Zur Praxis der Volksschule : Beilage zur Schweizerischen Lehrerzeitung, Februar 1923, Nr. 1

Autor(en): **Fröhlich, O. / Ernst, W. / R.W.**

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **Schweizerische Lehrerzeitung**

Band (Jahr): **68 (1923)**

Heft 7

PDF erstellt am: **27.06.2024**

ZUR PRAXIS DER VOLKSSCHULE

Beilage zur Schweizerischen Lehrerzeitung

Februar | Nr. 1 | 1923

Zur Einführung ins Einmaleins.

Von O. Fröhlich, Übungslehrer, Kreuzlingen.

Der neue Rechnungsunterricht sorgt für eine gründliche, vor allem anschauliche Einführung der Einmaleins-Reihen. Das *Malnehmen* ist ein *Zusammenzählen* gleicher Posten. Die Aufgabe: Wieviel ist 2×2? will feststellen, wieviel Einheiten sich ergeben, wenn einmal 2 und noch einmas 2 zusammengefaßt werden. Sie ist darum der Aufgabe $2 + 2$ gleich, und aus diesem Grunde ist das Zuzählen gleicher Zahlen die beste Vorbereitung der Multiplikation. Ein vollständiges Beherrschen dieser Rechnungsart kann indessen nur durch die Kenntnis der Aufreihen erzielt werden. Die Reihen 1, 3, 5 .... 99; 2, 4, 6 .... 100; 1, 4, 7 .... 100; 2, 5, 8 .... 98; 3, 6, 9 .... 99 etc., auf- und abwärts, müssen daher während des ganzen Sommersemesters im 2. Schuljahr Gegenstand fortwährender Übung und Prüfung sein, sollen wir beim nachherigen Vervielfachen auf eine erfolgreiche Arbeit zählen können. Allerdings ist bei der Einführung ins Malnehmen noch zwei andern Faktoren weitgehende Aufmerksamkeit zu schenken. Fürs erste gebührt dem Wort «Mal», das den Kindern vom Gesamtunterricht her bekannt ist (1, 2, 3 mal aufstehen, aufhalten, klatschen) erneute Auffrischung, und zweitens ist das Kind durch geeignete Übungen im Auffassen der sog. Malzahlen als *Einheiten* restlos zu befähigen. Die *erste Vorübung* zur Multiplikation ist daher die *Gewöhnung* der Schüler, die Zahl, welche multizpliziert werden soll, als *Ganzes* aufzufassen und das erreichen wir, indem wir von den Schülern gleiche Posten aus Zweien, Dreien, Vieren, Fünfen etc. bilden und zusammenzählen lassen. Dabei leistet uns die Doppelfärbung der Kugeln an Schneiders Zählrahmen gute Dienste. Die Arbeitsschule — die bekanntlich nicht nur in der Rechenstunde rechnet — läßt die Kinder auch hantieren mit verschiedenfarbigen Kartonmünzen, Kartontäfelchen, Stäbchen, Knöpfen u. drgl., die auf dem Rechenbrett zu 2er-, 3er-, 4er- etc. Gruppen zusammengestellt werden. Daß die Wandtafelskizze auch in den Dienst dieser Vorübungen — des Rechnens überhaupt — gestellt werden kann, liegt auf der Hand. So veranschaulichen beispielsweise gestielte Kirschen, Pflaumen, Eicheln zu Zweien an einem Zweig gruppiert, Schwalbenpaare auf dem Draht, Vögel im Nest Zweiergruppen für die Zweierreihe.

Die starke Betonung der Handbetätigung läßt es wohl als selbstverständlich erscheinen, daß vorgehende Zweiergruppen von den Schülern nicht nur nachgezeichnet, sondern in Ton oder Plastilin modelliert oder in Naturpapier ausgeschnitten und aufgeklebt werden; denn die Losung «Durch Selbsttätigkeit zur Selbständigkeit» gilt auch im Rechenunterricht der Kleinen!

