Die Ersatzschaltbilder kurzgeschlossener und leerlaufender RC- und LG-Leitungen

Autor(en): **Müller, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins : gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV) und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)**

Band (Jahr): **64 (1973)**

Heft 22

PDF erstellt am: **02.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-915619

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die Ersatzschaltbilder kurzgeschlossener und leerlaufender RC- und LG-Leitungen

Von *H. Müller*

621.3.012.8 : 621.315

1. Einleitung

Es ist eine bekannte Tatsache, dass unterschiedliche physikalische Vorgänge oftmals nach Gesetzen ablaufen, deren mathematische Formulierungen die gleiche Struktur aufweisen.

Der Vergleich solcher Vorgänge und die Gegenüberstellung der jeweils analogen Grössen kann dabei überaus lohnend sein, da man so Erkenntnisse, die auf dem einen Gebiet gewonnen wurden, durch einfaches Austauschen der Formelgrössen auf die anderen Gebiete übertragen kann.

Eine derartige Situation besteht bei der Wärmeleitung, der Diffusion und zwei Spezialfällen der elektrischen Leitung. Die Analogie zwischen diesen Phänomenen beruht auf der Gleichartigkeit der sie beschreibenden Differentialgleichungen. Es ist hierbei allerdings erforderlich, dass man sich auf die Betrachtung der eindimensionalen Diffusion beschränkt. Ausserdem wird angenommen, dass die betrachteten Medien homogen und quellenfrei und die den Leitungsvorgang beschreibenden Differentialgleichungen linear sind. Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich die in der Tabelle I zusammengestellten Analogien. Tabelle I ist der Arbeit [1][1]) entnommen; dort finden sich auch nähere Einzelheiten über die aufgezeigten Analogien.

Bei der Behandlung von Wärmeleitungs- oder Diffusionsproblemen aus elektrotechnischer Sicht wird man sich aufgrund der bestehenden Analogien zur *RC*- bzw. zur *LG*-Leitung vorzugsweise darum bemühen, das vorliegende Problem auf die entsprechende elektrische Aufgabenstellung zurückzuführen. Damit gewinnen die Modellvorstellungen der induktivitäts- und ableitungsfreien Leitung (*RC*-Leitung) und der kapazitäts- und widerstandsfreien Leitung (*LG*-Leitung) erheblich an Bedeutung, obwohl beide technisch exakt nicht realisierbar sind.

2. Die herkömmliche Ersatzschaltung für die elektrische Leitung

Die Frage nach dem thermischen Verhalten eines wärmeleitenden Körpers oder nach dem Verhalten einer Diffusionsstrecke entspricht der Frage nach dem elektrischen Verhalten einer *RC*- bzw. einer *LG*-Leitung. Dieses elektrische Verhalten der Leitung kann in gewissem Umfang aus der Ersatzschaltung ersehen werden, die man üblicherweise für die elektrische Leitung angibt. In Tabelle I sind die Ersatzschaltungen sowohl für die *RC*-Leitung als auch für die *LG*-Leitung dargestellt. Diese Art der Darstellung hat den Vorteil, dass sie die Verhältnisse an jedem Ort der Leitung richtig wiedergibt. Die praktische Handhabung dieser Ersatzschaltbilder wird jedoch dadurch erschwert, dass sie unendlich viele Schaltungselemente enthalten und diese Schaltungselemente, jedes für sich, zudem noch infinitesimal klein sind. Ein schnelles überschlägiges Abschätzen des elektrischen Verhaltens stösst ausserdem auch deshalb auf Schwierigkeiten, weil die Ersatzschaltungen in Form von Kettenleitern aufgebaut sind, deren Verhalten (vor allem in Verbindung mit der Tatsache, dass es sich um infinitesimal kleine Schaltungselemente handelt) nicht ohne weiteres aus der Schaltung abgelesen werden kann.

Zweifellos sind die in Tabelle I gezeigten Ersatzschaltbilder die einzigen, die die elektrische *RC*- und *LG*-Leitung an jedem Ort der Leitung richtig nachbilden. In sehr vielen Fällen ist aber nur das elektrische Verhalten der Leitung bezüglich ihrer Eingangsklemmen von Interesse, und es wäre sehr vorteilhaft, wenn man über einfachere Ersatzschaltungen verfügte, die bezüglich ihrer Eingangsklemmen das gleiche elektrische Verhalten zeigen wie die Leitung selbst.

Solche Ersatzschaltungen lagen bisher nicht vor, und man hat sich vielfach (vor allem auf dem Gebiet der Wärmeleitung) damit beholfen, eine homogene *RC*-Leitung der Länge l durch nur ein einziges *RC*-Glied mit $R = R' \, l$ und $C = C' \, l$ nachzubilden. Ein solches Verfahren ist letztlich unbefriedigend, da sich die Abschätzung des hierbei in Kauf genommenen Fehlers recht schwierig gestaltet und die kritiklose Übernahme dieser «Ersatzschaltung» unter Umständen zu völlig falschen Ergebnissen führen kann.

