

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

**Band:** 80 (1989)

**Heft:** 15

**Artikel:** Statistische Sicherheit von Messresultaten : 1. Teil : statistische Auswertung von Messresultaten

**Autor:** Feller, U.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-903699>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 21.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Statistische Sicherheit von Messresultaten

## 1. Teil: Statistische Auswertung von Messresultaten

U. Feller

**Bei der Durchführung und Auswertung von Messungen stellt sich immer wieder die Frage nach der Genauigkeit des Messresultates. Der vorliegende Aufsatz will die Grundlagen vermitteln, die nötig sind, um die Messunsicherheiten von industriellen Mess- und Kalibriersystemen bestimmen zu können. In einem ersten Teil sind die mathematisch-statistischen Grundlagen zusammengestellt, in einem zweiten Teil werden die wichtigsten Begriffe erläutert und die Vor- und Nachteile der verschiedenen mathematischen Ansätze diskutiert.**

**Lors de l'exécution et du dépouillement de mesures, on est toujours confronté à la question de la précision des résultats de mesure. L'article donne les bases qui sont nécessaires pour déterminer les incertitudes des systèmes de mesure et de calibrage industriels. Une première partie réunit les bases mathématiques et statistiques; dans une deuxième on explique les notions essentielles ainsi que les avantages et inconvénients des différentes approches mathématiques.**

Der zweite Teil dieses Beitrags folgt in der Ausgabe 17/89.

### Adresse des Autors

Dr. U. Feller, Dipl. Phys.,  
Eidg. Amt für Messwesen,  
Sektionschef Elektrizität, Akustik und Zeit,  
Lindenweg 50, 3084 Wabern.

Für die Auswertung von Messresultaten ist die Kenntnis elementarer statistischer Begriffe und Methoden unerlässlich. Da der Messwert im allgemeinen zufälligen Schwankungen unterliegt, stellt sich die Aufgabe, aus einer Reihe von Messwerten einen Schätzwert für den wahren Wert der Messgrösse zu berechnen und die statistische Sicherheit dieser Abschätzung zu beurteilen. Die mathematischen Grundlagen dazu sind im folgenden Kapitel zusammengestellt.

Oft ist die Messgrösse eine Funktion von mehreren Einflussgrössen, die ihrerseits mit Unsicherheiten behaftet sind. Wie sich solche Unsicherheiten auf das Messresultat auswirken, wird im Kapitel «Fortpflanzung der Messunsicherheiten» behandelt. Der funktionale Zusammenhang zwischen Messgrösse und Einflussgrössen ist in anspruchsvolleren Messsystemen häufig nicht unmittelbar gegeben. Zur Ermittlung des Zusammenhangs muss das Messsystem in einem mathematischen Modell nachgebildet werden. Dieses Modell bildet den Ausgangspunkt zur Ermittlung der Messunsicherheit des Systems. Anhand eines Beispiels aus dem elektrischen Kalibrierwesen wird gezeigt, wie mit Hilfe eines solchen Modells der funktionale Zusammenhang zwischen Messgrösse und Einflussfaktoren in der Praxis hergeleitet werden kann.

### Mathematische Voraussetzungen

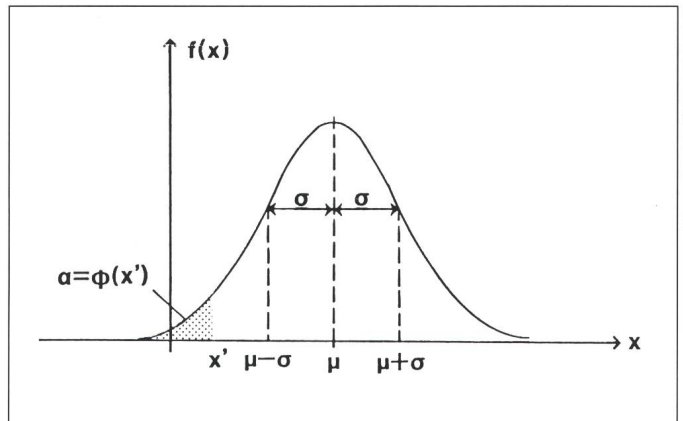
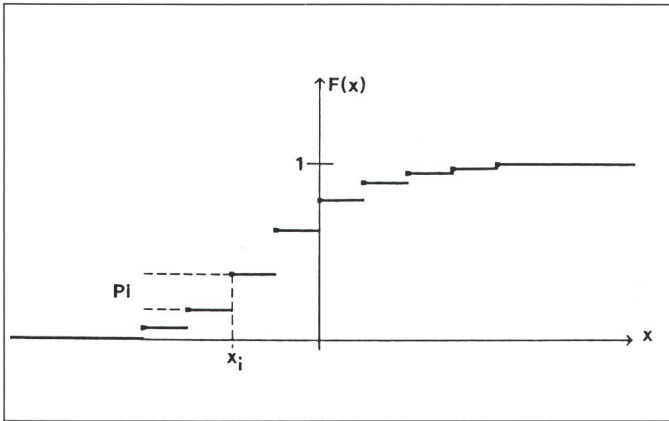
Bei der Messung einer physikalischen Grösse erhält man den wahren Wert der Grösse nie exakt. Je nach dem gewählten Messverfahren, den verwendeten Messgeräten und je nach Beobachter weicht der Messwert mehr oder weniger stark vom wahren Wert ab. Sofern die Auflösung der Messapparatur gross genug ist, wird jede

Wiederholung der Messung einen leicht anderen Messwert ergeben. Das Messresultat ist somit keine konstante Grösse, sondern hängt in nicht vorhersehbarer Weise von zufälligen Einflüssen wie thermischen Schwankungen, Feuchtigkeits- und Druckschwankungen, elektromagnetischen Einflüssen, Lichteinwirkung, Konzentrationsschwankungen usw. ab. Eine Grösse, die in nicht vorhersehbarer Weise von zufälligen Einflüssen abhängt, nennt man eine *Zufallsgrösse* oder *Zufallsvariable*. Die mathematische Grundlage für die Beschreibung zufälliger Vorgänge ist die Wahrscheinlichkeitstheorie. Die mathematische Statistik ist eine Anwendung dieser Theorie auf zufällige Vorgänge und Gegebenheiten im praktischen Alltag.

Nach diesen Ausführungen ist klar, dass Messresultate teilweise in den Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik fallen und dass eine ernsthafte Diskussion über Messresultate und ihre Unsicherheit nicht ohne ein paar elementare Kenntnisse dieser Disziplinen geführt werden kann. Im folgenden werden die für die Auswertung von Messresultaten wesentlichsten Grundlagen erläutert [1;...;4].

Ein Experiment oder eine Messung kann – zumindest gedanklich – beliebig oft durchgeführt werden. Jedesmal erhält man für die Zufallsvariable  $X$  einen ganz bestimmten Wert  $x_i$ . Die Menge aller möglichen Ergebnisse  $\{x_i\}$  nennt man die *Grundgesamtheit*, ein einzelner Wert daraus eine *Realisierung* der Zufallsvariablen  $X$ . Zur Kennzeichnung werden Zufallsvariablen im folgenden mit Grossbuchstaben, einzelne Werte davon mit Kleinbuchstaben geschrieben.

Zu einer Zufallsvariablen gehört immer eine *Verteilungsfunktion*: Ihre Existenz muss vorausgesetzt werden. Sie ist folgendermassen definiert:



Figur 1 Verteilungsfunktion einer Zufallsgrösse mit endlich vielen Werten  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ .

Figur 2 Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung

$$F(x) = P(X < x). \quad (1)$$

$P(X < x)$  ist die Wahrscheinlichkeit, für die Zufallsvariable  $X$  einen Wert kleiner als  $x$  zu finden. Entsprechend dieser Definition leuchten die folgenden Eigenschaften der Verteilungsfunktion unmittelbar ein:

$$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1. \quad (2)$$

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  einen Wert kleiner als  $-\infty$  annimmt, ist null, die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  einen Wert kleiner als  $+\infty$  annimmt, ist 1.