Als *zweite vorbereitende Übung* zum Multiplizieren ist im Hinblick auf die Tatsache, daß das Malnehmen ein Addieren gleicher Posten bedeutet, das Zuzählen von gleichen Summanden anzusehen, was übrigens bereits einleitend betont wurde. Die innige Beziehung zwischen Multiplikation und Addition dem Schüler zum klarsten Verständnis zu bringen und ihm stets in Erinnerung zu rufen, ist und bleibt eine *grundlegende* Aufgabe des Lehrers bei der Einführung der Einmaleinsreihen. Erstens ist es nicht belanglos, ob sich der Schüler bei der Multiplikation einer neuen Rechnungsart oder alten Bekannten gegenübersieht, und zweitens vermag der Schüler das verloren gegangene Einmaleinsresultat rascher wieder aufzubauen, wenn er es nicht als mechanisch eingeprägte Zahl, sondern als denkend gefundenes Ergebnis kennen lernte. Der Schreiber dieser Zeilen veranschaulicht unter Beteiligung der Schüler den Zusammenhang zwischen Zuzählen und Malnehmen seit Jahren auf folgende Weise:

1		2		3		4		5	Multiplikand
$\times$		$\times$		$\times$		$\times$		$\times$	
2	+	2	+	2	+	2	+	2	Multiplikator
‖		‖		‖		‖		‖	
2		4		6		8		10	Produkt

Der Aufbau wird mit $2 + 2$ begonnen. Das Produkt $= 4$ wird unten angeschrieben. Hierauf folgt die Frage: Wieviel $\times 2$ ist also 4? Nun wird über den obern Strich das 2 und in den Strich das $\times$ gesetzt. Wieviel ist — unter Hinweis auf die erste Reihe — $4 + 2$? Wieviel $\times 2$ war 4? Wieviel $\times$ haben wir 2 zugelegt? Wieviel $\times 2$ ist also 6? etc. Bei dieser Entwicklung ist mit Vorteil Farbkreide zu benützen und zwar dergestalt, daß Multiplikand und Produkt z. B. mit roter Kreide angeschrieben werden, während der Multiplikator weiß auftritt. Das 1×2 wird erst zuletzt hinzugefügt; denn der Multiplikand 1 will dem Schüler der 1. und 2. Klasse erfahrungsgemäß nie recht als Menge erscheinen, obwohl er's ja selbstverständlich ist. Ihm bietet 1×2, 1×3 nichts zu rechnen; denn das Resultat ist immer dem Multiplikator gleich. Der Schüler spricht also ohne Gedanken — aus dem Gleichklang heraus — Sätze wie $1 \times 2 = 2$, $1 \times 3 = 3$ oder $2 \times 1 = 2$, $3 \times 1 = 3$. Darum sind derartige Aufgaben ganz ungeeignet, die Multiplikation verständlich zu machen und haben deshalb auch erst am Schluß der Operation als Ergänzung der Multiplikationsreihen aufzutreten.

Nach dieser Entwicklung werden in einer nächsten Rechenstunde Additions- und Multiplikationsreihe in der Form an der Tafel vorgeführt, wie sie sich im zweiten Stöcklin vorfindet:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \times 2 \\ 2 + 2 &= 2 \times 2 \\ 2 + 2 + 2 &= 3 \times 2 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Daraufhin werden an der Malreihe Übungen vorgenommen; wie: Wieviel ist 3×2, 8×2; wieviel $\times 2$ ist 12, 18, 14, 16 ist wieviel $\times 2$ etc. Ist die Einmaleinsreihe so durchgearbeitet so werden die Kinder darauf hingewiesen, daß die Produkte der Reihe eine gewisse Kette bilden, in welcher die Einzelglieder sich gegenseitig stützen. Weiß das Kind z. B. wieviel 6×2 ist, so soll es sich in der Nachbarschaft umsehen. Vielleicht weiß es, daß $5 \times 2 = 10$ ist. Aus diesem Wissen sollte es leicht schließen können, wieviel 6×2 und wieviel 4×2 ausmacht. Auch ist dem Schüler zum Bewußtsein zu bringen, daß nicht bloß die Nachbarglieder sich gegenseitig stützen, sondern daß sich auch über die nächsten Glieder hinaus festigende Fäden ziehen lassen. $2 \times 2 = 4$. Das Doppelte von 2×2 ist 4×2. Das Doppelte von 4 ist 8. So muß $4 \times 2 = 8$ sein. Von 2×2 kann auch auf 6×2, von 4×2 auf 8×2 etc. geschlossen werden. Dabei ist sehr zu empfehlen, daß neben die oben notierte Zweierreihe, die mehr die Bindung von Glied zu Nachbarglied kennzeichnet, eine weitere Zweierreihe gesetzt wird, in welcher die vorerwähnten Zusammenhänge durch *Farbkreide* hervorgehoben werden. Es sind in Nachachtung dieser Forderung die Zeilen $2 \times$, $4 \times$, $8 \times$ in ein und derselben Farbe zu schreiben. Daselbe gilt auch von den Reihen $3 \times$, $6 \times$, $9 \times$. Zur Ergänzung der Reihe ist in besonderer Farbe noch nachzutragen $5 \times$, was aus der Hälfte von $10 \times$ resultiert und $7 \times$, was von $8 \times$ oder 6×2 abgeleitet wird. 1×2 wird ohne weiteres ergänzt.

