$

Zum Nachweis der Richtigkeit von Fig. 6 kann man auch den Kugelkondensator Fig. 7 heranziehen. Für seine Kapazität gilt:

$$C = \epsilon_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (11)$$

Lässt man r_2 gegen unendlich gehen, so wird aus Gl. (11) $C = \epsilon_r r_1$ in Übereinstimmung mit der Gl. (9) für die Kugel.

4. Das Potential

Die Aufteilung einer nichtelektrischen Menge in Elektronen und Löcher erfordert Energie. Diese Energie kann wiedergewonnen werden, da sich die aufgeteilten Ladungen mit einer Kraft anziehen (z. B. Coulombsches Gesetz für punktförmige Ladungen). Ist eine Platte eines Kondensators oder sind beide beweglich, so kommen beide Platten zusammen, wobei die Integration über das Produkt aus jeweiliger Kraft multipliziert mit dem Abstand die gewonnene Arbeit angibt. Die Kraft zwischen den Platten lässt sich längs der Verschiebungslinien aufteilen. Hierbei haben parallel den Platten liegende Ebenen gleiches Verhalten — gleiches Potential [s. Gl. (6)]. Für das Potential gelte die übliche Definition, z. B. [1]: Das Potential in einem Punkt des elektrischen Feldes ist der Quotient aus der Arbeit, die man aufwenden muss, um die positive Einheitsladung aus dem Unendlichen (oder vom Erdboden) bis an diesen Punkt zu bringen, und der Einheitsladung.

Befindet sich ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ zwischen den Platten

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (12)$$

(ϵ_r relative Dielektrizitätskonstante, ϵ_0 Dielektrizitätskonstante im Vakuum), so muss die Verschiebung die Polarisation der Moleküle vornehmen. Hierbei müssen vorhandene Dipole gerichtet oder die Moleküle zu Dipolen verzerrt werden. Anders betrachtet: Die aufzuwendende Arbeit ist in beiden Fällen, die lediglich durch den Zahlenwert von ϵ_r unterschieden werden sollen, grösser. Dadurch nimmt das Potential ab.

Es seien φ_{10} und φ_{20} die Potentiale für die beiden Platten bei Vakuum, mit dem Potentialunterschied U_0 :

$$U_0 = \varphi_{10} - \varphi_{20} \quad (13)$$

Befindet sich nun ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ zwischen den Platten, so gilt mit dem Index ϵ , anstatt des Indexes null:

$$U_\epsilon = \varphi_{1\epsilon} - \varphi_{2\epsilon} \quad (14)$$

Durch Messung wird gefunden:

$$\epsilon U_\epsilon = \epsilon_0 U_0 \quad (15)$$

Damit lässt sich aus den Gl. (13) und (14) bilden:

$$\epsilon (\varphi_{1\epsilon} - \varphi_{2\epsilon}) = \epsilon_0 (\varphi_{10} - \varphi_{20}) \quad (16)$$

Diese Formel spaltet man auf in:

$$\begin{aligned} \varphi_{1\epsilon} - \varphi_{2\epsilon} &= \varphi_{10} - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \varphi_{10} - \left(\varphi_{20} - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \varphi_{20} \right) = \\ &= \varphi_{10} - \varphi_{20} - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} (\varphi_{10} - \varphi_{20}) = \frac{\varphi_{10} - \varphi_{20}}{\epsilon_r} \end{aligned} \quad (17)$$

und entsprechend:

$$U_\epsilon = U_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} U_0 = \frac{U_0}{\epsilon_r} \quad (18)$$

Die Gl. (17) und (18) geben die Auftrennung des Potentials und damit der Spannung in einen Vakuumanteil und einen Anteil des Dielektrikums. Man kann den Weg über das Potential vermeiden, wenn man die Spannung an den Kondensatorplatten direkt heranzieht. Diese Grösse ist einfach zu messen.