Zwei Fälle sind für die Anwendung besonders wichtig:

Nimmt die Zufallsvariable  $X$  nur endlich viele Werte  $x_1, \dots, x_n$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_n$  an, so ist  $F(x)$  eine Treppenfunktion (Figur 1), die an der Stelle  $x = x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) jeweils um  $p_i$  zunimmt [1;2]. Die Summe aller zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  ist 1:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Ist  $F(x)$  stetig differenzierbar, so existiert die Ableitung von  $F(x)$ :

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad (3)$$

$f(x)$  heisst *Wahrscheinlichkeitsdichte* oder *Dichtefunktion* von  $X$ .

$f(x)dx$  ist die Wahrscheinlichkeit,  $X$  im Intervall  $[x, x+dx]$  zu finden.

Umgekehrt ist

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt. \quad (4)$$

Das bekannteste Beispiel einer Dichtefunktion ist die Normalverteilung (Gaussverteilung):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}. \quad (5)$$

Mit der Substitution  $t = (x-\mu)/\sigma$  kann diese Funktion mittels der Beziehung  $f(t)dt = f(x)dx$  in Normalform ( $\mu=0, \sigma = 1$ ) gebracht werden:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2}. \quad (6)$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \quad (7)$$

findet man in den meisten Statistikbüchern tabelliert vor. Die Dichtefunktion der Normalverteilung hat die bekannte Glockenform mit dem Maximum bei  $\mu$  und den Wendepunkten bei  $x = \mu + \sigma$  und  $x = \mu - \sigma$  (Fig. 2).  $\sigma$  ist ein Mass für die Breite der Kurve,  $\alpha = \Phi(x')$  ist die schraffierte Fläche unter der Kurve zwischen  $-\infty$  und  $x'$ . Die Kurve ist symmetrisch zur Geraden  $x = \mu$ . Die gesamte Fläche unter der Kurve beträgt 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  in ein Intervall zwischen  $a$  und  $b$  zu liegen kommt, ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx, \\ &= P(X < b) - P(X < a) \\ &= P(a \leq X < b), \\ &= \Phi(b) - \Phi(a). \end{aligned} \quad (8)$$

Bei einer normalverteilten Zufallsvariablen liegen im statistischen Mittel zwischen

$\mu - \sigma$	und	$\mu + \sigma$	68,3 %
$\mu - 1,96 \sigma$	und	$\mu + 1,96 \sigma$	95 %
$\mu - 2 \sigma$	und	$\mu + 2 \sigma$	95,4 %
$\mu - 2,57 \sigma$	und	$\mu + 2,57 \sigma$	99 %
$\mu - 3 \sigma$	und	$\mu + 3 \sigma$	99,7 %

aller Beobachtungen.

Viele zufällige Grössen in der Natur und in der mathematischen Statistik haben eine Normalverteilung als Wahrscheinlichkeitsdichte. Eine mathematische Begründung dafür liefert der *zentrale Grenzwertsatz*. Dieser sagt aus, dass unter bestimmten, recht allgemeinen Bedingungen die Summe  $X$  von unabhängigen Zufallsgrössen  $X_1, \dots, X_n$ ,

$$X = X_1 + \dots + X_n,$$

für grosse  $n$  eine Normalverteilung besitzt, und zwar unabhängig von der Art der Verteilung der  $X_i$ .

In der Praxis ist die explizite Kenntnis der Verteilungsfunktion oft nicht nötig: Man begnügt sich mit einigen Kennwerten, die einen qualitativen Hinweis über Lage und Form der Verteilung geben. Die wichtigsten Kennwerte (Parameter) sind der *Mittelwert* (Erwartungswert), die *Varianz* und die *Standardabweichung*.

Die Definitionen von Mittelwert und Varianz sind in Tabelle I angegeben. Allgemein wird für den Mittelwert  $\mu$  einer Zufallsvariablen  $X$  oft die Schreibweise

$$\mu = E(X), \quad (9)$$



gewählt. Wie man leicht zeigt, folgt daraus:

$$\sigma^2 = E(X - E(X))^2 \quad (11)$$

Die Standardabweichung  $\sigma$  ist die positive Wurzel aus der Varianz.

Es ist eine der Aufgaben der Statistik, anhand von Stichproben<sup>1</sup> Schätzwerte für die Parameter der zugrundeliegenden Verteilung der Zufallsgrösse zu ermitteln. So werden zum Beispiel aus  $n$  Wiederholungsmessungen die Messwerte  $x_1, \dots, x_n$  ermittelt. Aus diesen Messwerten erhält man die Schätzwerte  $\bar{x}$  und  $s^2$  für den Mittelwert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  nach den bekannten Formeln

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (12a)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (12b)$$

Die Varianz ist nach dieser Definition der Mittelwert der quadrierten Abweichungen  $x_i - \bar{x}$  der Einzelmessungen  $x_i$  vom Mittelwert  $\bar{x}$ . Dabei ist zu beachten, dass durch die Zahl  $n-1$  der voneinander unabhängigen Abweichungen dividiert wird. Diese Zahl nennt man den *Freiheitsgrad*<sup>2</sup>.

Es ist klar, dass bei Entnahme einer zweiten Stichprobe mit den Werten  $x'_1, \dots, x'_n$  der Mittelwert  $\bar{x}'$  und die Varianz  $s'^2$  dieser zweiten Stichprobe von den Werten der ersten Stichprobe abweichen. Die Parameter einer Stichprobe (wie Mittelwert oder Varianz usw.) sind deshalb ihrerseits Zufallsgrössen mit einer eigenen Verteilungsfunktion. Sie sind Schätzwerte der entsprechenden Parameter ( $\mu, \sigma^2$  usw.) der Grundgesamtheit.

Zwischen diesen Parametern, welche die Grundgesamtheit charakterisieren und den Parametern, die eine Stichprobe charakterisieren ( $\bar{x}, s^2$

	Stetige Zufallsvariable	Diskrete Zufallsvariable
Mittelwert: (Erwartungswert)	$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (10a)$	$\mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (10b)$
Varianz:	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (10c)$	$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i. \quad (10d)$

Tabelle I Definition für Mittelwert und Varianz

usw.), besteht ein wesentlicher Unterschied. Jede Grösse, die eine Grundgesamtheit charakterisiert, ist determiniert<sup>3</sup> ( $\mu$  und  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit z.B. sind feste Werte), während jede Grösse, die eine Stichprobe charakterisiert, eine Funktion von  $n$  unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und damit ebenfalls eine Zufallsgrösse ist. Schreibt man nämlich die Werte von verschiedenen Stichproben schön geordnet untereinander,

1. Stichprobe:  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n,$
2. Stichprobe:  $x''_1, x''_2, \dots, x''_n,$
3. Stichprobe:  $x'''_1, x'''_2, \dots, x'''_n,$
- . . . . .
- . . . . .
- . . . . .

so kann jede Stichprobe als Realisierung eines Zufallsvektors  $X$  mit  $n$  Komponenten aufgefasst werden:  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ . Die Komponenten  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sind Zufallsvariablen, welche die gleiche Verteilung haben wie die Grundgesamtheit. Die Parameter von Stichproben sind Funktionen dieser Zufallsvariablen.

Für einige in der Praxis wichtige Zufallsgrössen sind in Tabelle II die zugehörigen Verteilungsfunktionen aufgeführt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Grundgesamtheit eine Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu_0$  und Standardabweichung  $\sigma_0$  besitzt. Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes kann gezeigt werden, dass die normalverteilten Zufallsgrössen in dieser Zusammenstellung bei grossem Stichprobenumfang auch dann einer Normalverteilung folgen, wenn die Grundgesamtheit selbst keine Normalverteilung aufweist. Die Werte der aufgeführten Verteilungen findet man in vielen mathematischen Handbüchern tabelliert vor.

