Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 64 (1973)

Heft: 15

Artikel: Théorie générale des lignes couplées

Autor: Gardiol, F. / Decréton, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-915578

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV) und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

Théorie générale des lignes couplées

Par *F. Gardiol* et *M. Decréton*

621.391 : 537.811

Lorsque deux systèmes de transmission sont proches l'un de l'autre, les champs électromagnétiques produits dans un des systèmes interagissent avec l'autre. Le couplage résultant donne lieu dans certains cas à des applications intéressantes (coupleurs); dans d'autres cas, il est nettement indésirable (diaphonie). L'étude présentée ici considère deux lignes de transmission (au sens large du terme) de caractère linéaire et réciproque. Elles sont représentées, en régime sinusoïdal permanent, par leurs schémas électriques équivalents qui comportent des impédances série et des admittances parallèle. La solution générale du problème est déterminée. L'introduction des conditions aux limites (excitation et terminaisons) permet d'obtenir la solution complète du problème. On considère finalement le cas particulier pour lequel une seule des lignes est alimentée en courant.

Bei genügend kleinem Abstand zwischen zwei Übertragungssystemen wird ein System durch die elektromagnetischen Felder des anderen beeinflusst. Diese Kopplung hat in einigen Fällen interessante Anwendungen (beispielsweise bei sog. Kopplern); in anderen Fällen ist sie unerwünscht (Nebensprechen). Die folgende Abhandlung geht von zwei Übertragungsleitungen (in weiterem Sinne) aus, die sich linear und reziprok verhalten. Bei Betrieb mit sinusförmigen Zeitfunktionen sind diese Leitungen durch ihre Ersatzschaltbilder darstellbar, welche Serie-Impedanzen und Parallel-Admittanzen enthalten. Die allgemeine Lösung des Problems wird zunächst bestimmt. Das Einführen der Randbedingungen (Anregung, Abschlüsse) erlaubt, die Gesamtlösung aufzustellen. Zum Schluss wird ein Sonderfall studiert, wo eine einzige Leitung stromgespeist wird.

1. Introduction

Un signal qui se propage sur une ligne de transmission ouverte (ligne bifilaire, microbande, guide diélectrique, etc.) donne naissance à des champs électromagnétiques au voisinage de la ligne. En l'absence de rayonnement, c'est-à-dire lorsque les dimensions et les propriétés des matériaux formant la ligne sont choisis pour que celle-ci fonctionne comme une ligne de transmission et non comme une antenne, les champs électromagnétiques décroissent rapidement dans le plan transverse. Il en résulte que la puissance électromagnétique du signal est concentrée dans le voisinage immédiat de la ligne.

Toutefois, dès qu'une seconde ligne est placée près de la première, les champs électromagnétiques de celle-ci induisent un signal sur la seconde ligne. On appelle couplage capacitif l'interaction due au champ électrique, couplage inductif celle due au champ magnétique. Ces couplages sont de nature distribuée, ils sont d'autant plus forts que les lignes sont proches l'une de l'autre et peuvent donner lieu à des effets d'autant plus prononcés que les lignes sont longues.

Ce phénomène est utilisé en pratique pour réaliser des coupleurs directionnels, éléments couramment utilisés en hyperfréquences pour prélever une partie d'un signal dont on veut mesurer les propriétés (puissance, fréquence, spectre) [1][1]). Il permet également d'obtenir un transfert de puissance entre deux systèmes de nature différente, par exemple entre une onde électromagnétique et un faisceau d'électrons (carcinotron, tube à ondes progressives, accélérateur linéaire) [2], ou entre une onde électromagnétique et une onde acoustique (transducteurs piézoélectriques).

Dans de nombreuses autres applications, cet effet est hautement indésirable. Il donne lieu à la diaphonie entre lignes téléphoniques, provoque du bruit ou encore d'autres effets nuisibles lorsqu'une ligne de transmission d'information est proche d'une ligne de transmission de puissance, etc.

L'étude des lignes couplées a souvent été limitée à la considération de certains cas particuliers: couplage faible, lignes de même nature (ou même lignes identiques), lignes sans pertes, une seule direction de propagation [3]. On considère ici de façon rigoureuse et complète un système comportant deux lignes de transmission uniformes dans la direction de propagation (parallèle à l'axe des x) et de caractéristique linéaire et réciproque. La théorie développée permet l'étude de lignes (au sens large) de nature différente, comportant des pertes et de la dispersion. Le couplage entre les deux lignes peut également comporter des pertes [4] et être de nature dispersive. La théorie des lignes couplées trouve aussi des applications dans l'étude de guides d'ondes chargés. En effet, l'introduction de matériaux diélectriques, résistifs ou encore ferrimagnétiques provoque un couplage entre les modes qui existaient dans le guide vide. L'étude de ce problème à l'aide des lignes couplées permet une résolution approchée simple lorsque le guide n'est pas trop chargé [5].