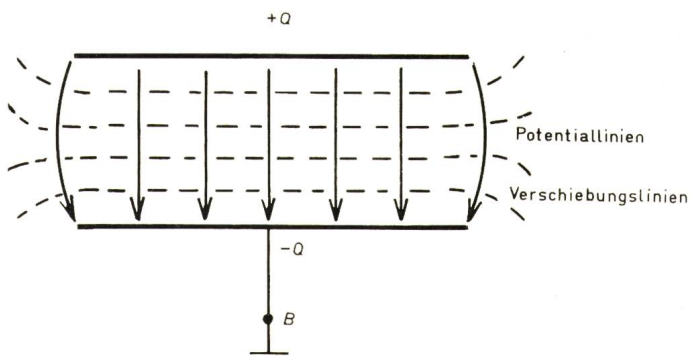


Fig. 5
Plattenkondensator

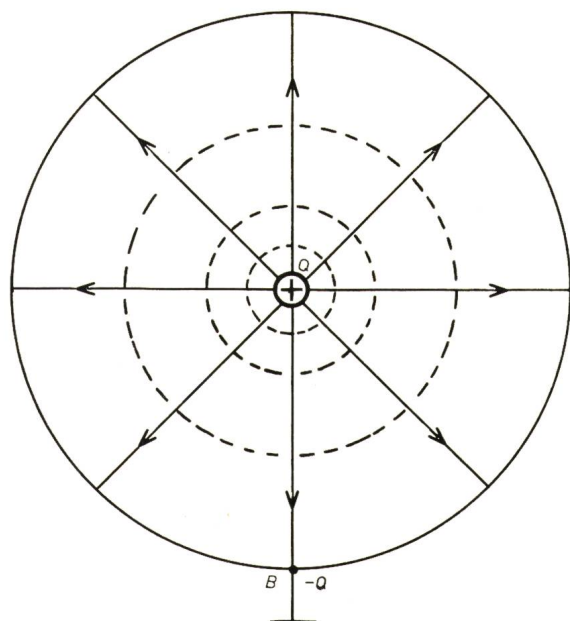


Fig. 6
Kugel mit Hohlkugel als Erde

5. Die Ladungsquelle und ihre Wirkung auf einen Kondensator bei konstanter Ladung

Mit der Voraussetzung konstanter Ladung lässt sich die Beziehung Gl. (8) für Vakuum mit dem Index null ($\epsilon = \epsilon_0$)

$$Q = C_0 U_0 = \Phi_e \quad (19)$$

und für ein Dielektrikum ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \epsilon_r > 1$) mit dem Index ϵ aufschreiben:

$$Q = C_\epsilon U_\epsilon = \Phi_e \quad (20)$$

Hierbei sind C_0 und C_ϵ Konstanten, die nur von der Gestalt des Kondensators und seinem Dielektrikum abhängen.

Durch Messungen findet man [Gl. (15)]

$$U_\epsilon = \frac{U_0}{\epsilon_r} \quad (21)$$

und mit den Gl. (19) und (20) für die Kapazitäten:

$$C_\epsilon = \epsilon_r C_0 \quad (22)$$

Die Kapazität, die einen Leitwert darstellt, wird mit ϵ_r grösser und damit ihr Widerstand kleiner. Entsprechend muss der Spannungsabfall an diesem Widerstand kleiner werden.

Für die Kapazität führt man als Abhängigkeit von der Fläche F , dem Plattenabstand d und dem Dielektrikum ϵ die bekannten Beziehungen ein:

$$C_\epsilon = \epsilon \frac{F}{d} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{F}{d} = \epsilon_r C_0 \quad (23)$$

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{F}{d} \quad (24)$$

Die Gl. (10), (19), (20) und (23), (24) liefern bei gleicher Richtung von \mathbf{D} , der Vertikalen auf \mathbf{F} und \mathbf{d} :

$$\mathbf{D}_\epsilon = \frac{Q}{\mathbf{F}} = \epsilon \frac{U_\epsilon}{\mathbf{d}} = \epsilon_0 \frac{U_0}{\mathbf{d}} = \mathbf{D}_0 \quad (25)$$

für Dielektrikum mit dem Index ϵ und für Vakuum mit dem Index 0. Man bezieht üblicherweise die Spannung auf den Abstand d der Kondensatorplatten und nennt diese Grösse Feldstärke. Dies ist eine Abkürzung und keine neue Grösse. Setzt man

$$\frac{U_\epsilon}{\mathbf{d}} = \mathbf{E}_\epsilon \quad \frac{U_0}{\mathbf{d}} = \mathbf{E}_0 \quad (26)$$

so lässt sich anstelle von Gl. (25) schreiben:

$$\mathbf{D}_\epsilon = \epsilon \mathbf{E}_\epsilon = \mathbf{D}_0 \quad (27)$$

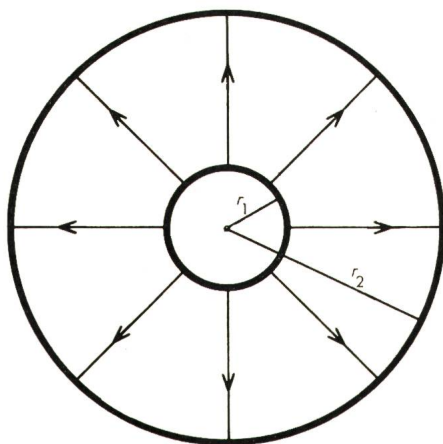


Fig. 7
Kugelkondensator

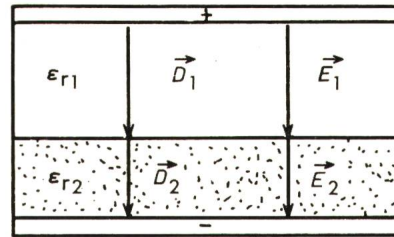


Fig. 8
Kondensator mit parallel zu den Platten geschichtetem Dielektrikum

Die Verschiebung ist bei konstanter Ladung (konstantem Fluss) im beliebigen Dielektrikum und im Vakuum gleich ($\mathbf{D}_\epsilon = \mathbf{D}_0$). Die Feldstärken sind nicht gleich:

$$\mathbf{E}_\epsilon = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} \quad (28)$$

6. Die Ladungsquelle und ihre Wirkung auf einen Kondensator bei konstanter Spannung

Die Beziehung (8) lässt zwei Möglichkeiten zu. Ausser dem soeben behandelten Fall der konstanten Ladung und damit des konstanten Flusses kann man auch konstante Spannung annehmen. Hierbei muss die Quelle so beschaffen sein, dass ihre Ladung derart ergänzt wird, dass die Spannung immer konstant bleibt. Bei einem chemischen Element als Quelle ist das bei nicht zu starker Belastung der Fall.

Zu betonen ist, dass bei dieser Darstellung neue Formeln, aber keine neuen Erkenntnisse gewonnen werden können.