Nachdem die Einmaleinsreihen — das Einführungsverfahren ist im Grunde genommen bei jeder Reihe das gleiche — mehrmals verschieden aufgebaut worden sind, gilt es, die *Produkte* — Einmaleinszahlen — dieser anschaulich und wenn immer möglich selbsttätig erarbeiteten Reihen dem *Gedächtnisse der Schüler bleibend einzuverleiben;* denn elementare Aufgaben müssen jederzeit aus dem Gedächtnis heraus beantwortet werden. Das heißen wir *Rechenfertigkeit.* Solange der Schüler beispielsweise die Aufgabe 4×2 durch wiederholte Addition löst, oder solange er sich auf die Frage, wieviel ist 4×2? erst Kugeln, Stäbchen, Knöpfe, Finger vorstellen muß, ehe er Bescheid zu geben vermag, solange werden wir ihm keine Rechenfertigkeit zusprechen können. Und diese Rechenfertigkeit läßt sich nur durch immerwährende Übung erreichen.

In der *Aneignung der Einmaleinszahlen* erwies sich nun in meiner Schule von den verschiedenen Rechenlehrmitteln eines als besonders wertvoll. Es ist *«Mein Einmaleins»* von A. Reinl, Verlag A. Hase, Prag, auf das näher einzutreten sich wohl verlohnt.

Reinl's Einmaleins besteht aus 6 Pappstreifen, $1 \text{m} \times 0{,}17 \text{m}$, die bequem an jeder Wandtafel befestigt werden können. Auf denselben finden sich folgende 8 cm hohe Ziffern, von denen diejenigen der Produktenreihe (Mitte) rot gedruckt sind:

Vorderseite

2	**4**	2
2	**6**	3
2	**8**	4
3	**9**	3
2	**10**	5
2	**12**	6
3		4
2	**14**	7
3	**15**	5
2	**16**	8
4		4
2	**18**	9
3		6

Rückseite

4	**20**	5
3	**21**	7
4	**24**	6
3		8
5	**25**	5
3	**27**	9
4	**28**	7
5	**30**	6
4	**32**	8
5	**35**	7
6	**36**	6
4		9

Vorderseite (Rücks. leer)

5	**40**	8
6	**42**	7
5	**45**	9
6	**48**	8
7	**49**	7
6	**54**	9
7	**56**	8
7	**63**	9
8	**64**	8
8	**72**	9
9	**81**	9

Durch Weglassung des Malnehmens mit 1 und 10, sowie der sich wiederholenden Einmaleins-Sätze *verbleiben* 31 — gegenüber 80 im gewöhnlichen Einmaleins, wenn das Einmaleins von 1 und 10 außer acht gelassen wird — *einzuprägende* Sätze. In der Einübung (Stärkung des Memorierwillens!— hat der Schreiber folgenden Gang eingeschlagen:

a) *Sämtliche Streifengruppen* werden der Klasse vorgezeigt; die Kinder sprechen:

$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$ oder $3 \times 2 = 6$
$2 \times 4 = 8$ oder $4 \times 2 = 8$ etc.

b) Die *Reihen der Produkte* (rot) werden entfernt; die Kinder sprechen:

$2 \times 2 = ?$
$2 \times 3 = ?$ oder $3 \times 2 = ?$
$2 \times 4 = ?$ oder $4 \times 2 = ?$ etc.