3. Möglichkeiten zur Umwandlung in eine äquivalente Ersatzschaltung

Um zu einem besseren Ersatzschaltbild zu gelangen, soll nun zunächst die Frage diskutiert werden, ob es möglich ist, aus der in Tabelle I gezeigten Kettenschaltung für das *RC*-Kabel ein äquivalentes Reihenersatzschaltbild zu gewinnen. Es ist bekannt, dass es zu jeder Kettenschaltung nach Fig. 1 eine Reihenschaltung nach Fig. 2 gibt, die bezüglich der Klemmen AB das gleiche Verhalten zeigt wie die Kettenschaltung [2]. Die Grösse eines jeden einzelnen Schaltungselementes der äquivalenten Reihenschaltung hängt dabei i. a. von der Gesamtheit aller Schaltungselemente der Kettenschaltung ab [3]. Bei dieser Sachlage ist es offensichtlich, dass die Umwandlung der beiden Schaltungen ineinander mit wachsender Anzahl der

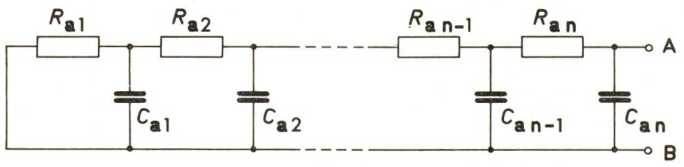


Fig. 1
RC-Kettenschaltung

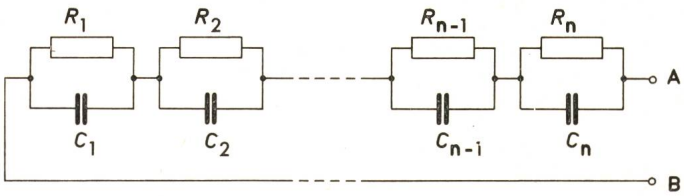
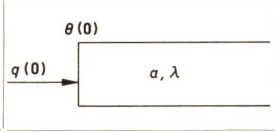
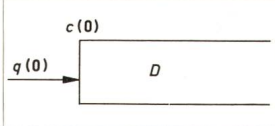
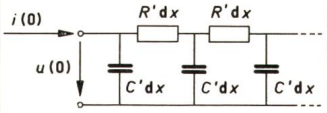
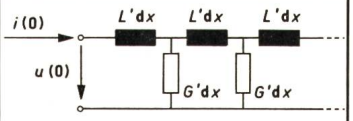


Fig. 2
RC-Reihenersatzschaltung

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

Tabelle I

	Eindimensionale lineare Wärmeleitungsgleichungen	Eindimensionale lineare Diffusionsgleichungen	Gleichungen für die lineare elektrische Leitung	
	$\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} q = 0$ (1) $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial t} = p$ (2)	$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{D} q = 0$ (5) $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = p$ (6)	$\frac{\partial u}{\partial x} + L' \frac{\partial i}{\partial t} + R' i = 0$ (9) $\frac{\partial i}{\partial x} + C' \frac{\partial u}{\partial t} + G' u = 0$ (10)	
Zusatzbedingung	$p = 0$	$p = 0$	$G' = 0,\ L' = 0$	$R' = 0,\ C' = 0$
Ersatzschaltbild				
Differentialgleichungen	$\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} q = 0$ (1) $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ (3) $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial t}$ (4)	$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{D} q = 0$ (5) $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0$ (7) $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial c}{\partial t}$ (8)	$\frac{\partial u}{\partial x} + R' i = 0$ (11) $\frac{\partial i}{\partial x} + C' \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ (12) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R'C' \frac{\partial u}{\partial t}$ (13)	$\frac{\partial i}{\partial x} + G' u = 0$ (14) $\frac{\partial u}{\partial x} + L' \frac{\partial i}{\partial t} = 0$ (15) $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = G'L' \frac{\partial i}{\partial t}$ (16)
Entsprechungen	θ K q $\frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$ $\frac{\lambda}{a}$ $\frac{\text{Ws}}{\text{K cm}^3}$ $\frac{1}{\lambda}$ $\frac{\text{K cm}}{\text{W}}$	c cm^{-3} q $\text{cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}$ $\equiv 1$ $\frac{1}{D}$ $\frac{\text{s}}{\text{cm}^2}$	u V i A C' $\frac{\text{As}}{\text{V cm}}$ R' $\frac{\text{V}}{\text{A cm}}$	i A u V L' $\frac{\text{Vs}}{\text{A cm}}$ G' $\frac{\text{A}}{\text{V cm}}$
Bedeutung der Buchstabensymbole	θ Temperatur q Wärmestromdichte λ Wärmeleitfähigkeit a Temperaturleitfähigkeit	c Konzentration q Strömungsdichte D Diffusionskonstante	u Spannung i Strom C' Kapazitätsbelag R' Widerstandsbelag	i Strom u Spannung L' Induktivitätsbelag G' Ableitungsbelag