Jetzt gilt für den Fall des Vakuums

$$\Phi_{e0} = Q_0 = C_0 U \quad (29)$$

und für den Fall eines Materials mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ

$$\Phi_{e\epsilon} = Q_\epsilon = C_\epsilon U = \epsilon_r C_0 U \quad (30)$$

da auch hier die Beziehungen (23) und (24) gelten.

Man entnimmt den Gl. (29) und (30):

$$Q_\epsilon = \epsilon_r Q_0 \quad Q_\epsilon > Q_0 \quad \epsilon_r > 1 \quad (31)$$

Um die Spannung konstant zu halten, ist für $\epsilon_r > 1$ eine ϵ_r -fache Ladung und entsprechend ein ϵ_r -facher Fluss erforderlich. Damit benötigt auch die erforderliche Verschiebung \mathbf{D}_ϵ einen ϵ_r -fach grösseren Wert als die Verschiebung \mathbf{D}_0 in Vakuum. Mit

$$\mathbf{D}_\epsilon = \frac{Q_\epsilon}{\mathbf{F}} \quad \mathbf{D}_0 = \frac{Q_0}{\mathbf{F}} \quad (32)$$

und den Gl. (30) und (29) folgt

$$\mathbf{D}_\epsilon = \epsilon_r \frac{C_0 U}{\mathbf{F}} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{U}{\mathbf{d}} \quad \mathbf{D}_0 = \frac{C_0 U}{\mathbf{F}} = \epsilon_0 \frac{U}{\mathbf{d}} \quad (33)$$

und schliesslich

$$\mathbf{D}_\epsilon = \epsilon_r \mathbf{D}_0 = \epsilon_r \mathbf{E}_\epsilon = \epsilon_r \mathbf{E}_0 \quad \mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad (34)$$

Wegen der Konstanz von U ist nach Voraussetzung:

$$\mathbf{E}_\epsilon = \frac{U}{\mathbf{d}} = \mathbf{E}_0 \quad (35)$$

7. Der Flussdurchgang bei verschiedenen Dielektriken

Man betrachtet nach Grave [2] ein aus zwei Schichten bestehendes Dielektrikum mit den Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 und ϵ_2 , die einmal parallel zu den Kondensatorplatten (Fig. 8) und einmal senkrecht dazu (Fig. 9) angeordnet sind.

Bei der Querschichtung bleibt die Verschiebung erhalten, es ist:

$$D_1 = D_2 \quad (36)$$

während bei der Längsschichtung die Spannung dieselbe bleibt. Natürlich kann man die Spannung auf den Plattenabstand d beziehen und erhält:

$$\frac{U_1}{d} = \frac{U_2}{d} \quad (37)$$

und damit

$$E_1 = E_2 \quad (38)$$

Bei schräger Trennfläche oder schrägem Einfallswinkel (Fig. 10) gelten die Gl. (36) für die Normalrichtung

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (39)$$

und die Gl. (38) für die Tangentialrichtung

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (40)$$

Die Gl. (39) und (40) lassen sich schreiben:

$$D_{1n} = D_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (41)$$

$$E_{1t} = E_{2t} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \quad (42)$$

Man entnimmt Fig. 10 für D und E das gleiche Brechungsgesetz

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (43)$$

Für die Vektoren D_1 und D_2 sowie E_1 und E_2 der Fig. 10 findet man:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad (44)$$

Eine etwas andere Betrachtung, z. B. [4], führt zu dem gleichen Ergebnis.

8. Der stationäre Strom und sein Fluss

Ein von einem Strom I durchflossener Leiter besitzt eine Wirkung auf seine Umgebung, die sich durch ein Feld, das durch Eisenfeilspäne sichtbar gemacht werden kann, darstellen lässt. Bei n -fachem Strom oder wenn man den gleichen Strom n -mal durch n -fache Durchführung wirken lässt, wird das Feld n -fach. Man kann den Faktor n — die Windungszahl — in die Konstante hineinnehmen. Behandelt wird im folgenden — entsprechend der Ladungsquelle — eine Darstellung, bei der eine Stromquelle auf eine Spule als Verbraucher arbeitet.

9. Die Stromquelle und ihre Wirkung auf eine Spule bei konstantem Strom

Die vom Strom I in der Umgebung erzielte Wirkung nennt man Kraftfluss Φ_m . Bezogen auf die Fläche F erhält man die Flussdichte, die die Bezeichnung magnetische Induktion B erhält. Bei inhomogenem Flussverlauf gilt vgl. Gl. (3)

$$d\Phi_m = B dF \quad (45)$$

Für die vorliegende Betrachtung genügt eine homogene Flussverteilung. Als solche kann [5] der Mittelteil einer Zylinderspule aufgefasst werden; an den Spulenden wird das Feld — ähnlich dem Randfeld eines Kondensators — inhomogen. Ist die Spule auf einem Kern magnetischen Materials aufgewickelt, so kann man dem Feld einen Weg vorschreiben, indem man den Kern bei einer Zylinderspule über den Aussenraum

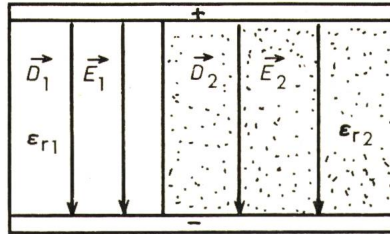


Fig. 9
Kondensator mit senkrecht zu den Platten geschichtetem Dielektrikum

durch magnetisches Material schliesst oder von vornherein eine Toroidspule benutzt.