Il faut encore noter que des problèmes similaires existent dans d'autres domaines; c'est en particulier le cas des résonateurs couplés, par exemple en mécanique celui de deux pendules connectés par un ressort [3]. La méthode présentée ici pour les lignes couplées pourra facilement être adaptée.

[1]) Voir la bibliographie à la fin de l'article.

2. Définition du modèle et résolution des équations

Deux lignes uniformes infiniment longues sont disposées parallèlement à l'axe des x. Elle sont excitées chacune par un signal alternatif sinusoïdal de même fréquence en régime permanent. On utilise alors la notation complexe, les courants et tensions instantanées étant donnés par:

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\, U_i(x)\, e^{j\omega t}\right) \\ i_i(x,t) &= \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\, I_i(x)\, e^{j\omega t}\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

où $i = 1{,}2$ (correspondant aux deux lignes)

et $\omega = 2\pi f$ est la pulsation

Comme le système est linéaire, l'étude d'autres types d'excitation peut être faite à l'aide du principe de superposition (développement en série ou en transformée de Fourier).

Une section de longueur infinitésimale dx de ligne couplée est représentée par le schéma équivalent de la fig. 1. La ligne No. 1 est représentée par l'impédance série Z_1 dx et l'admittance parallèle Y_1 dx; la ligne No. 2 par Z_2 dx et Y_2 dx, les couplages par Z_M dx et Y_M dx. Les impédances et admittances sont généralement complexes et dépendent de la fréquence. Elles deviennent purement imaginaires pour un système sans pertes. Les tensions et courants satisfont aux équations différentielles suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{dU_i}{dx} &= -Z_i I_i - Z_M I_j \\ \frac{dI_i}{dx} &= -Y_i U_i - Y_M(U_i - U_j) = -Y_i' U_i + Y_M U_j \end{aligned} \qquad (2)$$

où $i = 1{,}2$ et $j = 3 - i$

On a posé $Y_i' = Y_i + Y_M$ pour simplifier l'écriture. Ce système de 4 équations peut être représenté de façon matricielle:

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & Z_1 & Z_M \\ 0 & 0 & Z_M & Z_2 \\ Y_i' & -Y_M & 0 & 0 \\ -Y_M & Y_2' & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Pour résoudre ce système, on cherche les valeurs propres de la matrice définie en (3), qui sont solutions de l'équation d'ordre 4:

$$\gamma^4 - \gamma^2(P_1 + P_2) + P_1 P_2 - Q_1 Q_2 = 0 \qquad (4)$$

où on a défini:

$$\begin{aligned} P_i &= Z_i Y_i' - Z_M Y_M \qquad i = 1{,}2 \\ Q_i &= Z_M Y_j' - Z_i Y_M \qquad j = 3 - i \end{aligned} \qquad (5)$$

On définit ainsi les deux exposants de propagation:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left(\bar{P} + \sqrt{\Delta P^2 + Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \gamma_2 &= \left(\bar{P} - \sqrt{\Delta P^2 + Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \qquad (6)$$

Avec:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{Z_1 Y_1' + Z_2 Y_2'}{2} - Z_M Y_M \\ \Delta P &= \frac{P_1 - P_2}{2} = \frac{Z_1 Y_1' - Z_2 Y_2'}{2} \\ Q^2 &= Q_1 Q_2 = (Z_M Y_2' - Z_1 Y_M)(Z_M Y_1' - Z_2 Y_M) \end{aligned} \qquad (7)$$

On détermine alors les 4 vecteurs propres correspondant aux solutions positives et négatives en γ_1 et en γ_2, qui apparaissent dans la solution générale:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = A_1 e^{-\gamma_1 x}\begin{bmatrix} \gamma_1 K \\ \gamma_1 Q_2 \\ Y_1'K - Y_M Q_2 \\ -Y_M K + Y_2' Q_2 \end{bmatrix} + B_1 e^{+\gamma_1 x}\begin{bmatrix} -\gamma_1 K \\ -\gamma_1 Q_2 \\ Y_1'K - Y_M Q_2 \\ -Y_M K + Y_2' Q_2 \end{bmatrix} + A_2 e^{-\gamma_2 x}\begin{bmatrix} \gamma_2 Q_1 \\ -\gamma_2 K \\ Y_1' Q_1 + Y_M K \\ -Y_M Q_1 - Y_2' K \end{bmatrix} + B_2 e^{+\gamma_2 x}\begin{bmatrix} -\gamma_2 Q_1 \\ \gamma_2 K \\ Y_1' Q_1 + Y_M K \\ -Y_M Q_1 - Y_2' K \end{bmatrix} \qquad (8)$$