Schaltungselemente immer schwieriger wird; und es ist abzusehen, dass es nicht ohne weiteres möglich sein wird, auf rein algebraischem Wege die in Tabelle I angegebenen Ersatzschaltbilder mit einer unendlichen Anzahl von Schaltungselementen in äquivalente Reihenschaltungen umzuwandeln. Des weiteren ist zu erwarten, dass eine Veränderung des Leitungsabschlusses (Widerstand R_{a1} in Fig. 1) einen Einfluss auf die Gesamtheit der Schaltungselemente der äquivalenten Reihenschaltung haben wird. Es kann daher keinesfalls gelingen, den Einfluss des Leitungsabschlusses in der Reihenersatzschaltung durch die Variation von nur einem oder wenigen Schaltungselementen zu simulieren.

4. Bestimmung der Übergangsfunktionen

Zwei Schaltungen sind bezüglich ihrer Eingangsklemmen dann äquivalent, wenn sie das gleiche Übergangsverhalten zeigen. Da die betrachteten Systeme voraussetzungsgemäss linear sind, genügt zur Charakterisierung ihres Übergangsverhaltens die Angabe der Übergangsfunktion. Dabei kann die Übergangsfunktion auf zwei verschiedene Arten definiert werden: Zum einen kann man hierunter den (auf die Amplitude des Spannungssprungs bezogenen) Stromverlauf verstehen, der eintritt, wenn sich die Spannung am Eingang sprunghaft ändert. Zum anderen kann man aber auch in genau umgekehrter Weise den (auf die Amplitude des Stromsprungs bezogenen) Spannungsverlauf als Übergangsfunktion definieren, der eintritt, wenn sich der Strom am Eingang sprunghaft ändert. Beide Arten von Übergangsfunktionen beschreiben die Systeme bezüglich ihrer Eingangsklemmen vollständig und sollen im weiteren nebeneinander zum Entwurf von äquivalenten Ersatzschaltbildern herangezogen werden. Die Aufgabe besteht also darin, die Übergangsfunktionen z. B. der *RC*-Leitung zu ermitteln und hieraus Ersatzschaltungen zu entwickeln, deren Verhalten durch dieselben Übergangsfunktionen beschrieben werden kann.

Der erste Teil dieser Aufgabe, die Ermittlung der Übergangsfunktionen, ist in [1] bereits weitgehend gelöst worden. Ausgangspunkt ist die entsprechende thermische Fragestellung: Ein eindimensional wärmeleitendes Medium wird bei $x = 0$ mit einem Temperatursprung beaufschlagt (Randbedingung 1), bzw. bei $x = 0$ wird eine sprungförmig verlaufende Wärmestromdichte eingeprägt (Randbedingung 2). Der sich einstellende Temperaturverlauf in Abhängigkeit von Ort und Zeit wird in [1] (dort in Tab. 7.6) angegeben. (Quellen hierzu: [4;

5; 6].) Dabei wird davon ausgegangen, dass der Wärmeleiter eine endliche Länge hat und in beliebiger Weise abgeschlossen ist. Die Ergebnisse sind in Form von unendlichen Reihen darstellbar; jedes Glied enthält die Fehlerfunktionen erfc y oder ierfc y, wobei die Variablen Ort x und Zeit t Bestandteile der Argumente y sind.

Dergestalt aufgebaute Übergangsfunktionen eignen sich denkbar schlecht dazu, aus ihnen entsprechende Ersatzschaltungen zu synthetisieren. Deshalb wird im folgenden nicht mehr von der Voraussetzung ausgegangen, dass der Wärmeleiter in beliebiger Weise abgeschlossen sein kann; sondern die Betrachtungen konzentrieren sich auf die folgenden beiden Extremfälle:

a) Das Ende des Wärmeleiters wird beständig auf Nulltemperatur gehalten (*RC*-Leitung: Kurzschluss);
b) Das Ende des Wärmeleiters ist absolut wärmeundurchlässig (*RC*-Leitung: Leerlauf).