Es sei also für die folgende Darstellung (B und Vertikale auf F gleiche Richtung):

$$\frac{\Phi_m}{F} = B \quad (46)$$

angenommen.

Zwischen Strom und Fluss gilt die Beziehung [vgl. Gl. (1)]:

$$\Phi_m = L I \quad (47)$$

Darin ist die Konstante L die Selbstinduktion, die auch die in Abschnitt 8 erwähnte Windungszahl n aufnimmt. Wendet man Gl. (47) auf das Vakuum an, (Index 0), so ist bei konstantem I :

$$\Phi_0 = L_0 I \quad (48)$$

Hingegen bietet man dem Kraftfluss ein magnetisches Material von der Permeabilität μ und ermöglicht ihm einen geschlossenen Weg, so erhält man mit dem Index μ :

$$\Phi_\mu = L_\mu I \quad (49)$$

Durch Messung lässt sich feststellen:

$$L_\mu = \mu_r L_0 \quad \mu_r > 1 \quad (50)$$

und damit

$$\Phi_\mu = \mu_r \Phi_0 \quad (51)$$

wobei ist:

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (52)$$

(μ_r relative Permeabilität, μ_0 Permeabilität des Vakuums).

Die Selbstinduktivität ist der Fläche F proportional und dem mittleren Weg des Flusses l_m umgekehrt proportional, so dass mit der Proportionalitätskonstanten k die Gleichungen gelten:

$$L_0 = k \mu_0 \frac{F}{l_m} \quad (53)$$

$$L_\mu = k \mu \frac{F}{l_m} = k \mu_r \mu_0 \frac{F}{l_m}$$

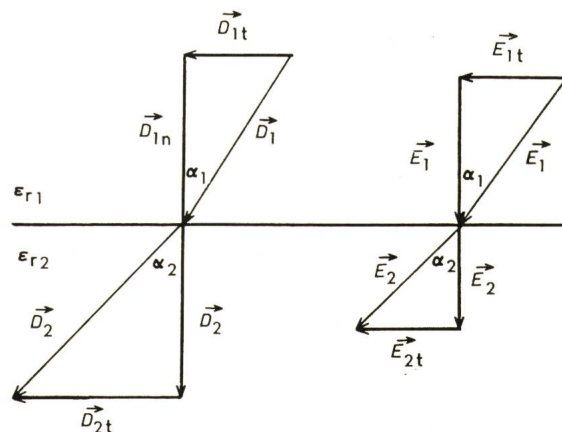


Fig. 10
Verhalten von D und E bei schräger Trennfläche

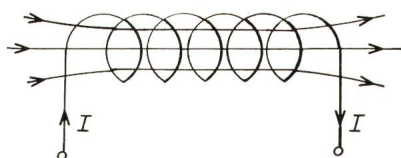


Fig. 11
Stationärer Strom mit Spule
als Verbraucher

Die Grösse l_m besteht bei einer Spule aus dem mittleren Innen- und Aussenweg (l_i und l_a) des Flusses. Da der Weg durch verschieden grosse Flächen F_i (innen) und F_a (ausser) führt, ist er jeweilig auf dieselben zu beziehen. Es gilt:

$$\frac{l_m}{F} = \frac{l_i}{F_i} + \frac{l_a}{F_a}$$

Bei einer im Vakuum befindlichen Spule ist $F_a \gg F_i$, so dass mit guter Näherung

$$\frac{l_m}{F} = \frac{l_i}{F_i}$$

gesetzt werden darf, wobei l_i als Innenweg etwa der Länge der Spule entspricht. Nach *Kammerloher* [6] gilt dieses für lange Zylinderspulen. Ist die Länge das zehnfache des Durchmessers, so ist die Induktivität um 4 % kleiner als der mit der Näherungsformel berechnete Wert, was einem grösseren l_m entspricht. Spulen mit Eisenkern sind häufig völlig von dem gleichen Material eingeschlossen. Hierbei ist allerdings F_a nicht wesentlich grösser als F_i , so dass mit einem grösseren Fehler gerechnet werden muss. In Fig. 13 ist daher l_m grösser als die Spulenlänge gezeichnet. Der Sinn der Betrachtung — auf den es hier allein ankommt — wird dadurch nicht gestört.

Die Gl. (49), (50) und (53) führen zu (\mathbf{B} und l_m gleiche Richtung):

$$\mathbf{B}_\mu = \frac{\Phi_\mu}{F} = k \mu \frac{I}{l_m} \quad \mathbf{B}_0 = \frac{\Phi_0}{F} = k \mu_0 \frac{I}{l_m} \quad (54)$$

und somit zu:

$$\mathbf{B}_\mu = \mu_r \mathbf{B}_0 \quad (55)$$

Hierbei ist die Grösse μ_r abhängig von dem aufgewendeten konstanten Strom I und damit vom Kraftfluss Φ_μ und von der Induktion \mathbf{B}_μ :

$$\mu_r = \mu_r(\mathbf{B}_\mu) \quad (56)$$

Verfährt man entsprechend den Gl. (26) und (32) bis (35) und setzt allgemein:

$$\frac{k I}{l_m} = \mathbf{H} \quad (57)$$

so gilt im vorliegenden Fall, wegen der Konstanz von I :

$$\mathbf{H}_\mu = \mathbf{H}_0 \quad (58)$$

Aus den Gl. (54) folgt mit der Gl. (58):

$$\mathbf{B}_\mu = \mu_r \mathbf{H}_\mu = \mu_r \mathbf{H}_0 \quad (59)$$

Während die Induktion für ein Material der Permeabilität nicht mit der im Vakuum übereinstimmt, sind die mit \mathbf{H}_μ und \mathbf{H}_0 bezeichneten — als Feldstärke bekannten — Grössen bei konstantem Strom in beiden Fällen gleich.