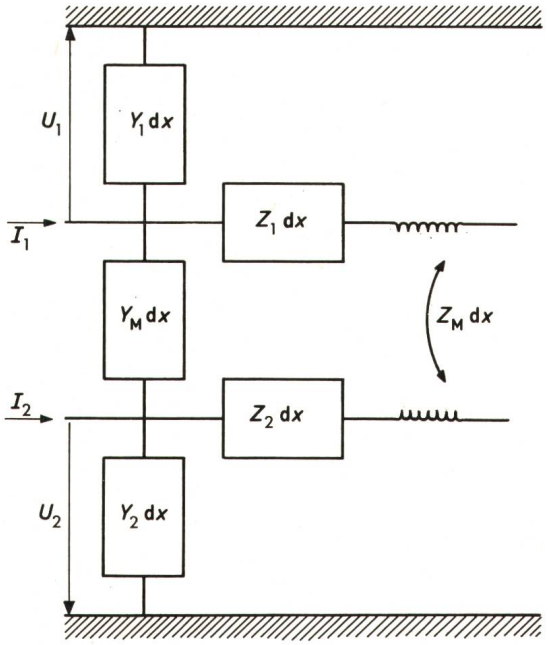


Fig. 1
Schéma électrique équivalent d'une longueur infinitésimale d$_x$ de lignes couplées
Désignations voir dans le texte

où on a posé $K = \Delta P + \sqrt{\Delta P^2 + Q^2}$ et où A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des constantes d'intégration dépendant des conditions aux limites. Les 4 termes de la solution correspondent respectivement aux ondes progressives ($e^{-\gamma x}$) et régressives ($e^{+\gamma x}$) des deux modes caractérisés par les exposants de propagation γ_1 et γ_2 [2]).

3. Conditions aux limites

L'étude de deux lignes couplées infiniment longues a permis d'obtenir la solution générale de (2). Pour déterminer les 4 constantes d'intégration qui apparaissent en (8), il faut maintenant tenir compte des conditions aux limites. En théorie, le problème est complètement résolu lorsqu'on connaît les tensions et courants en un point déterminé le long de la ligne; il est simple alors de déterminer les 4 constantes en appliquant (8) [6]. Pratiquement, toutefois, le problème est nettement plus complexe, car les conditions aux limites n'apparaissent pas toutes au même endroit: les deux lignes sont connectées à une extrémité à des sources de signal (deux conditions), à l'autre extrémité à des charges (deux conditions). Si ces deux extrémités coïncident, il n'y a évidemment pas de ligne.

[2]) Remarque: dans le cas particulier de deux lignes identiques, où $Y_1' = Y_2'$ et $Z_1' = Z_2'$, on trouve pour l'un des modes $U_1 = U_2$ et pour l'autre $U_1 = -U_2$, on les appelle alors respectivement mode pair et mode impair.

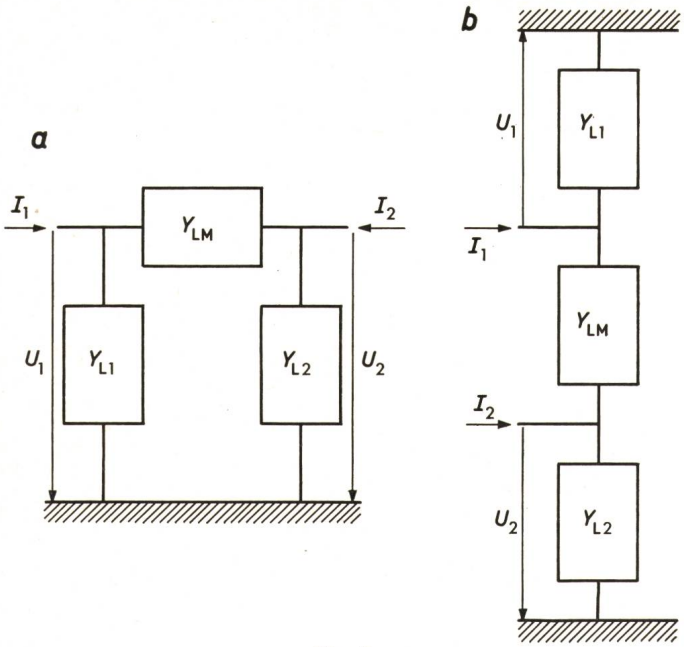


Fig. 2
Schéma équivalent d'un système général de terminaisons
a représentation en π
b en bout de ligne
Désignations voir dans le texte

3.1 *Effet des terminaisons*

Les deux lignes couplées sont terminées en $x = L$ par un système de charges linéaires et réciproques. Ce système peut être défini par son quadripôle équivalent, que nous représentons ici par un montage en π (fig. 2).