Die in Tabelle II angegebenen Zufallsgrössen haben eine grosse praktische Bedeutung: Es ist nämlich unge-

nügend, nach einer Serie von Messungen einfach Mittelwert und Standardabweichung zu berechnen und sie ohne weitere Information über die Zuverlässigkeit als Resultat anzugeben. Man weiss dann nicht, wie gross die zufälligen Schwankungen dieser Schätzwerte sind, das heisst wie zuverlässig das Resultat ist. Mit Hilfe der oben aufgeführten Zufallsgrössen ist es möglich, zusätzlich *Vertrauensbereiche* zu berechnen. Diese Vertrauensbereiche sind Intervalle, die den wahren, aber unbekannt Parameter mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  enthalten. Die Endpunkte dieser Intervalle werden als Vertrauensgrenzen,  $1 - \alpha$  als *Vertrauenswahrscheinlichkeit* (statistische Sicherheit, Vertrauensniveau),  $\alpha$  als *Irrtumswahrscheinlichkeit* (Signifikanzniveau) bezeichnet. Gewöhnlich wird  $\alpha = 0,01, 0,02$  oder  $0,05$  angenommen, was einer Wahrscheinlichkeit von 99%, 98% oder 95% entspricht, dass der wahre Wert in dem aus der Stichprobe berechneten Vertrauensbereich liegt.

Die drei ersten der in Tabelle II aufgeführten Zufallsgrössen erlauben, solche Vertrauensbereiche für den Mittelwert einer Messreihe zu berechnen. Die  $\chi^2$ -Funktion ermöglicht die Berechnung von Vertrauensbereichen des Schätzwertes der Standardabweichung. Die beiden letzten Funktionen können für den Vergleich von empirischen Mittelwerten und Standardabweichungen zweier Stichproben herangezogen werden. Damit kann beispielsweise geprüft werden, ob sich die Messbedingungen (statistisch ausgedrückt: die Grundgesamtheit) zwischen den beiden Stichprobenentnahmen verändert haben.

Bevor anhand einiger Beispiele erläutert wird, wie in der Praxis Vertrauensbereiche berechnet werden, muss man sich vergewissern, ob denn die Voraussetzung dazu, nämlich die Normalverteilung der zugrundeliegenden Grundgesamtheit, überhaupt ge-

<sup>1</sup> Eine Stichprobe vom Umfang  $n$  ist eine Teilmenge der Grundgesamtheit mit  $n$  Elementen, die der Untersuchung unterzogen werden.

<sup>2</sup> Da die Summe aller Abweichungen

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$$

gleich Null ist, sind die  $n$  Abweichungen  $x_i - \bar{x}$  voneinander linear abhängig.

<sup>3</sup> Man könnte sie, wenn alle Elemente der Grundgesamtheit bekannt wären, ausrechnen.

währleistet ist. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten, die hier kurz erwähnt werden sollen:

1. **Aufzeichnung einer Häufigkeitsverteilung:** Die Messwerte werden nach Messintervall klassiert und die Anzahl Messwerte jeder Klasse über diesen Intervallen aufgetragen. Die Klasseneinteilung hat eindeutig zu erfolgen; es ist klar festzulegen, in welcher Klasse Werte auf der Intervallgrenze zu zählen sind.

Dies soll an dem Beispiel einer Temperaturmessung (Fig. 3) illustriert werden. Wenn sich durch das Histogramm der Messwerte annähernd eine Glockenkurve zeichnen lässt, liegt die Vermutung nahe, dass die Messwerte normal verteilt sind. Obwohl klar ist, dass dieses Kriterium mathematischen Anforderungen nicht zu genügen vermag, ist es für eine rasche Orientierung trotzdem nützlich. Wird die Anzahl Messwerte  $n_i$  jeder Klasse durch den Umfang  $n$  der Stichprobe dividiert und der Quotient  $n_i/n$  über den Messintervallen aufgezeichnet, ergibt das Histogramm eine Näherung für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Stichprobe.

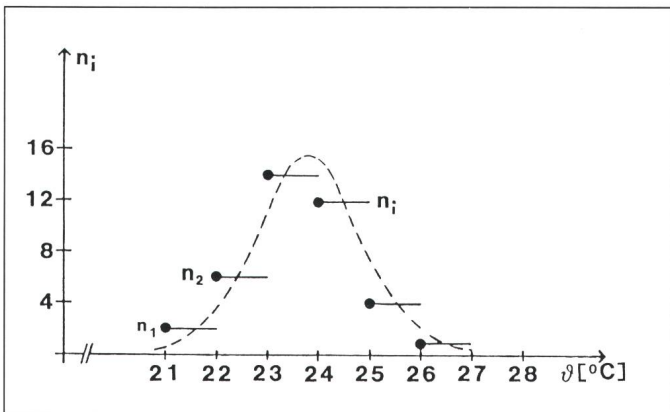
2. **Aufzeichnung der Summenhäufigkeit:** Anstelle der Klassenhäufigkeit  $n_i$  kann man sukzessive die Summen  $n_1, n_1+n_2, \dots, n_1+n_2+\dots+n_k$  der Klassenhäufigkeiten über den Messintervallen aufzeichnen (Fig. 4). Dabei gilt:

$$\sum_{i=1}^k n_i = n$$

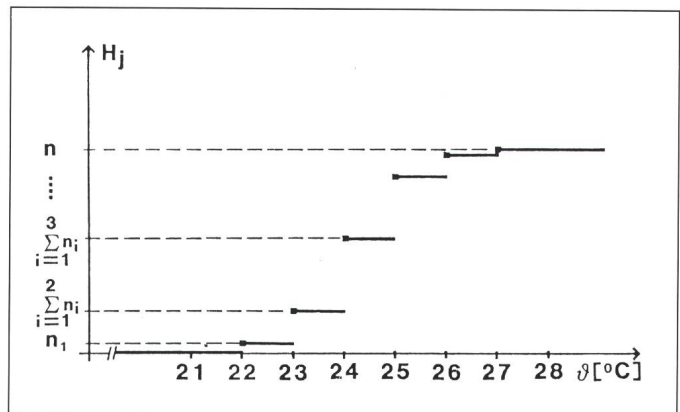
bei  $k$  Klassen aus  $n$  Messwerten. Werden diese Summenhäufigkeiten durch

Zufallsgrösse	Verteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte)
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	Normalverteilung mit den Parametern $\mu=\mu_0, \sigma=\sigma_0/\sqrt{n}$
$\bar{x}_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$	Normalverteilung mit den Parametern $\mu=0, \sigma=1$
$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$	Studentische $t$ -Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden
$\chi^2 = \frac{\nu s^2}{\sigma_0^2}$	Chi-Quadrat-Verteilung mit $\nu=n-1$ Freiheitsgraden
$\Delta\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$	Normalverteilung mit den Parametern $\mu=0, \sigma=\sigma_0\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$F$ -Verteilung mit $\nu_1=n_1-1, \nu_2=n_2-1$ Freiheitsgraden

Tabelle II Verteilung einiger Zufallsgrößen einer Stichprobe

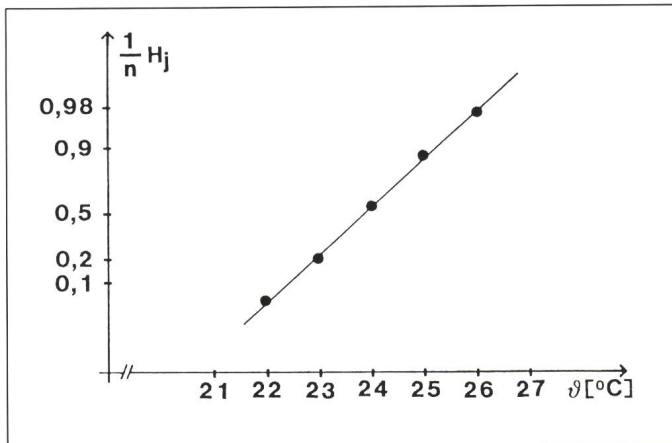


Figur 3 Häufigkeitsverteilung einer Anzahl Temperaturmesswerte  
 $n_i$  Anzahl Messwerte der  $i$ -ten Klasse  
 $\vartheta$  Temperatur