Durch fleißiges Ablesen dieser Einmaleins-Reihen entwickelt sich im Gedächtnis des Kindes ein Bild der 31 Zahlengruppen — Produkte mit 1—2 Faktorenpaaren —, das durch nachfolgende Übungen, denen ganz besondere Bedeutung zukommt, vollkommen befestigt wird.

c) Die *vordere Faktorenreihe* wird entfernt:

$4 = 2 \times ?$ oder $4 = ? \times 2$
$6 = 3 \times ?$ oder $6 = ? \times 3$
$8 = 4 \times ?$ oder $8 = ? \times 4$ etc.

d) Die *hintere Faktorenreihe* wird entfernt:

$4 = 2 \times ?$ oder $4 = ? \times 2$
$6 = 2 \times ?$ oder $6 = ? \times 2$
$8 = 2 \times ?$ oder $8 = ? \times 2$ etc.

e) Die *beiden Faktorenreihen* werden entfernt:

$4 = ? \times ?$
$6 = ? \times ?$ oder $? \times ?$
$8 = ? \times ?$ oder $? \times ?$ etc.

Anfänglich wollte mir die Vertauschung der Faktoren bei obigen Übungen für Schüler der 2. und 3. Klasse etwas gewagt erscheinen. Die Befürchtung erwies sich indessen wohl infolge der vielen Vorübungen, bei denen das Kind befähigt worden ist, jede zu multiplizierende Zahl als Einheit aufzufassen, als durchaus unbegründet. Im Gegenteil kann festgestellt werden, daß bei der Verwendung dieses Lehrmittels die vollkommene Beherrschung des Einmaleins in verhältnismäßig kurzer Zeit ohne große Mühe erreicht wird. Das eintönige Einmaleins-Aufsagen ist durch eine abwechslungsreiche Einprägungsweise ersetzt, die kein mechanisches, gedankenloses Sprechen gestattet, sondern zum Denken zwingt. Der oft an Schulkindern beobachtete Gedächtnisfehler, daß sie das Einmaleins nach der Reihe fließend aufsagen können, beim Abfragen außer der Reihe aber versagen, kann hier nicht aufkommen, da keine Reihen, sondern Zahlengruppen zu je 3 zusammengehörigen Zahlen eingeprägt werden. Dabei tritt das Produkt als Beherrscher der Faktoren auf den Tabellen durch rote Farbe hervor, was bewirkt, daß diese Zahlenbilder durch das immerwährende Anschauen sich im Gedächtnis der Kinder so fest verankern, daß sie ihnen jederzeit zur Verfügung stehen, ob man nun Vervielfachen, Enthaltensein oder Teilen von ihnen verlangt. Daß nämlich das Enthaltensein und das Teilen, welche Operationen erwiesenermaßen mit Vorteil dem Malnehmen direkt angeschlossen werden (es gibt Methodiker, die empfehlen, an die Additionsreihe der 2 unmittelbar ihre Multiplikationsreihe zu schließen und der Subtraktionsreihe die Divisionsreihe der 2 folgen zu lassen) an Hand von Reinls Einmaleins-Streifen auch geübt werden können, versteht sich von selbst. Ebenso dürfte aus den Zahlenreihen ersichtlich sein, daß sich dieselben auch für die obern Klassen verwenden lassen, sei es, daß an der vordern oder an der hintern oder an beiden Faktorenreihen eine Null oder in derselben Reihenfolge zwei Nullen oder Nullen in ungleicher Zahl bei beiden Faktorenreihen hinzugedacht werden. Endlich ist noch zu bemerken, daß sich alle angeführten Übungen auch als schriftliche Beschäftigung eignen.

Reinls Einmaleins-Streifen, die zur Zeit im Pestalozzianum aufliegen, sind darum zur Anschaffung bestens zu empfehlen.

Zur Behandlung des Kettensatzes.

Aufgabe: Es soll berechnet werden, auf wieviele Mark 2000 deutsche Pfund zu stehen kommen, vorausgesetzt, daß 112 englische Pfund mit 63 Schillingen zu bezahlen waren, daß 100 deutsche Pfund = 110 englische Pfund und daß 20 Schillinge = 20,4 Mark waren.

Darbietung: Wir wollen die gegebene Größe durch einen kleinen Kreis, die gesuchte durch einen Punkt veranschaulichen.

• Mark

○ Deutsche Pfund

Da keine direkte Beziehung zwischen deutschem Pfund und Mark angegeben ist, so gilt es, den Raum durch gedankliche Zwischenglieder zu überbrücken. Eine solche besteht jedoch zwischen deutschem Pfund und englischem Pfund. Durch Dreisatz gelangen wir von den deutschen Pfund zu den englischen Pfund, von hier zu den Schillingen und von den Schillingen zu Mark. Damit ist der ganze Zwischenraum überbrückt und wir erhalten folgendes Bild für den Gedankengang:

• Mark
↑ Schillinge
↑ Englische Pfund
○ Deutsche Pfund

Der zu begehende Weg liegt nun klar vor uns. Wir hätten demnach: 1. Deutsche Pfund in englische Pfund, 2. englische Pfund in Schillinge, 3. Schillinge in Mark zu verwandeln.