Da es sich hierbei um Spezialfälle der soeben betrachteten Aufgabenstellung handelt, sind natürlich auch die hierfür gültigen Temperaturverläufe durch unendliche Summen von Fehlerfunktionen darstellbar. Daneben werden aber in der Literatur (z. B. [4] und [6]) völlig gleichwertige Ergebnisse angegeben, die ebenfalls in Form von unendlichen Reihen dargestellt werden, deren einzelne Glieder aber aus Exponential- und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt sind. Für alle vier möglichen Kombinationen der Randbedingungen (1 und 2 am Anfang, a und b am Ende) sind in Tabelle II jeweils beide Lösungsversionen zusammengestellt. Die weitere Betrachtung basiert aber stets auf den jeweils an zweiter Stelle angegebenen Ausdrücken mit Exponential- und trigonometrischen Funktionen unter dem Summenzeichen.

Die in Tabelle II angegebenen Ausdrücke stellen die Temperaturverläufe in Abhängigkeit von Ort und Zeit unter den jeweils geltenden Randbedingungen dar. Hieraus ergeben sich die gesuchten Übergangsfunktionen in den Fällen 2a und 2b einfach dadurch, dass der jeweilige Ausdruck für den Temperaturverlauf $\theta(x, t)$ durch die Amplitude q_0 des Wärmestromdichtesprunges dividiert wird und $x = 0$ gesetzt wird. In den Fällen 1a und 1b ist die Sachlage genau umgekehrt. Hier muss der Ausdruck für den Verlauf der Wärmestromdichte $q(x, t)$ durch die Amplitude θ_0 des Temperatursprunges dividiert und $x = 0$ gesetzt werden. Da aber aus Tabelle II auch für die Fälle 1a und 1b nur der Temperaturverlauf $\theta(x, t)$ entnommen werden kann, muss hieraus zunächst nach Gl. (1) (in Tabelle I) die Wärmestromdichte $q(x, t)$ ausgerechnet werden. Diese Rechenoperation besteht im wesentlichen in der Differentiation der in Tabelle II angegebenen Ausdrücke und bereitet keine weiteren Schwierigkeiten.

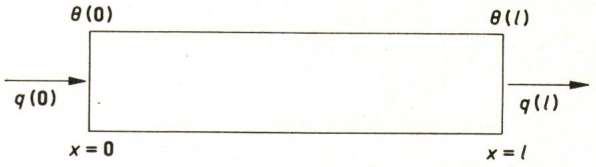
Die auf diese Weise für die eindimensionale Wärmeleitung bestimmten Übergangsfunktionen können jetzt aufgrund der in Tabelle I genannten Entsprechungen mühelos auf die *RC*-Leitung übertragen werden. In dieser Form sind sie in Tabelle III zusammengestellt.

5. Ermittlung der äquivalenten Ersatzschaltungen mit Hilfe der Übergangsfunktionen

Nachdem die Übergangsfunktionen nun in dieser Weise formuliert sind, ist es recht einfach, hierzu Ersatzschaltungen zu finden, deren Übergangsverhalten durch eben diese Funktionen charakterisiert wird. Die Übergangsfunktionen für die Fälle 1a und 1b der Tabelle III ergeben sich im wesentlichen aus der Aufsummierung unendlich vieler zeitabhängiger Ströme (bezogen auf die Sprungamplitude u_0), während die Übergangsfunktionen für die Fälle 2a und 2b (Tab. III) in entsprechender Weise als die Summe unendlich vieler (auf die Sprungamplitude i_0 bezogener) zeitabhängiger Spannungen gedeutet werden kann. Als Ersatzschaltungen, die diesen Übergangsfunktionen zugeordnet werden können, wird man daher in den Fällen 1a und 1b die Parallelschaltung und in den Fällen 2a

Temperaturverlauf in einem endlichen homogenen Medium bei eindimensionaler Wärmeleitung

Tabelle II

Randbedingungen	Temperaturverlauf
	
1a	$\theta = \theta_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc} \frac{2\nu l + x}{2\sqrt{at}} - \operatorname{erfc} \frac{2(\nu+1)l - x}{2\sqrt{at}} \right] = \theta_0 \left\{ 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\frac{\nu^2\pi^2 at}{l^2}} \sin \frac{\nu\pi x}{l} \right\}$
1b	$\theta = \theta_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\operatorname{erfc} \frac{2(\nu+1)l - x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{2\nu l + x}{2\sqrt{at}} \right] = \theta_0 \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} e^{-\frac{(2\nu+1)^2\pi^2 at}{4l^2}} \sin \frac{(2\nu+1)\pi x}{2l} \right\}$
2a	$\theta = \frac{2 q_0 \sqrt{at}}{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\operatorname{ierfc} \frac{2\nu l + x}{2\sqrt{at}} - \operatorname{ierfc} \frac{2(\nu+1)l - x}{2\sqrt{at}} \right] = \frac{q_0 l}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{x}{l} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} e^{-\frac{(2\nu+1)^2\pi^2 at}{4l^2}} \cos \frac{(2\nu+1)\pi x}{2l} \right\}$
2b	$\theta = \frac{2 q_0 \sqrt{at}}{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\operatorname{ierfc} \frac{2\nu l + x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{ierfc} \frac{2(\nu+1)l - x}{2\sqrt{at}} \right] = \frac{q_0 l}{\lambda} \left\{ \frac{at}{l^2} + \frac{3(l-x)^2 - l^2}{6l^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} e^{-\frac{\nu^2\pi^2 at}{l^2}} \cos \frac{\nu\pi x}{l} \right\}$