Der Feldstärke soll aber keine besondere Bedeutung beimessen werden [5]. *Wallot* schreibt von einer Hilfsgrösse \mathbf{H} [7], *Grave* von einer experimentell nicht bestimmbarer Rechengrösse [2].

10. Die Stromquelle und ihre Wirkung auf eine Spule bei konstantem magnetischem Fluss

Will man in dem Verbraucher einen konstanten magnetischen Fluss haben, gleichgültig, ob sich die Spule in Vakuum oder in magnetischem Material befindet, so muss man nach Gl. (47) zwei verschiedene Ströme wählen, wie folgender Versuch bestätigt:

Nach der Messung des Flusses eines Stabmagneten wurde derselbe isoliert von Eisenfeilspänen umgeben. Jetzt wurde ein wesentlich höherer Fluss gemessen, der sich nach Klopfen der Späne vergrösserte.

Für das Vakuum gilt:

$$\Phi_m = L_0 I_0 \quad (60)$$

und für magnetisches Material

$$\Phi_m = L_\mu I_\mu \quad (61)$$

Da die Beziehung (50) auch hier gilt, so findet man:

$$I_0 = \mu_r I_\mu \quad I_0 > I_\mu \quad (62)$$

Bei magnetischem Material ist ein viel kleinerer Strom erforderlich, da dasselbe dem Fluss einen viel geringeren Widerstand entgegenstellt. Für die Induktion liefern die Gl. (46), (60) und (61):

$$\mathbf{B}_\mu = \mu_r \mu_0 \frac{I_\mu}{l_m} \quad \mathbf{B}_0 = \mu_0 \frac{I_0}{l_m} \quad (63)$$

Mit den Gl. (63) und nach Voraussetzung ist bei konstantem Fluss die Induktion in magnetischem Material und im Vakuum gleich:

$$\mathbf{B}_\mu = \mathbf{B}_0$$

Sowohl die Induktion \mathbf{B}_μ — falls mechanisch benutzbar — als auch \mathbf{B}_0 (Luftspalt) stehen für Anwendungen zur Verfügung. Dadurch wird die Darstellung der Spule als Verbraucher nicht beengt.

Für die Feldstärke gilt nach Gl. (57):

$$\mathbf{H}_\mu = \frac{k I_\mu}{l_m} \quad \mathbf{H}_0 = \frac{k I_0}{l_m} \quad (65)$$

und wegen Gl. (62):

$$\mathbf{H}_\mu = \frac{1}{\mu_r} \mathbf{H}_0 \quad (66)$$

Die Feldstärken sind in den beiden Fällen verschieden.

Ähnlich der Polarisation eines Dielektrikums liegen die Verhältnisse in einem Material mit der Permeabilität μ . Hier sei auf die Darstellungen in der Literatur, z. B. [1], verwiesen.

11. Die zusammenziehende Kraft in einem Kondensator mit Vakuumzwischenstschicht

Die Eigenschaft des Kondensators als Verbraucher wird dadurch unterstrichen, dass die Ladung Q eine Annäherung der Kondensatorplatten hervorruft. Die dazu erforderliche Kraft sei im folgenden berechnet. Fig. 12 zeigt den Kondensator mit dem Plattenabstand d und der Annäherung dd .

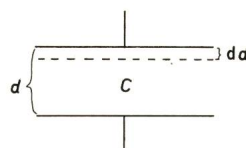


Fig. 12
Kondensator mit Plattenverschiebung
durch die Kraft der Ladungen

Für die durch die Ladung Q im Kondensator gespeicherte Arbeit A_0 gilt:

$$A_0 = \frac{Q^2}{2 C_0} \quad (67)$$

mit der Kapazität C_0 .

Weiterhin benötigt man die bekannten Formeln:

$$Q = C_0 U_0 \quad (68)$$

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{F}{d} \quad (69)$$

worin U_0 die durch Q erzeugte Spannung, ε_0 die Dielektrizitätskonstante im Vakuum und F die Fläche der Kondensatorplatten bedeuten.

Wird durch Zusammendrücken der Platten um dd die Kapazität grösser, so nimmt nach Gl. (67) die gespeicherte Energie ab. Sei K_0 die diesen Vorgang herbeiführende Kraft, so ist:

$$dA_0 = -K_0 dd \quad (70)$$

Die Gl. (69) und (70) liefern differenziert:

$$dC_0 = -\varepsilon_0 \frac{F}{d^2} dd \quad (71)$$

$$dA_0 = -\frac{Q^2}{2 C_0^2} dC_0 = \frac{Q^2}{2 C_0^2} \cdot \frac{\varepsilon_0 F}{d^2} dd \quad (72)$$

und zusammengefasst mit den Gl. (69) und (70)

$$K_0 = -\frac{Q^2}{2 C_0^2} \cdot \frac{\varepsilon_0 F}{d^2} = -\frac{A_0}{d} \quad (73)$$