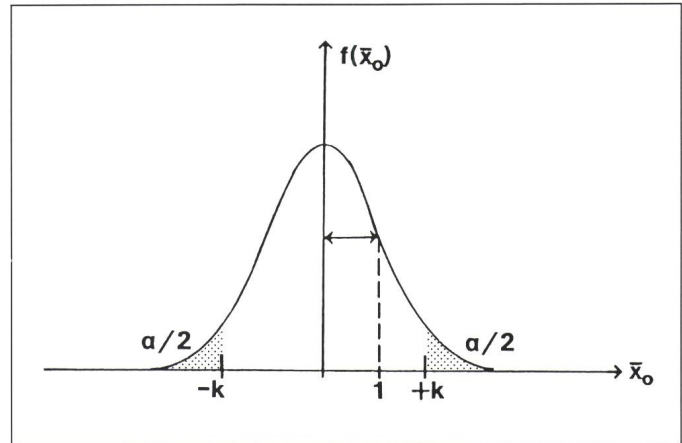
Figur 4 Summenhäufigkeitsverteilung einer Anzahl Temperaturmesswerte  
 $H_j$  Summenhäufigkeit  $n_1 + \dots + n_j$   
 $n$  Anzahl Messwerte  
 $\vartheta$  Temperatur





Figur 5 Normierte Summenhäufigkeit einer normalverteilten Messgröße, dargestellt auf Wahrscheinlichkeitspapier

$H_j$  Summenhäufigkeit  
 $n$  Anzahl Messwerte  
 $\vartheta$  Temperatur



Figur 6 Normalverteilung des empirischen, auf Null reduzierten Mittelwertes  $\bar{x}_0 = (\bar{x} - m) \sqrt{n}/\sigma$  einer ebenfalls normalverteilten Messgröße

$\bar{x}$  empirischer Mittelwert  
 $m$  unbekannter Mittelwert  
 $\sigma$  Standardabweichung  
 $\alpha$  Irrtumswahrscheinlichkeit  
 $n$  Anzahl Messwerte

$n$  dividiert, so erhalten wir in unserem Beispiel annähernd die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Messwert kleiner als 22°C, 23°C, ..., 27°C zu finden. Das Summenhäufigkeitsdiagramm stellt daher eine Näherung an die Verteilungsfunktion der Messgröße dar.

Die Summenhäufigkeit ist eine besonders geeignete Größe, um die Zufallsgröße auf Normalverteilung zu prüfen. Dazu benutzt man die im Handel erhältlichen Wahrscheinlichkeitspapiere, bei denen die Ordinate in der Weise skaliert ist, dass die Verteilungsfunktion bei normalverteilter Grundgesamtheit zu einer Geraden wird: Führt diese Darstellung der Messwerte annähernd auf eine Gerade, so ist die Annahme einer normalverteilten Grundgesamtheit gerechtfertigt (Fig. 5).

3. Neben diesen graphischen Prüfungen gibt es mathematische Tests, mittels derer die Richtigkeit der Annahme einer beliebigen theoretischen Verteilung geprüft werden kann. Dazu sei auf die Literatur verwiesen [2; 4].

Hat man sich über die Richtigkeit der Annahme einer Normalverteilung mit einer der oben angegebenen Methoden Klarheit verschafft, ist die Berechnung der Vertrauensgrenzen recht einfach:

1. *Beispiel:* Der Messwert einer Messanordnung sei normal verteilt mit einem unbekanntem Mittelwert  $\mu = m$  und der bekannten Standardabweichung  $\sigma$  ( $\sigma$  kann zum Beispiel auf Grund früherer Messungen oder theoretischer Überlegungen bekannt sein). Für den unbekanntem Wert  $m$  der

Messgröße soll der Vertrauensbereich berechnet werden, der den Wert mit einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95% ( $1 - \alpha = 0,95$ ) enthält. Dazu werden  $n$  Messungen ausgeführt, welche die Messwerte  $x_1, \dots, x_n$  ergeben. Die Größe

$$\bar{x}_0 = \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n}$$

folgt einer Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1 (Tabelle II). Nach Gleichung (8) ist die nichtschraffierte Fläche unter der Kurve in Fig. 6 die Wahrscheinlichkeit, dass  $\bar{x}_0$  einen Wert zwischen den Grenzen  $-k$  und  $+k$  besitzt. Bestimmt man den Wert von  $k$  so, dass diese Wahrscheinlichkeit 95% ( $1 - \alpha = 0,95$ ) beträgt, so ist

$$P(-k \leq \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} < +k) = 1 - \alpha. \quad (13a)$$

Daraus folgt durch Umformung

$$P(\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m \leq \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha, \quad (13b)$$

d.h. mit der Wahrscheinlichkeit von 95% befindet sich der gesuchte Mittelwert  $m$  mit Intervall

$$(\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Da  $\bar{x}$ ,  $n$  und  $\sigma$  bekannt sind, können die Vertrauensgrenzen

$$\bar{x} \pm k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

berechnet werden. Nach (8) ist nämlich

$$P(-k \leq \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} < +k) = \Phi(+k) - \Phi(-k), \quad (14)$$

wobei  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion (7) der normierten Normalverteilung ist. Da die Normalverteilung mit Mittelwert 0 bezüglich des Nullpunkts symmetrisch ist, folgt

$$\Phi(-k) = 1 - \Phi(+k). \quad (15)$$

Setzt man (14) und (15) in (13a) ein, folgt

$$\Phi(+k) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (16)$$

$k$  bestimmt man aus einer Tabelle für  $\Phi$  (Normalverteilung), wo der Wert 1,96 abgelesen wird.

Der Vertrauensbereich für den unbekanntem Mittelwert  $m$  (Erwartungswert  $\mu$  der Grundgesamtheit = «wahrer» Messwert) ist bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 0,05$  daher

$$(\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \quad (17)$$

das heisst mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ist

$$m = \bar{x} \pm 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (18)$$

2. *Beispiel:* In den meisten Fällen ist die Standardabweichung  $\sigma$  der Messgröße nicht bekannt. In diesem Falle verwendet man die Größe

$$t = \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n}$$

in der anstelle der Standardabweichung  $\sigma$  ihr Schätzwert  $s$  steht. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $t$  ist die Studentsche  $t$ -Funktion  $g_{n-1}(t)$  (Tabelle II), die ähnlich aussieht wie die Normalverteilung mit ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ), aber etwas breiter und flacher ist [3]. Die breitere Verteilung ist eine Folge der zusätzlichen Unsicherheit, die der Ersatz des genauen Wertes  $\sigma$  in  $\bar{x}_0$  durch die Zufallsvariable  $s$  zur Folge hat. Da für grosse  $n$   $s$  gegen  $\sigma$  strebt, streben auch die  $t$ -Verteilungen  $g_{n-1}(t)$  mit wachsendem  $n$  gegen die Normalverteilung.