Randbedingungen am Anfang:

1 $\theta(x = 0, t \geqq 0) = \theta_0, \quad \theta(x, t < 0) = 0$ (Temperatursprung)

2 $q(x = 0, t \geqq 0) = q_0, \quad q(x, t < 0) = 0$ (Sprung der Wärmestromdichte)

Randbedingungen am Ende:

a $\theta(x = l, t) = 0$ (ideale Wärmeableitung)

b $q(x = l, t) = 0$ (adiabatische Wand)

und 2b die Reihenschaltung unendlich vieler Zweipole angeben. Jeder einzelne Zweipol entspricht einem bestimmten Summenelement und muss genau das Übergangsverhalten zeigen, das durch das betreffende Summenglied beschrieben wird.

In den Fällen 1a und 1b (Tab. III) stellen die einzelnen Summenglieder Übergangsfunktionen des folgenden Typs dar:

$$\frac{i_\nu}{u_0} = \frac{1}{R_\nu} e^{-\frac{t}{R_\nu C_\nu}}$$

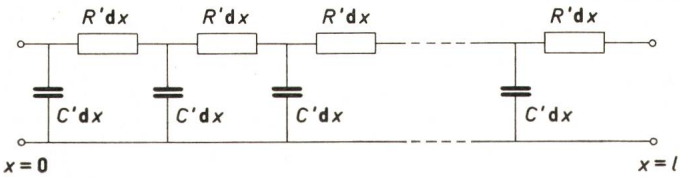
Eine solche Übergangsfunktion ist aber bekanntlich sehr einfach durch einen Zweipol zu realisieren, der aus der Reihenschaltung eines Widerstandes R_ν und einer Kapazität C_ν besteht. In den Fällen 2a und 2b sind die Summenglieder Ausdrücke der folgenden Form:

$$\frac{u_\nu}{i_0} = R_\nu \left[1 - e^{-\frac{t}{R_\nu C_\nu}}\right]$$

Eine derartige Übergangsfunktion ist ebenso einfach durch einen Zweipol zu realisieren, der aus der Parallelschaltung eines Widerstandes R_ν und einer Kapazität C_ν besteht.

Übergangsfunktionen der kurzgeschlossenen und der leerlaufenden RC-Leitung

Tabelle III



Randbedingungen	Übergangsfunktion
1a	$\frac{i(x=0,t)}{u_0} = \frac{1}{R'l} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{R'l} e^{-\frac{(2\nu)^2\pi^2 t}{4R'C'l^2}}$
1b	$\frac{i(x=0,t)}{u_0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2}{R'l} e^{-\frac{(2\nu+1)^2\pi^2 t}{4R'C'l^2}}$
2a	$\frac{u(x=0,t)}{i_0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{8R'l}{(2\nu+1)^2\pi^2} \left[1 - e^{-\frac{(2\nu+1)^2\pi^2 t}{4R'C'l^2}}\right]$
2b	$\frac{u(x=0,t)}{i_0} = \frac{t}{C'l} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8R'l}{(2\nu)^2\pi^2} \left[1 - e^{-\frac{(2\nu)^2\pi^2 t}{4R'C'l^2}}\right]$

Randbedingungen am Anfang:

1 $u(x=0, t \geqq 0) = u_0$, $u(x, t < 0) = 0$ (Spannungssprung)

2 $i(x=0, t \geqq 0) = i_0$, $i(x, t < 0) = 0$ (Stromsprung)

Randbedingungen am Ende:

a $u(x=l, t) = 0$ (Kurzschluss)

b $i(x=l, t) = 0$ (Leerlauf)

Für alle vier behandelten Fälle ergeben sich somit auf einfache Weise leicht überschaubare Ersatzschaltbilder. Diese Ersatzschaltbilder sind im linken Teil der Tabelle IV zusammengestellt. Bemerkenswert ist hierbei die Feststellung, dass je zwei dieser Ersatzschaltbilder paarweise äquivalent sein müssen; denn obwohl von vier verschiedenen Randbedingungen ausgegangen wurde, liegen doch der gesamten Rechnung nur zwei unterschiedliche Anordnungen zugrunde: Sowohl die Übergangsfunktion für den Fall 1a als auch die Übergangsfunktion für den Fall 2a in Tabelle III beschrieben ja das Übergangsverhalten der am Ende kurzgeschlossenen *RC*-Leitung, nur mit dem Unterschied, dass im einen Fall ein Spannungssprung und im anderen ein Stromsprung am Anfang der Leitung angenommen wurde. Gleiches gilt bei den Übergangsfunktionen in den Fällen 1b und 2b für die leerlaufende *RC*-Leitung. Daraus folgt, dass die aus den Übergangsfunktionen gewonnenen Ersatzschaltungen für die Fälle 1a und 2a sowie für die Fälle 1b und 2b jeweils äquivalent sein müssen.