12. Die zusammenziehende Kraft in einem Kondensator mit dielektrischer Zwischenschicht

Befindet sich ein beliebiges Dielektrikum mit der Konstante ε und der relativen Konstante ε_r zwischen den Kondensatorplatten, so ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (74)$$

Die Gl. (67) bis (70) gelten mit dem Index ε anstelle des Index 0 auch hier, wobei Q seinen Wert beibehalten soll:

$$A_\varepsilon = \frac{Q^2}{2 C_\varepsilon} \quad (75)$$

$$Q = C_\varepsilon U_\varepsilon \quad (76)$$

$$C_\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{F}{d} \quad (77)$$

$$dA_\varepsilon = -K_\varepsilon dd \quad (78)$$

Die Differentiation der Gl. (77) und (75) liefert:

$$dC_\varepsilon = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{F}{d^2} dd \quad (79)$$

$$dA_\varepsilon = -\frac{Q^2}{2 C_\varepsilon^2} dC_\varepsilon \quad (80)$$

und zusammengefasst:

$$K_\varepsilon = -\frac{Q^2}{2 C_\varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 F}{d^2} = -\frac{A_\varepsilon}{d} \quad (81)$$

Mit der Formel

$$C_\varepsilon = \varepsilon_r C_0 \quad (82)$$

folgen die Beziehungen:

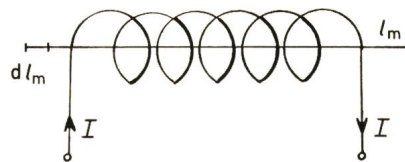


Fig. 13
Spule mit Zusammenziehung durch die Kraft des Stromes

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_r} A_0 \quad (83)$$

$$K_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_r} K_0 \quad (84)$$

Beim Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätskonstante ε_r und konstanter Ladung ist die Kraft kleiner als bei Vakuum, entsprechend dem Coulombschen Gesetz, das allerdings nur für Punktladungen gilt.

13. Die zusammenziehende Kraft in einer Spule im Vakuum

Bekanntlich ziehen sich gleichnamige Ströme an. Wird eine Spule von einem Strom durchflossen, so ziehen sich die einzelnen Windungen an, und die Länge der Spule nimmt ab. Auf dieser Grundlage arbeitet die Rogetsche Spirale [1], die als Unterbrecher dienen kann.

Fig. 13 zeigt die Spule mit der magnetischen Länge l_m . Die Induktivität im Vakuum sei L_0 . Bei dem Strom I ist der Energieinhalt A_0 :

$$A_0 = \frac{L_0 I^2}{2} \quad (85)$$

Die Induktivität der Spule sei:

$$L_0 = \mu_0 \frac{k}{l_m} \quad (86)$$

wobei k eine nicht interessierende Konstante ist.

Da abnehmendes l_m nach den Gl. (85) und (86) den Energieinhalt erhöht, so kann man für die Energieänderung schreiben:

$$dA_0 = K_0 dl_m \quad (87)$$

mit K_0 als gesuchter Kraft.

Die Ableitungen der Gl. (86) und (85) erbringen:

$$dL_0 = -\frac{\mu_0 k}{l_m^2} dl_m \quad (88)$$

$$dA_0 = \frac{I^2}{2} dL_0 = -\frac{\mu_0 k}{l_m^2} dl_m \quad (89)$$

und mit Gl. (87):

$$K_0 = -\frac{I^2}{2} \cdot \frac{\mu_0 k}{l_m^2} = -\frac{A_0}{l_m} \quad (90)$$

14. Die zusammenziehende Kraft in einer Spule mit einem Kern der Permeabilität μ

Die im vorigen Abschnitt behandelte Spule habe einen Kern aus magnetischem Material mit der Permeabilität μ und der relativen Permeabilität μ_r :

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (91)$$

Der Kern sei im Aussenraum geschlossen. Die Beziehungen des vorhergehenden Abschnittes können bei gleichem Strom I mit dem Index μ anstatt 0 übernommen werden:

$$A_\mu = \frac{L_\mu I^2}{2} \quad (92)$$

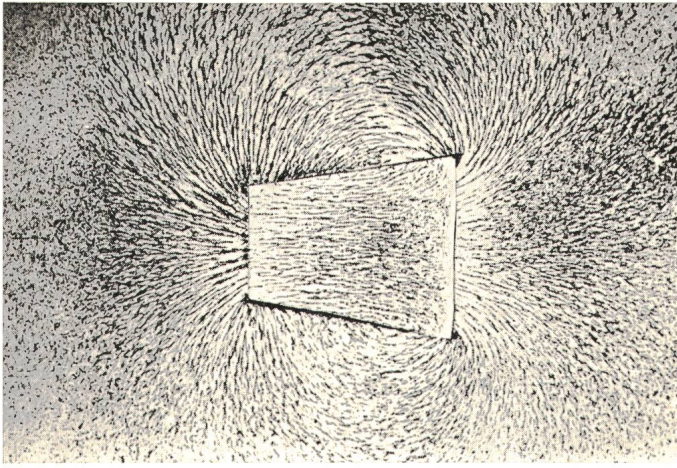


Fig. 14
Feldbild einer Spule in Form eines Kegelstumpfes

$$L_{\mu} = \mu_r \mu_0 \frac{k}{l_m} \quad (93)$$

$$dA_{\mu} = K_{\mu} dl_m \quad (94)$$

Die Ableitungen sind:

$$dL_{\mu} = -\frac{\mu_r \mu_0 k}{l_m^2} dl_m \quad (95)$$

$$dA_{\mu} = \frac{I^2}{2} dL_{\mu} = -\frac{I^2}{2} \cdot \frac{\mu_r \mu_0 k}{l_m^2} dl_m \quad (96)$$