Die Berechnung des Vertrauensbereiches, in dem sich der wahre Wert  $m$  mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  befindet, verläuft nun gleich wie im Beispiel 1: Die Grenzen  $k_\nu$  ( $\nu = n - 1$ ) sind so zu bestimmen, dass der Wert der Zufallsgrösse  $t$  mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  in den Bereich  $[-k_\nu, k_\nu]$  zu liegen kommt

$$P\left(-k_\nu \leq \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n} < +k_\nu\right) = 1 - \alpha \quad (19a)$$

Die Grenze  $k_\nu$  ist aus einer Tabelle der  $t$ -Verteilung für  $\nu = n - 1$  Freiheitsgrade abzulesen. Aus der obigen Gleichung folgt

$$P\left(\bar{x} - \frac{k_\nu s}{\sqrt{n}} < m \leq \bar{x} + \frac{k_\nu s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (19b)$$

Damit sind die Vertrauensgrenzen

$$\bar{x} \pm \frac{k_\nu s}{\sqrt{n}}$$

bestimmt. Graphisch (Fig. 7) liegen die Verhältnisse ähnlich wie in Beispiel 1. Es ist

$$P(-k_\nu \leq \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n} < +k_\nu) = \int_{-k_\nu}^{k_\nu} g_\nu(t) dt - \int_{-\infty}^{-k_\nu} g_\nu(t) dt = T_\nu(+k_\nu) - T_\nu(-k_\nu) = 1 - \alpha \quad (20)$$

Wegen der Symmetrie von  $g_\nu(t)$  folgt wiederum  $T_\nu(-k_\nu) = 1 - T_\nu(+k_\nu)$  und daraus

$$T_\nu(+k_\nu) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (21)$$

Für  $\alpha = 0,02$  und  $n = 10$  findet man beispielsweise in einer Tabelle der  $t$ -Verteilung mit  $\nu = n - 1 = 9$  den Wert  $k_\nu = 2,821$ . Der wahre Wert  $m$  der Messgrösse liegt demnach mit einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von 98% im Intervall

$$\left(\bar{x} - 2,821 \frac{s}{\sqrt{10}}, \bar{x} + 2,821 \frac{s}{\sqrt{10}}\right) \quad (22)$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% beträgt der wahre Wert somit

$$m = \bar{x} \pm 2,821 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (23)$$

Idealerweise sollte ein aus mehreren Wiederholungsmessungen ermitteltes Messresultat  $m$  wie folgt angegeben werden

$$m = \bar{x} \pm k_\nu \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (24)$$

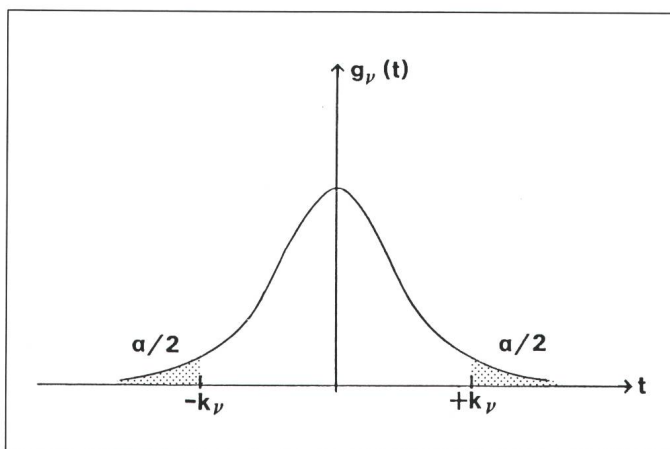
- $\bar{x}$  Mittelwert der Messwerte
- $s$  Schätzwert der Standardabweichung
- $\alpha$  Signifikanzniveau (oder Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$ )
- $n$  Anzahl Messwerte
- $k_\nu$  Faktor der  $t$ -Verteilung für  $\nu = n - 1$  Freiheitsgrade und vorgegebenes Signifikanzniveau  $\alpha$ .

Nach den gleichen Überlegungen, wie sie für Mittelwerte angestellt wurden, kann man auch für Varianzen und Standardabweichungen Vertrauensbereiche bestimmen:

3. Beispiel: Anhand von  $n = 10$  Messungen ist die empirische Varianz  $s^2$  (Schätzwert der wahren Varianz  $\sigma^2$ ) zu 0,37 berechnet worden. Gesucht ist die obere Schranke, unterhalb derer sich der wahre Wert  $\sigma^2$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% befindet.

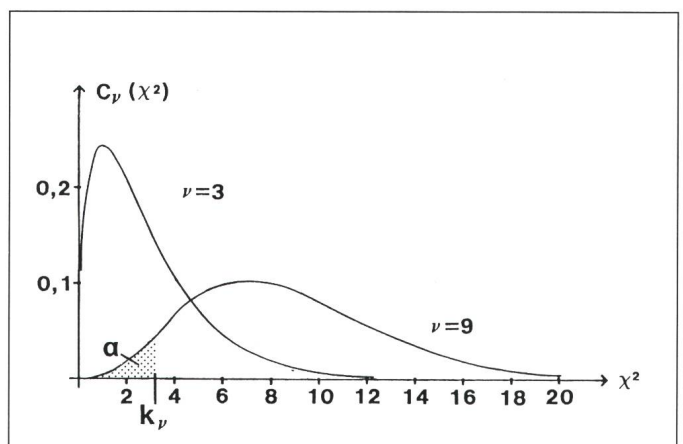
Man betrachtet die Grösse  $\chi^2 = \nu s^2 / \sigma^2$ , die nach einer Chi-Quadrat-Verteilung mit  $\nu = n - 1$  Freiheitsgraden verteilt ist (Fig. 8).

Da nur nach einer oberen Grenze für  $\sigma^2$  gefragt wird, führt man den Test einseitig durch: Man sucht die Grenze  $k_\nu$  so, dass der Wert  $\chi^2 = \nu s^2 / \sigma^2$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ( $\alpha = 0,05$ ) über der Grenze  $k_\nu$  liegt:



Figur 7 Studentsche  $t$ -Verteilung des empirischen, auf Null reduzierten Mittelwerts  $t = (\bar{x} - m) \sqrt{n/s}$  einer normalverteilten Messgrösse

- |                                   |                                    |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| $\bar{x}$ empirischer Mittelwert  | $\alpha$ Irrtumswahrscheinlichkeit |
| $m$ unbekannter Mittelwert        | $\nu$ Freiheitsgrad                |
| $s$ empirische Standardabweichung | $n$ Anzahl Messwerte               |



Figur 8 Chi-Quadrat-Verteilung der Grösse  $\chi^2 = \nu s^2 / \sigma^2$

- $s$  empirische Standardabweichung
- $\sigma$  unbekannte Standardabweichung
- $\nu$  Freiheitsgrad
- $\alpha$  Irrtumswahrscheinlichkeit



$$P\left(\frac{\nu s^2}{\sigma^2} \geq k_\nu\right) = 1 - \alpha, \quad (25)$$

$$= \int_{k_\nu}^{\infty} c_\nu(\chi^2) \cdot d(\chi^2).$$

Aus einer Integraltafel der  $\chi^2$ -Verteilung für  $\nu = n - 1 = 9$  Freiheitsgrade sucht man den Wert für  $k_\nu$  heraus, der dem Integral den Wert  $1 - \alpha = 0,95$  verleiht:  $k_\nu = 3,33$ . Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ist somit  $\nu s^2 / \sigma^2 > 3,33$ , und als obere Schranke von  $\sigma^2$  erhält man mit der gleichen statistischen Sicherheit von 95% daraus

$$\sigma^2 < \frac{\nu s^2}{k_\nu} \approx \frac{9 \cdot 0,37}{3,33} \approx 1. \quad (26)$$

Anhand der Figuren in den Beispielen 1 bis 3 erkennt man folgenden Zusammenhang zwischen Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  und Vertrauensbereich:

Eine hohe statistische Sicherheit der Aussage, das heisst eine hohe Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  bedingt, dass die schraffierte Fläche  $\alpha$  klein und somit das Vertrauensintervall gross ist. Ein kleiner Vertrauensbereich (schraffierte Fläche  $\alpha$  gross) bedeutet umgekehrt, dass die Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  und damit die statistische Sicherheit des Messresultates klein wird. Diese lässt sich natürlich durch Erhöhung der Anzahl Messwerte verbessern.