Les conditions imposées par les charges sont les suivantes:

$$I_i(L) = Y_{Li}\, U_i + Y_{LM}\,(U_i - U_j) = Y_{Li}'\, U_i - Y_{LM}\, U_j \qquad (9)$$

où on a défini

$$Y'_{Li} = Y_{Li} + Y_{LM}$$

A l'aide de la solution générale (8) on obtient après quelques calculs les relations suivantes liant les constantes A_i et B_i:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

où:

$$a_{ii} = [(-1)^{i-1} K\,(\gamma_i Y_{Li}' - Y'_i) - Q_{3-i}\,(\gamma_i Y_{LM} - Y_M)]\, e^{-\gamma_i L}$$
$$a_{ij} = [(-1)^{i-1} K\,(\gamma_j Y_{LM} - Y_M) + Q_i\,(\gamma_j Y_{Li}' - Y_i')]\, e^{-\gamma_j L}$$
$$\text{avec } i \neq j \qquad (11)$$

Les termes en b_{ij} sont obtenus en changeant le signe de γ_i dans les relations (11). On définit ensuite des coefficients de réflexion généralisés Γ_{ij} à l'aide de:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \qquad (12)$$
$$= \frac{1}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \begin{bmatrix} a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} & a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12} \\ -a_{11}b_{21} + a_{21}b_{11} & -a_{12}b_{21} + a_{22}b_{11} \end{bmatrix}$$

Pour que les lignes soient adaptées, c'est-à-dire que les amplitudes des ondes réfléchies B_1 et B_2 soient nulles quels que soient A_1 et A_2, il faut que tous les Γ_{ij} soient nuls, c'est-à-dire que les a_{ij} doivent être nuls. Cette condition est satisfaite pour les admittances de charge suivantes:

$$Y_{L1} = \frac{Y_1\,(\gamma_2 K^2 + \gamma_1 Q^2) + Y_2 K Q_2\,(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1\gamma_2\,(K^2 + Q^2)}$$
$$Y_{L2} = \frac{Y_2\,(\gamma_1 K^2 + \gamma_2 Q^2) + Y_1 K Q_1\,(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1\gamma_2\,(K^2 + Q^2)} \qquad (13)$$
$$Y_{LM} = \frac{Y_M\,(K^2\gamma_1 + Q^2\gamma_2) - Y_1' K Q_1\,(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1\gamma_2\,(K^2 + Q^2)} =$$
$$= \frac{Y_M\,(K^2\gamma_2 + Q^2\gamma_1) - Y_2' K Q_2\,(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1\gamma_2\,(K^2 + Q^2)}$$

On constate qu'il n'est pas possible d'adapter deux lignes couplées à l'aide de deux charges terminant chacune des lignes; il faut en général une troisième terminaison placée entre les deux lignes [7].

3.2 *Excitation*

Les deux lignes sont connectées en $x = 0$ à un système de sources, représentées par des sources de courant I_{01} et I_{02} comportant des admittances en parallèle (fig. 3). Les tensions et courants en $x = 0$ doivent alors satisfaire à:

$$I_{0i} = I_i(0) + Y_{Gi} U_i(0) + Y_{GM}[U_i(0) - U_j(0)] =$$
$$= I_i(0) + Y_{Gi}' U_i(0) - Y_{GM} U_j(0) \qquad (14)$$

avec $j = 3 - i$

en posant

$$Y_{Gi}' = Y_{Gi} + Y_{GM}$$

On détermine les amplitudes des deux ondes progressives A_i à l'aide de (8), en tenant compte des conditions introduites par les charges (12):

$$\begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} + d_{11}\Gamma_{11} + d_{12}\Gamma_{21} & c_{12} + d_{11}\Gamma_{12} + d_{12}\Gamma_{22} \\ c_{21} + d_{21}\Gamma_{11} + d_{22}\Gamma_{21} & c_{22} + d_{21}\Gamma_{12} + d_{22}\Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

avec:

$$c_{ii} = (-1)^{i-1} K\,(Y_i' + Y_{Gi}'\gamma_i) - Q_{3-i}\,(Y_M + Y_{GM}\gamma_i)$$
$$c_{ij} = Q_i\,(Y_i' + Y_{Gi}'\gamma_i) + (-1)^{i-1} K\,(Y_M + Y_{GM}\gamma_j) \qquad (16)$$
$$i \neq j$$

Les termes en d_{ij} sont obtenus en inversant simultanément les signes de γ_i et γ_j dans (16).

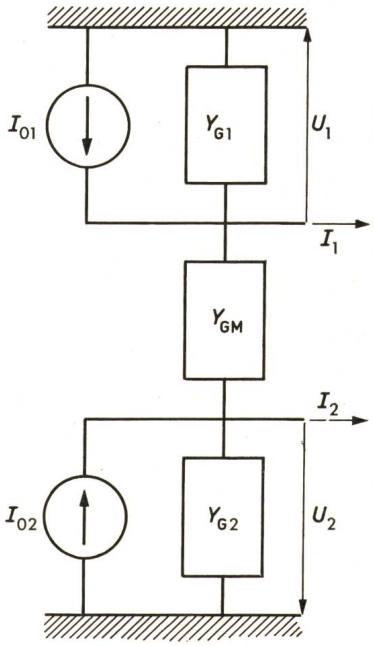


Fig. 3
Système de sources de courant appliquées à deux lignes couplées
Désignations voir dans le texte