Damit wird:

$$K_{\mu} = -\frac{I^2}{2} \cdot \frac{\mu_r \mu_0 k}{l_m^2} = -\frac{A_{\mu}}{l_m} \quad (97)$$

Verbindet man die Ergebnisse der Abschnitte 13. und 14. unter Hinzunahme von

$$L_{\mu} = \mu_r L_0 \quad (98)$$

so folgt:

$$A_{\mu} = \mu_r A_0 \quad (99)$$

$$K_{\mu} = \mu_r K_0 \quad (100)$$

Die Kraft wird bei dem Material der Permeabilität μ_r mit dem Faktor μ_r vervielfacht, wie auch der Versuch bestätigt.

Bringt man Eisenfeilspäne zwischen die wirkenden Pole einer in Luft austarierten magnetischen Waage, so verstärkt sich die anziehende oder abstossende Kraft. Der Versuch lässt sich auch so auffassen, als ob der Abstand der wirkenden Pole verringert wird.

15. Das Ersatzbild eines Magneten

Alle Naturvorgänge werden durch ein Ersatzbild dargestellt, worunter auch eine ausgedehnte Theorie verstanden werden kann. Ein Ersatzbild sollte immer so einfach sein, dass es die benötigten Erklärungen liefert. Reicht es nicht aus, so muss es erweitert oder ein völlig neues Ersatzbild gefunden werden.

Das Ersatzbild eines Magneten schien nach den Versuchen mit Eisenfeilspänen völlig klar. Von zwei Punkten an den Stabenden gehen sich verbindende Feldlinien aus. Den Punkten werden im Vergleich mit zwei elektrostatischen entgegengesetzt gleichen Ladungen zwei Quellen zugeordnet, in denen sich — anstelle der Elektronen — magnetische Mengen befinden sollen. Die magnetischen Mengen machen sich in ihrer Umgebung als Feldlinien bemerkbar. Dieses sich anbietende Ersatzbild ist

durchaus brauchbar. Es ist auch noch brauchbar, wenn man weiss, dass es gar keine magnetische Mengen gibt [5]. Auch die Feldlinien entsprechen nur annähernd den Linien zwischen entgegengesetzten gleichen elektrostatischen Ladungen.

Nach dem Verhalten eines stromdurchflossenen Solenoids, das in der Literatur allgemein als dem eines Stabmagneten gleichgestellt wird, lässt sich nach der Ampèreschen Molekulartheorie ein anderes Ersatzbild aufstellen. Dasselbe erlaubt auch den Vergleich eines Toroides mit einem Luftspalt mit einem Hufeisenmagneten. Den ausführlichen Betrachtungen in [1] sei entnommen, dass die um den positiven Kern kreisenden Elektronen echte Ströme darstellen, die im Gegensatz zu Leitungsströmen keine Joulesche Wärme erzeugen. Die Zusammensetzung dieser Molekularströme führt zu einem Ersatzbild, das dem Strom in einem Solenoid entspricht. Ein Solenoid hat den vom hindurchfliessenden Strom I erzeugten Induktionsfluss, den man — auf den Flächenquerschnitt bezogen — als Induktion \mathbf{B} kennt. Es besitzt keine Quellpunkte wie im elektrostatischen Fall. Es gibt nur durchgehende Induktionslinien.

Bei einem Magneten sind die Molekularmagnete — vgl. ein Kristallgitter — gleichmässig über die Form verteilt. Eine Theorie, die die Wirkung einer solchen Verteilung als Anhäufung in zwei Quellpunkten (magnetischen Mengen) wiedergibt, ist nicht vorstellbar. Nimmt man zwei angehäufte Mengen an und trennt zwei aneinander geschobene gleiche Magnete oder einen zur schnellen Halbierung vorbereiteten Stabmagneten in kürzester Zeit, so müssten sich in der gleichen Zeit die neuen magnetischen Mengen anhäufen. Der Beitrag der einzelnen Molekularmagnete ist sicherlich von ihrem Platz in dem Magneten abhängig, doch ist eine Häufung in zwei Punkten nicht anzunehmen.

Die Feldlinien täuschen die beiden Punkte vor. Denkt man sich zu diesen Feldlinien die dazu senkrecht stehenden Potentiallinien, so kommt man damit zu der Vorstellung von zwei Punkten mit in ihnen gehäuften Mengen, ähnlich dem Verlauf von zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen (Fig. 3).