### Fortpflanzung der Messunsicherheiten

Die Konzepte der Statistik, die im vorhergehenden Kapitel beschrieben werden, basieren auf der Annahme der Existenz einer Grundgesamtheit, aus der, mindestens gedanklich, eine zufällige Stichprobe entnommen werden kann. In einer Messung ist die zu bestimmende Messgrösse häufig jedoch nicht direkt zugänglich. Die Messgrösse wird beispielsweise von einem Fühler erfasst, das Signal anschliessend in einer Messkette aufbereitet und zuletzt zur Anzeige gebracht. Das angezeigte Resultat  $X$  hängt im allgemeinen von mehreren Grössen  $X_i$  ab, die von unbekanntem Störungen überlagert sein können, im statistischen Sinne also Zufallsvariablen sind. Das Messresultat kann deshalb als Funktion der Zufallsvariablen  $X_i$  aufgefasst werden. Es stellt sich die Frage, welches der wahrscheinlichste Wert des Resultates ist und mit welchen Unsicherheiten dieses

Resultat behaftet ist. Die erste eingehende Behandlung dieser Fragestellung geht auf Gauss zurück [2]. Im folgenden werden mehrere Möglichkeiten diskutiert, ausgehend von einer vorgegebenen Funktion für die gesuchte Messgrösse ihren wahrscheinlichsten Wert und die zugehörige Messunsicherheit zu ermitteln.

Unabhängig davon, ob die Grössen  $X_i$  um einen allfälligen systematischen Fehler korrigiert wurden, kann für eine differenzierbare Funktion  $X = f(X_1, \dots, X_n)$  um die Mittelwerte  $\bar{x}_i$  herum eine Taylorentwicklung angesetzt werden. Sofern die Abweichungen  $\Delta X_i$  klein genug sind, dass Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden können, ist

$$X(X_1, \dots, X_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\{\bar{x}_i\}} \Delta X_i. \quad (27)$$

$\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\{\bar{x}_i\}}$  sind die partiellen Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $X_1 = \bar{x}_1, \dots, X_n = \bar{x}_n$ .

Als Resultat dieser Entwicklung erhält man für  $X$  in erster Näherung

$$\bar{x} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \quad (28)$$

und für die Abweichungen davon die Beziehung

$$\Delta X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\{\bar{x}_i\}} \Delta X_i. \quad (29)$$

Für die Abweichungen  $\Delta X_i$  der einzelnen Zufallsvariablen  $X_i$  vom Mittelwert  $\bar{x}_i$  muss ein Schätzwert eingesetzt werden. Es ist klar, dass diese Rechnung für die Unsicherheit des Resultates  $\bar{x}$  nur einen groben Schätzwert liefert. Insbesondere sind keine weiteren Aussagen über die statistische Zuverlässigkeit dieser Schätzung möglich. Für die Abschätzung der Messunsicherheiten im industriellen Mess- und Kalibrierwesen kommt eine solche Berechnungsweise deshalb nicht in Frage.

Eine Möglichkeit, zu einer Information über die statistische Zuverlässigkeit des Resultates  $X = \bar{x}$  zu gelangen, bietet die Ungleichung (Summation der Beträge)

$$\Delta X < \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\{\bar{x}_i\}} \Delta X_i \right|. \quad (30)$$

Soweit die Messfehler von Messinstrumenten herrühren, sind dafür

meist Abschätzungen in Form von Spezifikationen verfügbar. Diese Spezifikationen können oft als Fehlergrenzen (s. Kap. «Begriffe und Definitionen») interpretiert werden.

Für Messfehler, über die keine Angaben vorliegen, sind Vertrauensbereiche mit einer entsprechend hohen Vertrauenswahrscheinlichkeit zu ermitteln (s. Kap. «Bestimmung der Messunsicherheiten im elektrischen Kalibrierdienst»). Falls systematische Komponenten im Resultat nicht korrigiert werden, sind sie in der Abschätzung  $\Delta x_i$  der entsprechenden Messabweichung  $\Delta X_i$  einzubeziehen. Auf diese Weise gelangt man für die Messunsicherheit von  $\bar{x} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  zu der Abschätzung

$$\Delta x = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\{\bar{x}_i\}} \Delta x_i \right|, \quad (31)$$

die eine hohe Vertrauenswahrscheinlichkeit von nahezu 100% besitzt.

Im industriellen Kalibrierwesen ist die Abschätzung der Messunsicherheit mittels Summation der Unsicherheitsbeträge (nach Gl. 31) weit verbreitet. Es sei aber noch einmal darauf hingewiesen, dass diese Berechnungsweise nur dann zu einer Information über die Zuverlässigkeit des Messresultates führt, wenn die Abschätzungen der einzelnen Messfehler allesamt eine Vertrauenswahrscheinlichkeit von nahezu 100% besitzen. Der Preis, den man für diese Information zahlt, ist eine grosse Messunsicherheit.

Gegen diese Art der Berechnung wird vor allem von wissenschaftlicher Seite eingewendet, dass die Messunsicherheit dadurch überschätzt wird. Da es unwahrscheinlich ist, dass in einem komplizierten Messsystem alle Fehler das gleiche Vorzeichen haben und sich addieren, ist die Gefahr der Überschätzung besonders bei längeren Messketten mit vielen Fehlerbeiträgen vorhanden. Bei dieser Argumentation wird jedoch vergessen, dass zu einer Messunsicherheit immer auch eine Angabe über die statistische Sicherheit (Vertrauenswahrscheinlichkeit) gehört. Die Frage ist also nicht allein, ob die Messunsicherheit überschätzt wird oder nicht, sondern auch, auf was mehr Wert gelegt wird, auf eine kleine Messunsicherheit oder auf eine grosse statistische Sicherheit.

Vom mathematischen Standpunkt aus die befriedigendste Art der Fehlerabschätzung besteht darin, alle fehler-



behafteten Grössen zuerst um die systematischen Fehler zu korrigieren (in der Praxis ist dies leider kaum je exakt durchführbar). Alle Einflussgrössen  $X_i$  sind dann reine Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $m_i$ . Lässt sich die Funktion  $X = f(X_1, \dots, X_n)$  in eine Taylorreihe um den festen Wert im Punkte  $X_1 = m_1, \dots, X_n = m_n$  entwickeln,

$$X = f(m_1, \dots, m_n)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\{m_i\}} \Delta X_i + \dots \quad (32)$$

so kann die Reihe nach dem Term erster Ordnung abgebrochen werden, sofern die Abweichungen  $\Delta X_i$  genügend klein sind. In diesem Falle lässt sich die Varianz  $\sigma_x^2$  von  $X$  berechnen [2,4]:

Es gilt allgemein (die Funktion  $f$  darf nicht mit der Dichtefunktion verwechselt werden)

$$E(X) = \bar{x} = f(m_1, \dots, m_n) \quad (33)$$

und

$$\sigma_x^2 = E[X - E(X)]^2 = E \left[ \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\{m_i\}} \Delta X_i \right]^2 \quad (34)$$

Wenn die Zufallsvariablen  $X_i$  voneinander unabhängig sind, sind die Erwartungswerte  $E(\Delta X_i \cdot \Delta X_j)$  in (34) für  $i \neq j$  gleich Null und  $E(\Delta X_i)^2 = E(X_i - m_i)^2 = \sigma_{x_i}^2$ . Die Varianz (34) erhält dann die einfache Form

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\{m_i\}} \right]^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (35)$$

und die Standardabweichung von  $X$  lautet

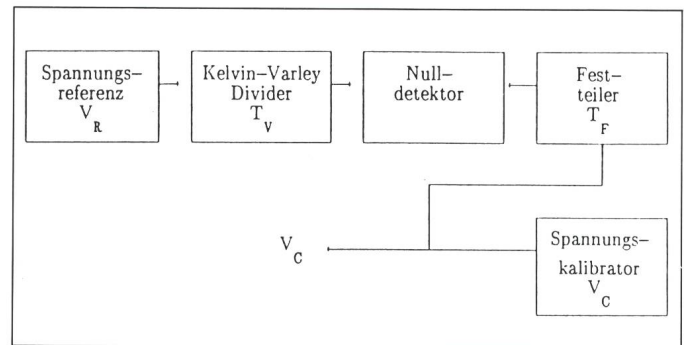
$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\{m_i\}} \right]^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (36)$$