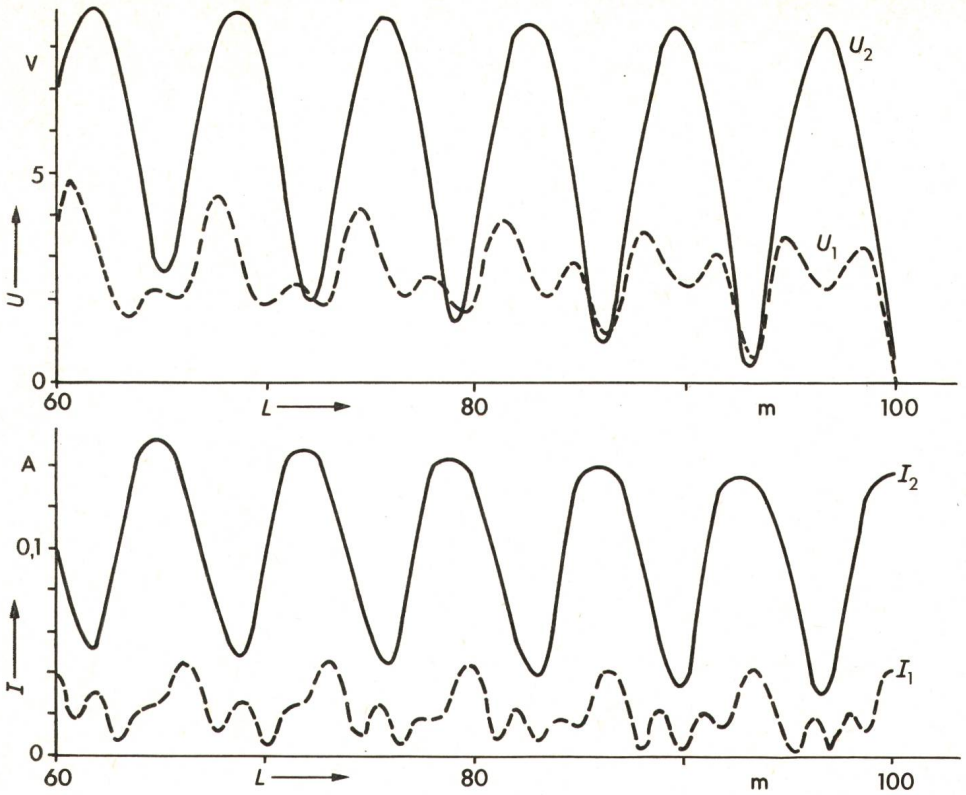


Fig. 4
Tensions U et courants I le long des lignes couplées dans un cas général
Les valeurs des paramètres utilisés sont indiquées dans le tableau I

En inversant la matrice (15) on obtient les valeurs de A_1 et A_2. Introduisant ces valeurs dans (8) et utilisant les coefficients Γ_{ij} pour définir les amplitudes B_i des ondes régressives, le problème est entièrement résolu.

L'étude complète présentée ci-dessus fait l'objet d'un programme d'ordinateur (des copies peuvent être obtenues à titre gracieux auprès des auteurs). Les résultats obtenus pour un cas particulier sont présentés en fig. 4. (Afin de ne pas alourdir inutilement les figures, toutes les données relatives aux figs. 4 à 6 sont groupés dans le tableau I.)

4. Cas particuliers: terminaisons adaptées

L'étude complète présentée ci-dessus permet de déterminer, à l'aide d'un ordinateur, les courants et tensions en chaque point d'un système de deux lignes couplées, quelles que soient les propriétés de ces lignes, des terminaisons et de l'excitation. Cependant, par suite de la complexité des calculs, le traitement complet ne met pas en évidence les propriétés particulières des lignes couplées. Il sera donc utile, en vue d'obtenir une meilleure compréhension des phénomènes de couplage et de leurs conséquences, de considérer plus en détail un cas particulier simple, celui où les lignes couplées sont terminées par des charges adaptées (13) et que par conséquent $\Gamma_{ij} = 0$. Ce cas particulier est d'autant plus intéressant que c'est celui que l'on souhaite réaliser en pratique [8]. On obtient les amplitudes suivantes (15):

$$A_1 = \frac{c_{22}I_{01} - c_{12}I_{02}}{\Delta c} \qquad A_2 = \frac{-c_{21}I_{01} + c_{11}I_{02}}{\Delta c} \tag{17}$$

où

$$\Delta c = c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}$$

Pour deux conditions particulières d'excitation, un de ces coefficients s'annule:

$$\text{si } \frac{I_{02}}{I_{01}} = \frac{c_{22}}{c_{12}} \qquad A_1 = 0 \qquad \text{si } \frac{I_{02}}{I_{01}} = \frac{c_{21}}{c_{11}} \qquad A_2 = 0 \tag{18}$$

Ces deux excitations correspondent aux deux modes orthogonaux des lignes couplées (fonctions propres). Dans ces deux cas seulement, les rapports entre U_1, U_2, I_1 et I_2 sont indépendants de la position le long de la ligne. Les tensions et courants correspondent respectivement au troisième et au premier terme de (8).