Wir wollen die Gleichungen, die zwischen diesen Größen bestehen, zusammenstellen.

1. 100 deutsche Pfund = 110 englische Pfund
2. 112 englische Pfund = 63 Schilling
3. 20 Schilling = 20,4 Mark.

Nun verwandeln wir zunächst 1 deutsches Pfund in Mark, hernach 2000 deutsche Pfund. Nach der 1. Gleichung ist

$$1 \text{ deutsches Pfund} = \frac{110 \text{ englische Pfund}}{100}$$

Ein deutsches Pfund ist somit in englisches Pfund verwandelt. Nach der 2. Gleichung ist

$$1 \text{ englisches Pfund} = \frac{63 \text{ Schilling}}{112}$$

$$110 \text{ englische Pfund} = \frac{110 \cdot 63 \text{ Schilling}}{112}$$

$$\frac{110 \text{ englische Pfund}}{100} = \frac{110 \cdot 63 \text{ Schilling}}{100 \cdot 112}$$

Ein deutsches Pfund ist in Schillinge verwandelt. Die dritte Gleichung erlaubt die Verwandlung der Schillinge in Mark.

$$\text{Ausdruck: } 1 \text{ deutsches Pfund} = \frac{110 \cdot 63 \cdot 20{,}4 \text{ Mark}}{100 \cdot 112 \cdot 20}$$

Die Zahlen über dem Bruchstrich stehen rechts, die unter dem Bruchstrich links vom Gleichheitszeichen.

$$2000 \text{ deutsche Pfund} = \frac{2000 \cdot 110 \cdot 63 \cdot 20{,}4 \text{ Mark}}{110 \cdot 112 \cdot 20}$$

Setzen wir x Mark 2000 deutsche Pfund als oberste Gleichung hin, so haben wir die Darstellung des Kettensatzes.

x Mark	2000 deutsche Pfund
100 deutsche Pfund	110 englische Pfund
100 englische Pfund	63 Schilling
20 Schilling	20,4 Mark

$$x = \frac{2000 \cdot 110 \cdot 63 \cdot 20{,}4 \text{ Mark}}{100 \cdot 112 \cdot 20}$$

Bildung: 1. Die erste Größe enthält die unbekannte Größe x und deren Bezeichnung als Maß-, Münz oder Gewichtseinheit. 2. Jede folgende Gleichung beginnt mit der Benennung, mit der die vorangehende geschlossen hat. 3. Die letzte Gleichung hört mit der Benennung auf, welche x trägt.

Ausrechnung: Alle Zahlen rechts der Gleichheitszeichen kommen über, alle links unter den Bruchstrich.

In den nächsten Stunden wird man zwei oder drei Beispiele an Hand des Kettensatzes durch Dreisatz schrittweise vollständig durchverwandeln. Es muß mit Klarheit zum Bewußtsein gebracht werden, daß es sich hier um eine schematische Darstellung mehrerer miteinander verketteter Dreisätze handelt.

W. Ernst, Illnau.

Geometrische Progressionen.

Bei Behandlung von Scherzfragen ist der eine und andere der Kollegen gewiß schon auf das Wettrennen zwischen Achilles und der Schildkröte zu sprechen gekommen. *) Die Aufgabe ist dankbar, zumal sie einen hübschen Ausblick in das Reich des unendlich Kleinen gestattet und Anregung gibt zu Andeutungen und Erläuterungen über die interessanten Eigenschaften der fallenden geometrischen Progression. Die Progressionen begegnen uns ja im Laufe der drei Jahre ohnehin, so bei den periodischen Dezimalbrüchen und bei der Zinses-Zins-Rechnung. Die Lösung des Problems «Achilles und die Schildkröte» kann sich etwa folgendermaßen gestalten, nachdem die Aufgabe, so wie sie unten aufgeschrieben steht, den Schülern vorgelegt worden ist:

Bekannt:

1. Achilles macht in einer Sekunde 10 m.
2. Die Schildkröte in einer Sekunde 1 dm.
3. Die anfängliche Entfernung beider zu Beginn des Rennens beträgt 100 m. Was können wir mit diesen Angaben anfangen?