Da die wahren Erwartungswerte  $m_i$  der Zufallsvariablen  $X_i$  nicht bekannt sind, rechnet man an ihrer Stelle mit ihren Schätzwerten, also statt mit (33), (35), (36) mit

$$\bar{x} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \quad (37)$$

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\{\bar{x}_i\}} \right]^2 s_{x_i}^2 \quad (38)$$

**Figur 9**  
**Blockschema eines Kalibriersystems zur Erzeugung hochgenauer Gleichspannungen**



$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\{\bar{x}_i\}} \right]^2 s_{x_i}^2} \quad (39)$$

Die Formel (39) ist das bekannte Gauss'sche Fortpflanzungsgesetz für zufällige Fehler. Die Messunsicherheit  $\Delta x$  wird hier durch den Schätzwert der Standardabweichung ausgedrückt. Es gilt, wie oben erwähnt, nur dann, wenn die einzelnen Fehlerkomponenten voneinander unabhängig sind. Es ist bemerkenswert, dass zu seiner Herleitung keine Annahme über die Art der Verteilung der Zufallsvariablen  $X_i$  getroffen werden muss. Durch die Addition der mittleren Fehlerquadrate in (39) wird die Messunsicherheit  $s_x$  deutlich kleiner, als wenn Fehlergrenzen wie in (31) betragsmässig addiert werden. Es ist aber zu beachten, dass die Voraussetzungen, die zur Herleitung der beiden Formeln gemacht werden müssen, verschieden sind, so dass ein solcher Vergleich nicht ohne weiteres vorgenommen werden darf.

Zur Illustration des Gauss'schen Fortpflanzungsgesetzes werden meistens Beispiele aufgeführt, in denen der funktionale Zusammenhang  $f$  durch eine mathematische oder physikalische Beziehung gegeben ist (Beispiel: Bestimmung des Volumens eines quaderförmigen Gefässes durch Messung der drei Seiten). Dieser einfache Fall ist im elektrischen Mess- und Kalibrierwesen praktisch nie gegeben, und es stellt sich die Frage, wie die Funktion  $f$  ermittelt werden soll.

### Mathematische Beschreibung des Messsystems

Zur Herleitung des funktionalen Zusammenhanges zwischen der Messgrösse und ihren Einflussgrössen muss für das Messsystem ein *mathematisches Modell* aufgestellt werden. Anhand eines Beispiels aus der elektrischen Kalibriertätigkeit soll das Vorgehen erläutert werden. Wir betrachten

ein Kalibriersystem, mit dem, je nach Teilverhältnis des Festteilers, hochgenaue Gleichspannungen zwischen 1 V und 1000 V erzeugt werden können (Fig. 9).

$V_R$  sei die Referenzspannung,  $T_V$  das Teilverhältnis des variablen Kelvin-Varley-Dividers,  $T_F$  das Teilverhältnis des Festteilers,  $V_C$  die Prüfspannung, mit der ein Spannungsmessgerät geprüft werden soll. Über den Festteiler und den Nulldetektor wird die Prüfspannung mit dem hochgenauen Wert einer elektronischen Spannungsreferenz verglichen. Der Kalibrator dient einzig als Spannungsquelle.

Unter Vernachlässigung aller Störeinflüsse und Ungenauigkeiten lässt sich der funktionale Zusammenhang zwischen  $V_C$  und  $V_R$  leicht angeben. Es ist (mathematisch wird der Nulldetektor durch das Gleichheitszeichen dargestellt):

$$V_R T_V = T_F V_C,$$

oder

$$V_C = \frac{T_V}{T_F} V_R. \quad (40)$$

In Wirklichkeit sind sowohl die Referenzspannung  $V_R$  als auch die Teilverhältnisse  $T_V$ ,  $T_F$  und der Nulldetektor mit Unsicherheiten behaftet. Zudem können weitere Einflüsse wie Thermospannungen und Spannungsabfälle in den Verbindungsleitungen den Spannungsvergleich beeinträchtigen. Das System wird deshalb besser durch eine Gleichung vom folgenden Typ beschrieben:

$$V'_R T'_V + V_{th} + V_N = T'_F V'_C,$$

oder

$$V'_C = \frac{1}{T'_F} [V'_R T'_V + V_{th} + V_N] \quad (41)$$

mit  $V'_C = k_C \cdot V_C$  und  $V'_R = k_R \cdot V_R$ . Die Konstanten  $k_C$  und  $k_R$  berücksichtigen die systematischen Fehler, die durch den Spannungsabfall in den Verbindungsleitungen zwischen Spannungsquelle und Teiler auftreten. Die Teilverhältnisse und Spannungen sind mit zufälligen Störungen behaftet. Die Grössen selber können deshalb als Zufallsvariablen betrachtet werden.  $V_{th}$  ist die Thermospannung im Ausgang des mit vielen Kontakten versehenen Kelvin-Varley-Teilers,  $V_N$  beschreibt die Messunsicherheit des Nulldetektors: Bedingt durch Rauschspannungen im System, ist ein vollständiger Nullabgleich nicht möglich. Welcher Seite man  $V_N$  zuschlägt, spielt keine Rolle.  $V_{th}$  und  $V_N$  können als Grössen mit Mittelwert 0 angesehen werden:  $\bar{V}_{th} = 0$  und  $\bar{V}_N = 0$ . Mit  $\{\bar{x}_i\} = \{\bar{V}'_R, \bar{T}_V$  und  $\bar{T}_F\}$  folgt aus (37) und (41).

$$V'_C = \frac{V'_R \cdot T_V}{T_F} \tag{42}$$

Durch Anwendung der Gleichung (31) auf (41) erhalten wir:

$$\Delta V'_C = \left| \frac{V'_R \cdot \bar{T}_V}{\bar{T}_F^2} \Delta T_F \right| + \left| \frac{\bar{T}_V}{\bar{T}_F} \Delta V'_R \right| + \left| \frac{V'_R}{\bar{T}_F} \Delta T_V \right| + \left| \frac{1}{\bar{T}_F} \Delta V_{th} \right| + \left| \frac{1}{\bar{T}_F} \Delta V_N \right|, \tag{43}$$

und mit (39)

$$s_{V'_C}^2 = \frac{\bar{V}'^2_R \cdot \bar{T}_V^2}{\bar{T}_F^4} s_{T_F}^2 + \frac{\bar{T}_V^2}{\bar{T}_F^2} s_{V'_R}^2 + \frac{\bar{V}'^2_R}{\bar{T}_F^2} s_{T_V}^2 + \frac{s_{V_{th}}^2}{\bar{T}_F^2} + \frac{s_{V_N}^2}{\bar{T}_F^2}. \tag{44}$$

Häufig ist nicht der Absolutwert der Messunsicherheit gesucht, sondern ihr Relativwert. Dazu wird (43) durch  $\bar{V}'_C$  und (44) durch  $\bar{V}'^2_C$  dividiert. Zusammen mit (42) folgt

$$\frac{\Delta V'_C}{\bar{V}'_C} = \left| \frac{\Delta T_F}{\bar{T}_F} \right| + \left| \frac{\Delta V'_R}{\bar{V}'_R} \right| + \left| \frac{\Delta T_V}{\bar{T}_V} \right| + \left| \frac{\Delta V_{th}}{\bar{V}'_R \cdot \bar{T}_V} \right| + \left| \frac{\Delta V_N}{\bar{V}'_R \cdot \bar{T}_V} \right|, \tag{45}$$

und

$$\frac{s_{V'_C}^2}{\bar{V}'^2_C} = \frac{s_{T_F}^2}{\bar{T}_F^2} + \frac{s_{V'_R}^2}{\bar{V}'^2_R} + \frac{s_{T_V}^2}{\bar{T}_V^2} + \frac{s_{V_{th}}^2}{\bar{V}'^2_R \cdot \bar{T}_V^2} + \frac{s_{V_N}^2}{\bar{V}'^2_R \cdot \bar{T}_V^2}. \tag{46}$$

Der Relativwert der Messunsicherheit der gesuchten Kalibrierspannung

ist gleich der Summe der Relativwerte der einzelnen Unsicherheitskomponenten. Dies ist das bekannte Fortpflanzungsgesetz für Produkte und Quotienten von fehlerbehafteten Grössen. Die Störspannungen am Nulldetektor erscheinen im Vergleich zur Unsicherheit der Referenzspannung um den Faktor  $1/T_V$  verstärkt.