Le type d'excitation présentant le plus grand intérêt pratique est celui où une seule des lignes est excitée, par exemple la ligne 1:

$$I_{01} \neq 0 \qquad I_{02} = 0 \tag{19}$$

On obtient dans ce cas la solution suivante:

Valeurs des paramètres pour les différents cas représentés dans les figures

Tableau I

	fig. 4	fig. 5	fig. 6a	fig. 6b
Z_1	1,2 + j 100,00	1,2 + j 100,00	j 100,00	j 100,00
Y_1	10^{-6} + j 0,0278	10^{-6} + j 0,0278	j 0,0278	j 0,0278
Z_2	1,0 + j 150,00	1,0 + j 150,00	j 150,00	j 100,00
Y_2	10^{-6} + j 0,0410	10^{-6} + j 0,0410	j 0,0410	j 0,0278
Z_M	0,1 + j 50,00	0,1 + j 50,00	j 50,00	j 50,00
Y_M	10^{-8} + j 0,0090	10^{-8} + j 0,0090	j 0,0090	j 0,0090
L	100	100	100	98,03
Y_{L1}	25,0 + j 25,0	0,0147 + j 8, 10^{-5}	0,0147	0,0136
Y_{L2}	10,0 + j 20,0	0,0134 + j 1, 10^{-5}	0,0134	0,0136
Y_{LM}	2,0 + j 1,0	0,0062 + j 6, 10^{-5}	0,0062	0,0083
I_{01}	42,0 + j 1,0	42,0 + j 1,0	0 + j 0	0 + j 0
Y_{G1}	10^{-5} + j 7,0	10^{-5} + j 7,0	0 + j 0	0 + j 0
I_{02}	82,0 + j 0,0	82,0 + j 0,0	82 + j 0	82 + j 0
Y_{G2}	10^{-5} + j 7,0	10^{-5} + j 7,0	0 + j 0	0 + j 0
Y_{GM}	10^{-8} + j 2,0	10^{-8} + j 2,0	0 + j 0	0 + j 0

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{I_{01}\, e^{-\gamma_M x}}{\Delta c} \left\{ \begin{bmatrix} c_{22}\gamma_1 K & - c_{21}\gamma_2 Q_1 \\ c_{22}\gamma_1 Q_2 & - c_{21}\gamma_2 K \\ c_{22}(Y_1' K - Y_M Q_2) & - c_{21}(Y_1' Q_1 + Y_M K) \\ c_{22}(-Y_M K + Y_2' Q_2) & + c_{21}(Y_M Q_1 + Y_2' K) \end{bmatrix} \operatorname{ch} \Delta\gamma x - \begin{bmatrix} c_{22}\gamma_1 K & + c_{21}\gamma_2 Q_1 \\ c_{22}\gamma_1 Q_2 & + c_{21}\gamma_2 K \\ c_{22}(Y_1' K - Y_M Q_2) & + c_{21}(Y_1' Q_1 + Y_M K) \\ c_{22}(-Y_M K + Y_2' Q_2) & - c_{21}(Y_M Q_1 + Y_2' K) \end{bmatrix} \operatorname{sh} \Delta\gamma x \right\} \tag{20}$$

où on a posé

$$\gamma_M = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$$

Lorsqu'on peut négliger les admittances des sources ($Z_{Gi}' = 0$ et $Z_{GM} = 0$), les courants sont donnés par:

$$I_1 = I_{01}\, e^{-\gamma_M x} \left(\operatorname{ch} \Delta\gamma x - \frac{c_{11} c_{22} + c_{21} c_{12}}{c_{11} c_{22} - c_{21} c_{12}} \operatorname{sh} \Delta\gamma x \right)$$

$$I_2 = - I_{01}\, e^{-\gamma_M x} \frac{2\, c_{22} c_{21}}{\Delta c} \operatorname{sh} \Delta\gamma x \tag{21}$$

Les amplitudes des courants sont représentées en fig. 5.

5. Cas particulier: lignes sans pertes

Il est intéressant de chercher ici ce qui se passe en l'absence de pertes, cas idéal que l'on désire autant que possible réaliser en pratique. Toutes les impédances et admittances distribuées de la fig. 1 sont purement imaginaires, les termes P_i, Q_i, $\bar{P}$, ΔP et K devenant alors réels (positifs ou négatifs). Les coefficients de propagation peuvent devenir complexes dans des cas particuliers; pour deux lignes similaires en présence de couplages pas trop importants, γ_1 et γ_2 sont purement imaginaires. Les composantes des quatre vecteurs colonnes de (8) sont purement imaginaires: il en résulte que les tensions et courants d'un même mode sont soit en phase, soit en opposition.