Als Resultat ergeben sich je zwei äquivalente Ersatzschaltungen für die kurzgeschlossene und für die leerlaufende *RC*-Leitung; dabei handelt es sich jeweils einmal um die Parallelschaltung und einmal um die Reihenschaltung unendlich vieler Zweipole. Die einzelnen Schaltungselemente dieser Zweipole, ein Widerstand und eine Kapazität, haben dabei durchaus angebbare endliche Werte im Gegensatz zu der Kettenschaltung mit ihren infinitesimal kleinen $R'dx$ und $C'dx$. Mit zunehmender Ordnungszahl ν nehmen die Werte entweder der R_ν oder der C_ν im wesentlichen wie $1/\nu^2$ ab, während der Wert der jeweils anderen Schaltungselementart (mit der Ausnahme $\nu = 0$) von der Ordnungszahl unabhängig ist.

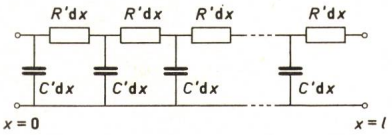
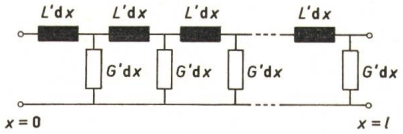
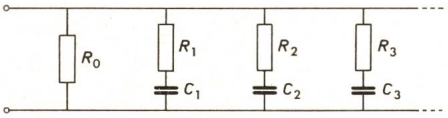
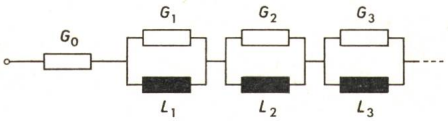
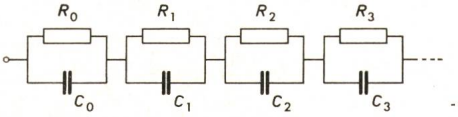
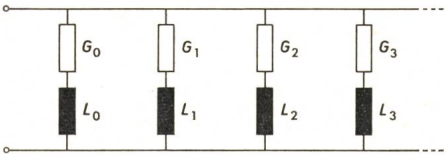
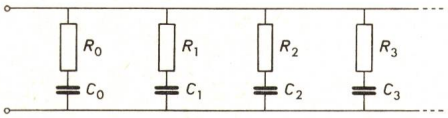
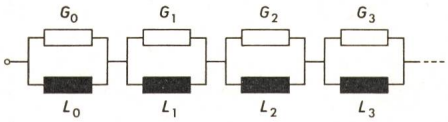
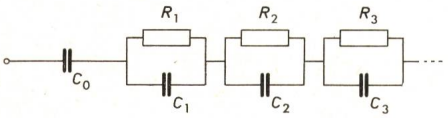
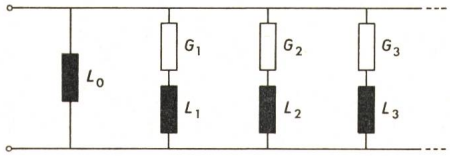
Ganz ähnliche Ersatzschaltungen lassen sich auch für die *LG*-Leitung angeben. Aufgrund der in Tabelle I aufgeführten Entsprechungen können die in Tabelle III für die *RC*-Leitung zusammengestellten Übergangsfunktionen mühelos auf die *LG*-Leitung übertragen werden. Dadurch, dass die Grössen C und L, R und G sowie u und i gegeneinander ausgetauscht werden, sind die Ersatzschaltungen, die diesen Übergangsfunktionen entsprechen, zu den Ersatzschaltungen für die *RC*-Leitung dual. Das bedeutet, dass man die Ersatzschaltungen für die *LG*-Leitung aus denen für die *RC*-Leitung einfach dadurch gewinnen kann, dass man jede Reihenschaltung durch eine Parallelschaltung und jede Parallelschaltung durch eine Reihenschaltung ersetzt und dabei jedes R gegen ein G und jedes C gegen ein L austauscht. Auf diese Weise gewinnt man die im rechten Teil der Tabelle IV dargestellten Ersatzschaltbilder.