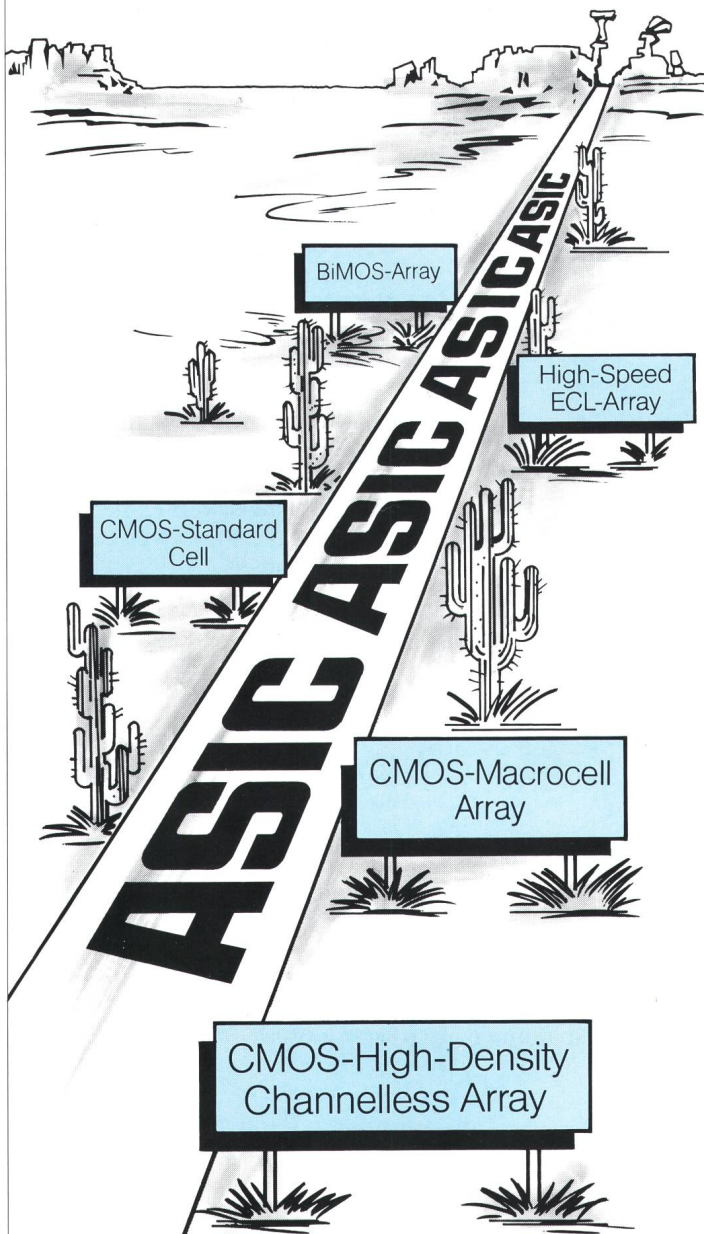
Ist das mathematische Modell (in unserem Beispiel gegeben durch die Gleichung (41)) einmal aufgestellt, ist die Berechnung der Messunsicherheit nach (31) oder (39) im Prinzip eine Fleissarbeit, die unter anderem auch das Zusammentragen der einzelnen Unsicherheitsbeiträge beinhaltet: Erstellen einer statistischen Datenbasis, Zusammentragen der Gerätespezifikationen, Abschätzen von Fehlerkomponenten, die auf andere Weise ermittelt werden müssen.

**Literatur**

- [1] J. Dreszer: Mathematik Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. Zürich u.a., Verlag Harri Deutsch, 1975.
- [2] B. L. van der Waerden: Mathematische Statistik. 3. Auflage. Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1971.
- [3] A. Linder und W. Berchtold: Statistische Methoden. Band I+II. Basel, Birkhäuser-Verlag, 1979/1982.
- [4] P.-A. Paratte et P. Robert: Systèmes de mesure. Traité d'électricité de l'EPFL, volume XVII. - Lausanne, Presses Polytechniques Romandes, 1986.



Für **ASIC** brauchen Sie nicht nach Arizona zu fahren.



**Unser Design-Center ist bereits mit dem Hersteller in Phoenix verbunden.**

Profitieren Sie. Rufen Sie uns an. ASIC sind unsere Stärke.

Omni Ray AG, Industriestrasse 31, CH-8305 Dietlikon/Zürich

Telefon 01/835 21 11

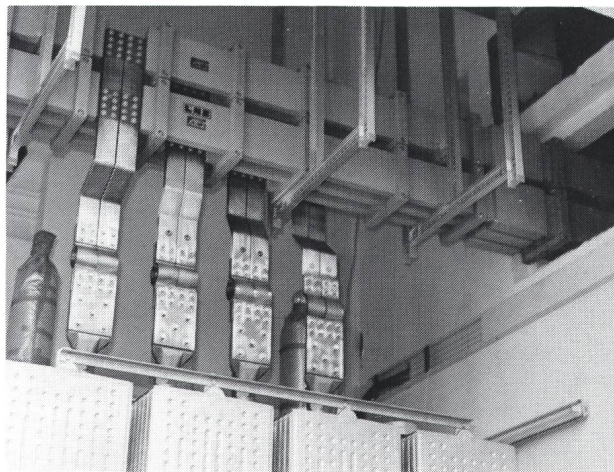
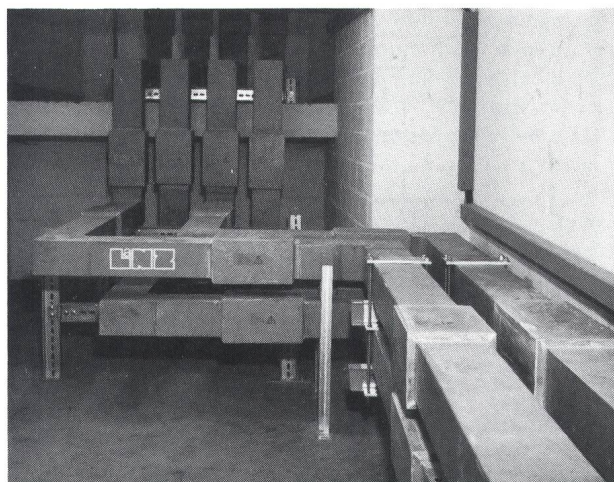
**OmniRay**

**Alles, was technisch Zukunft hat.**

**LANZ**

Lanz – Ihr Berater und Problemlöser für die elektrische Energieverteilung

- Kabelträgersysteme
- Doppelböden
- **Stromschienen**



Beleuchtungsschienen 20A  
Stromschienen 100–3500A  
Betobarschienen IP68 bis 24 kV

Verlangen Sie unsere Dokumentation

**lanz oensingen ag**

4702 Oensingen Tel. 062/78 21 21 Fax 062/76 31 79