Les admittances de charge nécessaires pour avoir adaptation (13) sont toutes réelles: ce sont des résistances pures. Lorsque les sources ont des admittances internes réelles, les coefficients c_{ij} et d_{ij} sont purement imaginaires. Finalement, les courants dans deux lignes dont une seule est excitée en $x = 0$ valent (21) (pas d'onde réfléchie, source sans admittance interne):

$$I_1 = I_{01}\, e^{-j\beta_M x} \left(\cos \Delta\beta x - j \frac{c_{11} c_{22} + c_{21} c_{12}}{c_{11} c_{22} - c_{21} c_{12}} \sin \Delta\beta x \right)$$

$$I_2 = - I_{01}\, e^{-j\beta_M x} \frac{2j\, c_{22} c_{21}}{\Delta c} \sin \Delta\beta x \tag{22}$$

avec

$$\gamma_M = j\beta_M \quad \text{et} \quad \Delta\gamma = j\Delta\beta$$

Les amplitudes des deux courants sont représentés en fig. 6 pour plusieurs valeurs des coefficients c_{ij}. On constate ici une périodicité le long de la direction de propagation, sa «longueur d'onde» valant

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\beta} \tag{23}$$

Le transfert de courant de la ligne 1 à la ligne 2 sera maximum lorsque

$$L = (2n + 1) \frac{\Delta\lambda}{4} = \frac{\pi}{2\,\Delta\beta} (2n + 1) \qquad n = 0{,}1 \ldots \tag{24}$$

Le courant dans la ligne 1 disparaît complètement pour le cas particulier

$$c_{11}\, c_{22} + c_{21}\, c_{12} = 0 \tag{25}$$

Ce cas est réalisé lorsque les deux lignes sont identiques, c'est-à-dire lorsque $Z_1 = Z_2$ et $Y_1 = Y_2$; on dit dans ce cas qu'il y a «synchronisme».

6. Conclusion

L'étude présentée ici considère de façon rigoureuse deux lignes de transmission (au sens large) de caractère linéaire et réciproque, qui sont couplées l'une à l'autre de façon également linéaire et réciproque. La solution générale pour la pro-

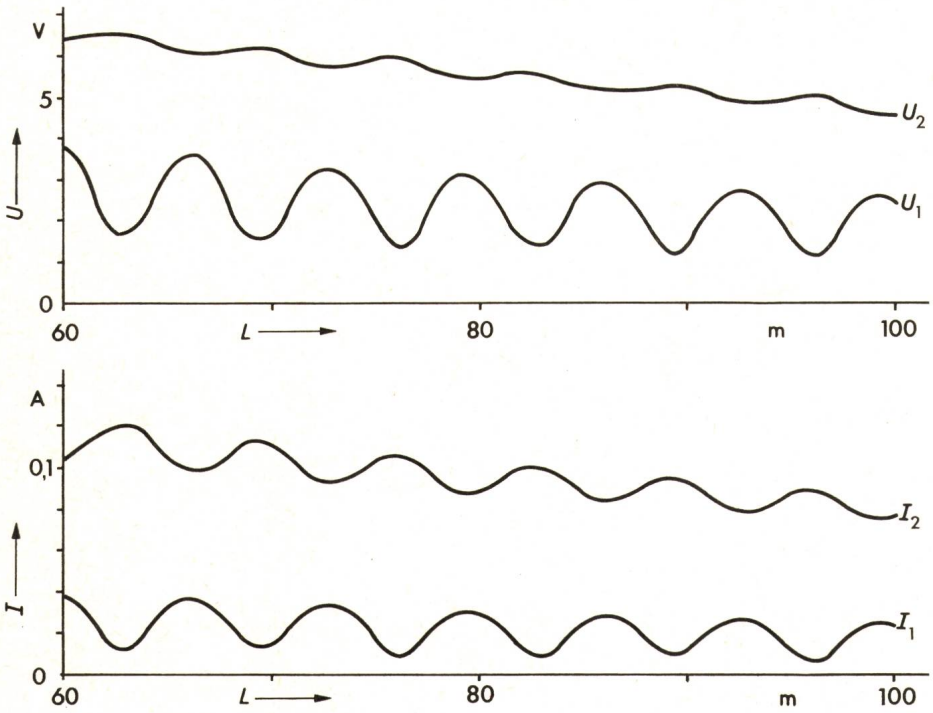
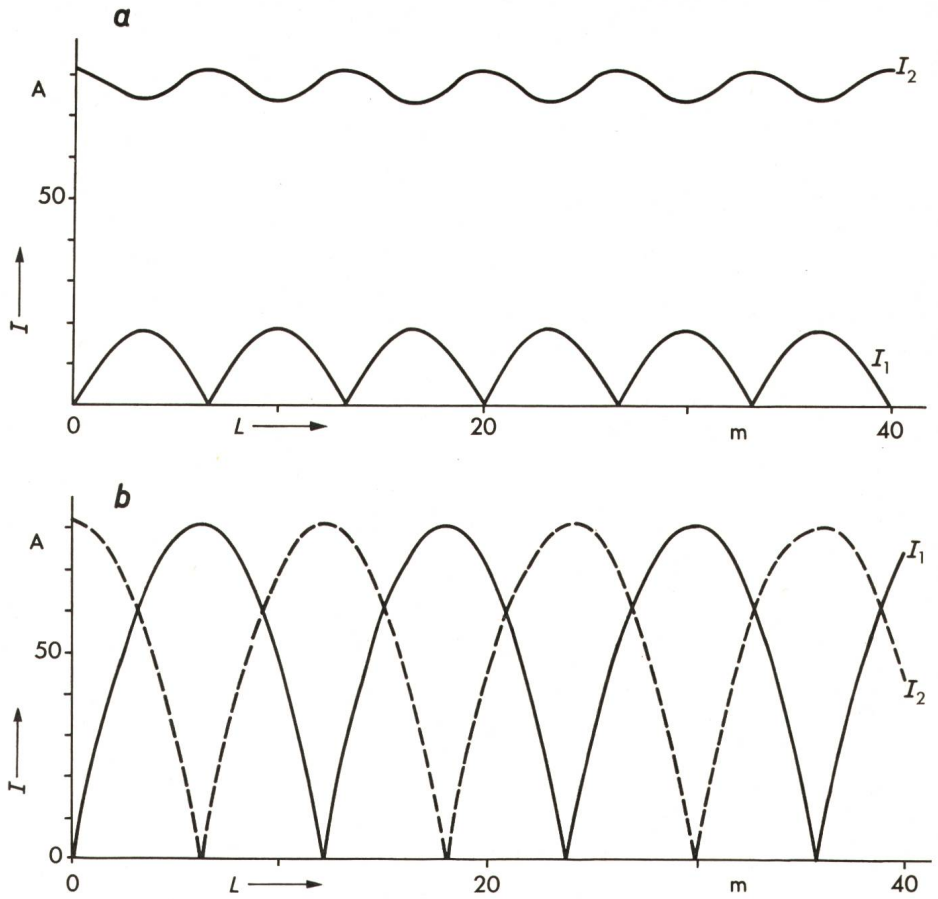