Ausser der Tatsache, dass die jeweils nebeneinanderstehenden Ersatzschaltungen zueinander dual sind, weist die Tabelle IV noch eine weitere formale Gesetzmässigkeit auf, auf die hier hingewiesen sei: bemerkenswerterweise haben nämlich die sich in der Tabelle diagonal gegenüberstehenden Schaltbilder dieselbe Struktur, und sie lassen sich dadurch ineinander überführen, dass man jedes R durch ein L und jedes C durch ein G ersetzt (bzw. umgekehrt). Nach dieser Vorschrift lässt sich z. B. auf höchst einfache Weise aus dem mit Hilfe der Randbedingung 1a gewonnenen Ersatzschaltbild für die kurzgeschlossene *RC*-Leitung die entsprechende Ersatzschaltung für die kurzgeschlossene *LG*-Leitung (Randbedingung 2b) gewinnen.

Der Vorteil der in Tabelle IV zusammengefassten Ersatzschaltbilder gegenüber den herkömmlichen Ersatzschaltungen für die *RC*- und die *LG*-Leitung besteht vor allem darin, dass

Äquivalente Ersatzschaltbilder für die kurzgeschlossene und die leerlaufende RC- bzw. LG-Leitung

Tabelle IV

RC-Leitung	*LG*-Leitung	Randbedingungen
		
Kurzschluss bei $x = l$  $R_0 = R'l;\ R_\nu = \frac{R'l}{2}$ $C_\nu = \frac{8\,C'l}{(2\,\nu)^2\,\pi^2}$	Leerlauf bei $x = l$  $G_0 = G'l;\ G_\nu = \frac{G'l}{2}$ $L_\nu = \frac{8\,L'l}{(2\,\nu)^2\,\pi^2}$	1a
 $R_\nu = \frac{8\,R'l}{(2\,\nu+1)^2\,\pi^2}$ $C_\nu = \frac{C'l}{2}$	 $G_\nu = \frac{8\,G'l}{(2\,\nu+1)^2\,\pi^2}$ $L_\nu = \frac{L'l}{2}$	2a
Leerlauf bei $x = l$  $R_\nu = \frac{R'l}{2}$ $C_\nu = \frac{8\,C'l}{(2\,\nu+1)^2\,\pi^2}$	Kurzschluss bei $x = l$  $G_\nu = \frac{G'l}{2}$ $L_\nu = \frac{8\,L'l}{(2\,\nu+1)^2\,\pi^2}$	1b
 $R_\nu = \frac{8\,R'l}{(2\,\nu)^2\,\pi^2}$ $C_0 = C'l;\ C_\nu = \frac{C'l}{2}$	 $G_\nu = \frac{8\,G'l}{(2\,\nu)^2\,\pi^2}$ $L_0 = L'l;\ L_\nu = \frac{L'l}{2}$	2b

die einzelnen Schaltungselemente bezifferbare (also nicht infinitesimal kleine) Werte haben. Dass die Anzahl der Schaltungselemente nach wie vor unendlich gross ist, war nach den Vorbetrachtungen in Abs. 3 nicht anders zu erwarten. Von erheblicher praktischer Bedeutung ist aber die Tatsache, dass der Wert jeweils einer Schaltungselementart quadratisch mit wachsender Ordnungszahl abnimmt. In der Praxis kann man sich daher in den meisten Fällen mit einigen wenigen Gliedern begnügen. Da die Werte der vernachlässigten Glieder ebenfalls zahlenmässig bekannt sind, ist darüber hinaus stets eine einfache Abschätzung des in Kauf genommenen Fehlers möglich.

6. Zusammenfassung

RC- und *LG*-Leitung sind — obwohl technisch exakt nicht realisierbar — von erheblicher Bedeutung als elektrische Modelle für Wärmeleitungs- und andere Diffusionsvorgänge. Die

übliche Ersatzschaltung, bestehend aus unendlich vielen in Kaskade geschalteten *RC*- bzw. *LG*-Gliedern, ist zur Abschätzung des Eingangs-Verhaltens einer solchen Leitung wenig geeignet, da die einzelnen Schaltungselemente infinitesimal klein sind. Mit Hilfe der Übergangsfunktionen, die diesen Leitungen zugeordnet werden können, werden in der vorliegenden Arbeit äquivalente Ersatzschaltungen entwickelt, die das gleiche Eingangs-Verhalten zeigen wie die kurzgeschlossene und die leerlaufende Leitung. Die Ersatzschaltungen bestehen aus unendlich vielen parallel oder in Reihe geschalteten Zweipolen endlicher (also nicht infinitesimal kleiner) Grösse. Der Einfluss der einzelnen Zweipole auf das Gesamtverhalten nimmt jedoch mit wachsender Ordnungszahl schnell ab, so dass man sich in den meisten Fällen mit der Berücksichtigung einiger weniger Glieder begnügen kann.