«Ausrechnen, wie weit Achilles in 1, 2, 3, 4 Sekunden kommt, dasselbe auch für die Schildkröte.»

	Achilles	Schildkröte
in 1 Sekunde	10 m	1 dm
in 2 Sekunden	20 m	2 dm
in 3 Sekunden	30 m	3 dm
in 4 Sekunden	40 m	4 dm

Was meint ihr dazu?

«Jetzt glaube ich doch, der Achilles wird die Schildkröte einholen!»

«Und ich glaube es trotzdem nicht; denn immer, wenn der Achilles ein Stück Weges gemacht hat, ist auch die Schildkröte ein Stücklein weiter gekommen, und bis Achilles dieses zurückgelegt hat, ist die Schildkröte abermals von ihm weggerutscht . . .»

Wie weiter?

«Wir können die Tabelle fortsetzen und werden es ja sehen!»

«In 5 Sekunden . . .»

«Nein, in 10 Sekunden, denn die ersten 100 m muß er ganz sicher zurücklegen!» Gut! Nun los!

	Achilles	Schildkröte
in 10 Sekunden	100 m	1 m
in 11 Sekunden	110 m	1,1 m

«Jetzt hat er sie ja schon überholt, also dauert es nicht einmal 11 Sekunden, bis er sie eingeholt hat.»

Ja, aber nun?

«Wir wollen doch wissen, wann er sie eingeholt hat, ganz genau wie viele Sekunden nach Beginn des Wettrennens.»

Vorschläge!

«Wir rechnen mit Zehntelsekunden.»

Wie meinst du das?»

Es entsteht nach und nach folgende Tabelle:

	Achilles	Schildkröte
10 Sekunden	100 m	10 dm
$10^1/_{10}$ Sekunden	101 m	10 dm + 1 cm
$10^2/_{10}$ Sekunden	102 m	10 dm + 2 cm

«Jetzt ist er ja schon wieder über die Schildkröte hinausgesprungen.»

«Ich glaube, wir finden es so nicht. Wir müßten schon Glück haben!»

Ja, aber wir müssen es doch finden? Denkt an euren Spruch!

«Wenn ich weiß nix,
dann setz' ich x.»

Gar nicht übel.

«Die Elsa E. hat gesagt: Wir wollen wissen, nach wie vielen Sekunden Achilles die Schildkröte einholt.»

«Wir sagen jetzt, nach x Sekunden hat Achilles sie eingeholt.»

In x Stunden macht Achilles $x \cdot 10$ m
und die Schildkröte $x \cdot {}^1/_{10}$ m

«Ja, und Achilles muß 100 m mehr machen als die Schildkröte, darum muß man zu ihrem Weg von $x/_{10}$ noch 100 m addieren und erhält dann den Weg des Achilles von $x \cdot 10$ m.»

«Also können wir die Gleichung aufsetzen:

$$x \cdot 10 = 100 + x/_{10}$$

$$9{,}9\,x = 100$$

$$x = {}^{1000}/_{99} = 10^{10}/_{99} \text{ Sekunden}$$

Probe!

Nun will ich euch noch helfen, die Aufgabe auf andere Art zu lösen. Der neue Weg wird euch Freude machen.

für 100 m braucht *Achilles*		10 Sek.		
	in	10 Sek.	macht die *Schildkröte*	1 m
„ 1 m „ „		$^1/_{10}$ Sek.		
	in	$^1/_{10}$ Sek.	„ „ „	$^1/_{100}$ m
„ $^1/_{100}$ m „ „		$^1/_{1000}$ Sek.		
	in	$^1/_{1000}$ Sek.	„ „ „	$^1/_{10000}$ m
		usw.		

Also legt Achilles zurück:

$$a = 100 + 1 + {}^1/_{100} + {}^1/_{10000} + {}^1/_{100000} + \ldots\ldots$$

und die Schildkröte:

$$s = 1 + {}^1/_{100} + {}^1/_{10000} + {}^1/_{1000000} + \ldots\ldots$$

Schaut das an!

«Wir sehen ganz gut, daß der Weg der Schildkröte um 100 m kleiner ist als der des Achilles.»

«Gut. Ich kenne noch andere Möglichkeiten der Vergleichung zweier Größen!»