Die Gleichwertigkeit der beiden Punkte oder Pole und des aus denselben austretenden Flusses kann man durch geeignete Formgebung des Solenoids ändern. Ein Solenoid in der Form eines Kegelstumpfes, dessen Umrisse das Feldlinienbild Fig. 14 erkennen lässt, zeigt einen Unterschied des Flusses an beiden Enden, wobei möglicherweise der Fluss gleich und nur die

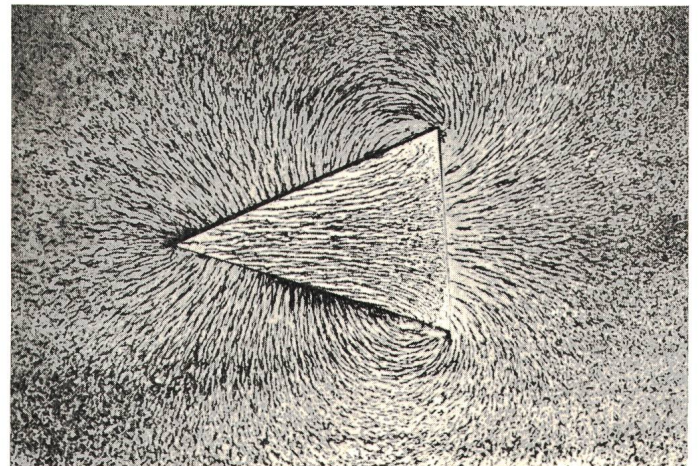


Fig. 15
Feldbild einer Spule in Form eines Kegels

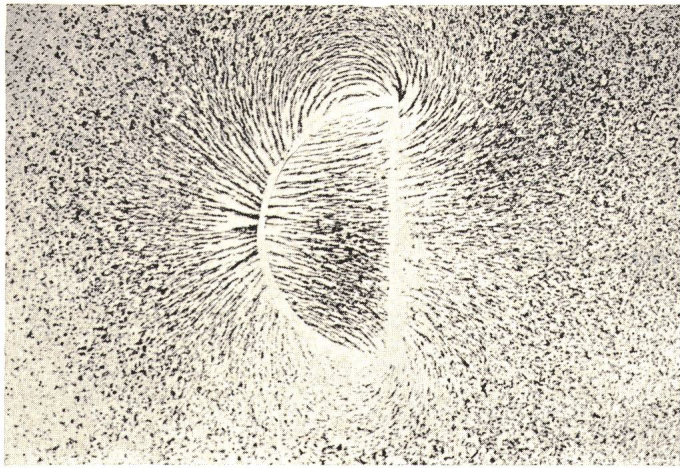


Fig. 16
Feldbild einer Spule in Form einer Halbkugel

Dichte verschieden ist. Nimmt man einen Kegel (Fig. 15), so erscheint ein sehr geringer Fluss an der Spitze, der von dem des Bodens weit übertroffen wird. Beim Kegelmantel verbindet der aussen verlaufende Fluss die beiden Bodenflächen des Kegels, während der Aussenfluss des Kegels vom Boden aus in kurzem Abstand den Kegelmantel trifft, also keinen Weg bis zur Spitze findet. Die Halbkugel (Fig. 16) ähnelt in ihrem Verhalten dem Kegelmantel. Ein Kegel aus magnetischem Eisen zeigt gleiches Verhalten wie die Kegelspule.

Eine Form zu finden, bei der die Abstrahlung von einem Punkt radial — wie bei einem Monopol — erfolgt, erscheint nach den Feldbildern aussichtslos.

Man wird vielleicht einmal Molekularmagnete isolieren können, jedoch hat jeder Kreisstrom sozusagen zwei Seiten, deren Wirkung man sich als Pole vorstellen kann. Diese Pole

existieren jedoch nicht, und sind demzufolge auch gar nicht zu trennen. Man hofft immer noch auf den magnetischen Monopol [8] als dem Gegenstück zur elektrischen Ladung. Wenn man den Gedanken an einen magnetischen Monopol nicht völlig fallenlassen will, so muss man ihn umformulieren. Geeignete Anhäufungen von Molekularmagneten (in den Fig. 14...16 wurde nur eine verschiedene Formgebung gezeigt, die nur eine Anhäufungsmöglichkeit darstellt) können unsymmetrische Feldlinien erzeugen und vielleicht einen Pol völlig unterdrücken. Vielleicht lässt sich auch die symmetrische Wirkung eines Kreisstromes durch zusätzliche Effekte aufheben. In keinem Fall scheint jedoch ein einzelner Monopol möglich.

Für die Versuche zu den Fig. 14...16 dankt der Autor Dr. W. Bodenberger und H. Roth.

Literatur

- [1] L. Bergmann und C. Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. Band 2: Elektrizität und Magnetismus. 6. Auflage. Berlin/New York, De Gruyter, 1971.
- [2] H.-F. Grave: Grundlagen der Elektrotechnik I. Frankfurt/M., Akademische Verlagsgesellschaft, 1971.
- [3] G. Jentsch: Grundlehren der Elektrotechnik. Teil I: Das elektrostatische Feld und der Gleichstrom. Berlin, Schiele und Schön, 1949.
- [4] K. Küpfmüller: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 9. Auflage. Berlin, Julius Springer Verlag, 1968.
- [5] A. von Weiss: Übersicht über die theoretische Elektrotechnik. 1. Teil: Die physikalisch-mathematischen Grundlagen. 2. Auflage. Füssen, Winter, 1954.
- [6] J. Kammerloher: Hochfrequenztechnik. I.: Elektromagnetische Schwingungskreise. Leipzig, C. F. Winter'sche Verlagshandlung, 1936.
- [7] J. Wallot: Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik. 4. Auflage. Berlin, Julius Springer Verlag, 1944.
- [8] J. Fricke: Batavia 500 GeV. Physik in unserer Zeit 2(1971)6, S. 161.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. W. Herzog, Direktor des Instituts für Elektrotechnik der Universität Mainz, Joh.-Joachim-Becher-Weg 21, D-6500 Mainz.