Literatur

[1] *H. Müller:* Berechnung des transienten thermischen Verhaltens von Halbleiterventilen im Bereich kurzer Zeiten. Dissertation der Technischen Hochschule Aachen, 1972.

[2] *P. D. Davidov:* Zur Theorie der Berechnung nichtstationärer Wärmeprozesse in grossen Halbleiterbauelementen. Electričestvo -(1966)4, S. 46...51. (= russ.)

[3] *H. Müller:* Beziehungen zwischen dem praktisch verwendeten und dem physikalisch sinnvollen Wärmeersatzschaltbild von Dioden und Thyristoren. Arch. Electrotechn. 54(1971)3, S. 170...176.

[4] *H. S. Carslaw* and *J. C. Jaeger:* Conduction of heat in solids. Second edition. Oxford, Clarendon Press, 1959.

[5] *A. V. Luikov:* Analytical heat diffusion theory. New York/London, Academic Press, 1968.

[6] *H. Tautz:* Wärmeleitung und Temperaturausgleich; die mathematische Behandlung instationärer Wärmeleitungsprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation. Weinheim/Bergstrasse, Verlag Chemie, 1971.

Adresse des Autors:

Dr.-Ing. *Hans Müller,* Institut für Stromrichtertechnik und Elektrische Antriebe der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Templergraben 55, D-51 Aachen.

WILLIAM SIEMENS

1823–1883

Siemens-Museum, München

Der grosse Elektrizitätspionier Werner Siemens hatte 10 Geschwister, die unter sich vorbildlich zusammenhielten. Wilhelm, der 7 Jahre jünger als Werner war, besuchte die Magdeburger Schulen und studierte dann 1 Jahr in Göttingen Naturwissenschaften. Auf Anraten Werners folgte eine zweijährige Praxis in einer Magdeburger Maschinenbauanstalt, worauf er England kennenlernen wollte. Dort gefiel es ihm so gut, dass er sich 1842 entschloss, länger zu bleiben. Werner willigte ein und bat ihn, zu versuchen, seine Erfindungen in England zu verwerten. Dabei erwies sich Wilhelm als guter Verhandler.

Wilhelm arbeitete zunächst in einem Betrieb, verlegte sich aber bald aufs Erfinden. Er konstruierte unter anderem einen Wassermesser, einen Differentialregler, der bei einer parallel mit einer Wasserturbine arbeitenden Dampfmaschine die Lastverteilung so vorzunehmen hatte, dass die Dampfmaschine nur die von der Wasserkraft nicht gedeckte Leistung lieferte.

Die beiden Brüder unterhielten einen regen Briefwechsel und kamen jährlich zweimal zusammen.

1846 schlug Wilhelm Werner vor, Guttapercha für die Isolation von Kabeladern zu verwenden. Das war ein grosser Erfolg.

In London wurde 1858 ein Zweiggeschäft des Hauses Siemens-Halske eröffnet, das von Wilhelm geleitet wurde.

Um 1860 entwickelte er Prüfverfahren für Kabel und übernahm 3 Jahre später die Leitung des eigenen Kabelwerkes in Woolwich bei London, das viele Aufträge erhielt. Mit der Zeit wagte er sich an grosse Seekabellegungen, wobei durch Kabelrisse mehrmals schwere Verluste entstanden. Dies veranlasste Halske, sich aus dem Englandgeschäft zurückzuziehen, worauf dieses 1865 die Bezeichnung «Siemens Brothers» erhielt.

Am 14. Februar 1867, nur einen Monat nachdem Werner das elektrodynamische Prinzip in Berlin demonstriert hatte, referierte William in London vor der Royal Society darüber.

William interessierte sich aber noch für die Eisen- und Stahlgewinnung. Schon 1851 hatte er die Wiederverwendung des Schrottes propagiert. 1860 baute er einen elektrischen Lichtbogenofen, aber erst 1878 gelang ihm die Stahlgewinnung im Elektroofen. Als Friedrich Siemens (10 Jahre jünger als Werner) für die Glas- und die keramische Industrie die brennstoffsparende Regenerativfeuerung erfand, versuchte William dieses Verfahren bei der Stahlfabrikation einzuführen. Das misslang anfänglich. Durch Zusammenarbeit zwischen Wilhelm Siemens mit Emil und Pierre Martin (Vater und Sohn), Besitzer eines Stahlwerkes bei Angoulême, kam es dann aber zum Siemens-Martin-Ofen, der sich in der Folge als grosser Erfolg herausstellte.

William Siemens hatte sich in England naturalisiert und 1859 eine Schottländerin geheiratet. Die Engländer betrachteten ihn so sehr als den ihren, dass er im Jahre 1883 von Königin Victoria in den Adelsstand erhoben wurde. Doch noch im gleichen Jahr erlag er am 19. November in London einem Herzanfall.

H. Wüger