«Wir könnten auch untersuchen, wie manchmal größer der Weg des Achilles ist als der der Schildkröte!»

«Das sieht man von Auge!! Der Weg des Achilles ist 100 mal größer. Vielleicht sehen es nicht alle, wir wollen die Rechnung machen!»

*) In Anlehnung an die historische Form geben wir hier das Sophisma des Zenon von Elea (450 v. Chr.) in etwas verändertem Gewande wieder: «Achilles verfolgt eine Schildkröte, welche vor ihm einen Vorsprung von 100 m hat. Achilles kommt in einer Sekunde 10 m weit, die Schildkröte $^1/_{10}$ m. Kommt Achilles an die Stelle, wo die Schildkröte gewesen ist, so hat diese einen Vorsprung von 1 m; hat Achilles diese Strecke zurückgelegt, so ist die Schildkröte wiederum ein Stücklein weitergekommen; also holt Achilles die Schildkröte gar nie ein!»

$$100 \cdot s = 100 \cdot (1 + {}^1/_{100} + {}^1/_{10000} + {}^1/_{1000000} + \ldots .)$$
also $100\,s = 100 + 1 + {}^1/_{100} + {}^1/_{10000} + \ldots\ldots$ und das ist gleich a!

Nun ist der Weg des Achilles, nämlich 100 s, um 100 m größer als der Weg der Schildkröte; daraus folgt

$$99\,s = 100\ m$$
$$s = {}^{100}/_{99}\ m$$

«Wir wissen jetzt, daß der Weg, den die Schildkröte zurücklegen kann, bis sie von Achilles eingeholt wird ${}^{100}/_{99}$ m $= 1{}^1/_{99}$ m mißt.»

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } 1\ \text{m braucht sie } 10\ \text{Sek.}\\ \text{für } {}^1/_{99}\ \text{m braucht sie } {}^{10}/_{99}\ \text{Sek.}\end{array}\right\}\ \text{also zusammen } 10{}^{10}/_{99}\ \text{Sek.}$$

Was gefällt euch an diesem 2. Weg?
Was für einen Ausdruck mußten wir bilden?
Was ist Eigentümliches an der zu bildenden Summe?

«Die Summe hat unendlich viele Glieder und doch haben wir sie berechnen können.»

Dieser ersten Begegnung mit der fallenden geometrischen Progression folgt in der Geometrie eine zweite. Nach der Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks aus den beiden Katheten folgt gelegentlich (vielleicht in einer Algebrastunde!) eine Bestätigung der Formel durch die in der Figur 1 angedeutete Zerlegung des Dreiecks in lauter Rechtecke. Aus den Figuren ist die hier folgende Ableitung ohne weiteres verständlich.

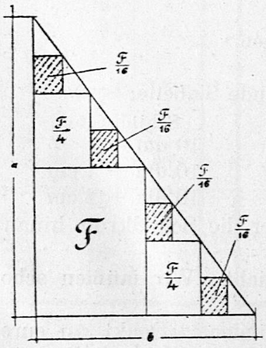

Fig. 1.

$$D = F + 2 \cdot F/_4 + 4 \cdot F/_{16} + 8 \cdot F/_{64} + \ldots\ldots$$
$$D = F + F/_2 + F/_4 + F/_8 + \ldots\ldots$$
$$2\,D = 2\,F + F + F/_2 + F/_4 + \ldots$$
$$-\,D = -\quad (F + F/_2 + F/_4 + \ldots)$$
$$D = 2\,F = 2 \cdot a/_2 \cdot b/_2 = \frac{a \cdot b}{2}$$

Der Gedanke einer Übertragung dieser Berechnungsmethode auf räumliche Verhältnisse liegt nahe. Man hat sich dann anstelle des Dreiecks die Pyramide zu denken und statt der Rechtecke sind in die Pyramide Prismen einzulagern. Es gelingt so tatsächlich, die Formel für den Rauminhalt der Pyramide herauszubekommen. Die Ableitung selber ist nicht ganz einfach, so daß sie für Durchschnittsklassen wohl kaum in Betracht fällt. Da sie aber eine hübsche Anwendung zum Kapitel der geom. Progressionen darstellt, mag sie dem einen und andern Leser vielleicht doch willkommen sein. Die Figuren 2 und 3 deuten an, wie man durch Einlagerung von P r i s m e n in den Pyramidenraum (Grundfläche G, Höhe h) diesen schließlich ausfüllen kann. Zuerst wird einzig das

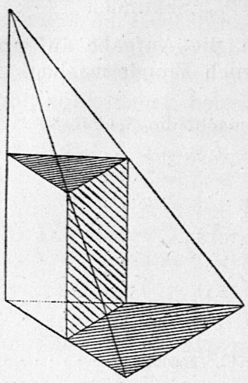
Fig. 2.