Fig. 5
Tensions U et courants I le long de lignes couplées adaptées
Les valeurs des paramètres indiquées dans le tableau I

Fig. 6
Courants I le long de lignes couplées adaptées et sans pertes

Les valeurs des paramètres indiquées dans le tableau I

a deux lignes de paramètres différents
b deux lignes identiques (synchronisme)



pagation dans ce système est déterminée: elle consiste des ondes progressives et régressives de deux modes de propagation. L'introduction des conditions aux limites dues aux sources et aux charges permet de déterminer complètement les courants et les tensions dans les deux lignes. Les propriétés des lignes couplées sont illustrées par des applications à plusieurs cas particuliers.

L'analyse présentée ici peut être étendue à l'étude de lignes non-réciproques (faisceau d'électrons, ligne chargée de ferrite aimanté, etc.). Il faut alors considérer deux schémas équivalents (fig. 1), correspondant aux deux directions de propagation. En utilisant une notation matricielle, il sera également possible d'étendre l'analyse au cas de N lignes couplées.

La mise au point du programme d'ordinateur et les calculs ont été effectués au Centre de calcul de l'EPF-L.

Bibliographie

[1] *R. Levy:* Directional couplers. In: Advances in Microwaves. Vol. I. New York/London, Academic Press, 1966, p. 115...209.

[2] *M. Chodorow* and *C. Susskind:* Fundamentals of microwaves electronics. New York a.o., McGraw-Hill, 1964.

[3] *W. H. Louisell:* Coupled mode and parametric electronics. London/New York, John Wiley and Sons, 1960.

[4] *B. Eliasson:* Theoretische Betrachtungen zur Kopplung von Hohlleiterwellen durch dünne Widerstandsschichten. Dissertation Nr. 3903 der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, 1966.

[5] *S. A. Schelkunoff:* General telegraphist's equations for waveguides. Bell Syst. Techn. J. 31(1952)4, p. 784...801.

[6] *K. Ogata:* State space analysis of control systems. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1967.

[7] *F. J. Furrer:* Coupled transmission lines with nonlinear terminations. Eurocon 71, Digest, Palais de Beaulieu, Lausanne, Switzerland, 18...22 octobre 1971, IEEE Catalog Number 71 C Reg. 8 p. H 6-1...H 6-1/2.

[8] *F. Gardiol:* Adaptation conjuguée et adaptation de ligne. Bull. ASE 62(1971)26, p. 1249...1251.

Adresse des auteurs:

Prof. *F. Gardiol* et *M. Decréton,* Chaire d'Electromagnétisme et d'Hyperfréquences, EPF-L, Chemin de Bellerive 16, 1007 Lausanne.