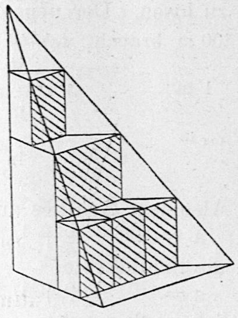
Fig. 3.

große Prisma (P) mit der Grundfläche $G/_4$ und der Höhe $h/_2$ hineingelegt (Figur 2). Dann folgen als Prismen zweiter Größe solche mit 4-mal kleinerer Grundfläche und halb so großer Höhe; ihr Rauminhalt ist somit ${}^1/_8$ von dem des ersten Prismas. Solche Prismen sind ihrer 6 an der Zahl, nämlich eines oben auf der Deckfläche des ersten Prismas, und weitere 5 vor ihm auf der Grundfläche der Pyramide stehend, angelehnt an eine seiner Seitenflächen (siehe Figur 3).

Die derart entstandene Treppe hat nun 4 Stufen (die Stufe in der Grundfläche eingerechnet), die ihrerseits wiederum mit Prismen belegt werden.

Die oberste	Stufe erhält	1	Prisma von der Größe	$P/_{64}$
Die zweitoberste	„ „	5	Prismen „ „ „	$P/_{64}$
Die zweitunterste	„ „	9	Prismen „ „ „	$P/_{64}$
und die unterste	„ „	13	Prismen „ „ „	$P/_{64}$

Die Zahlen 1, 5, 9 und 13 ergeben sich leicht aus dem Grundriß (Figur 4). Durch diese 3. Einlagerung ist die Treppe 8-stufig geworden, die 4. Einlagerung macht sie 16-stufig usw. Denken wir uns diese Einlagerungen von Prismen fortgesetzt, so nähert sich die Summe aller eingelagerten Prismen immer mehr dem Rauminhalt der ganzen Pyramide.

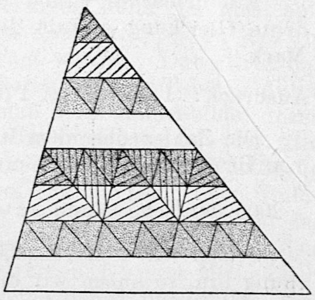
Fig. 4.

Welche Raumzahlen sich ergeben, wenn die Rauminhalte (alle ausgedrückt durch den Inhalt P des ersten großen Prismas) aller Prismen von der gleichen Größe, also von der gleichen Einlagerung addiert werden, zeigt die folgende Zusammenstellung:

1. Einlagerung	1 Prisma vom Rauminhalt $P = P$
2. Einlagerung	$(5+1)$ Prismen vom Rauminhalt $P/_8 = {}^6/_8\,P$
3. Einlagerung	$(13+9+5+1)$ Prismen vom Rauminhalt $P/_{64} = {}^{28}/_{64}\,P$
4. Einlagerung	$(29+25+21+17+13+9+5+1)$ Prismen vom Rauminhalt $P/_{512} = {}^{120}/_{512}\,P$

Bezeichnet man nun das Volumen der Pyramide mit V, so ergibt sich nach Kürzung der Ausdrücke in der letzten Kolonne folgender Ausdruck für dieses Volumen:

$$V = P + {}^3/_4\,P + {}^7/_{16}\,P + {}^{15}/_{64}\,P + \ldots\ldots$$

Schon diese ersten 4 Glieder lassen das Gesetz, nach welchem diese Summe fortschreitet, mit aller Deutlichkeit erkennen:

Das Verhältnis der aufeinanderfolgenden Nenner ist ${}^1/_4$, ferner ist jeder folgende Zähler um 1 größer als das Doppelte des vorhergehenden. So läßt sich also in größerer Ausführlichkeit setzen:

$$V = P + {}^3/_4\,P + {}^7/_{16}\,P + {}^{15}/_{64}\,P + {}^{31}/_{256}\,P + {}^{63}/_{1024}\,P + \ldots$$

Was aber in aller Welt hat dieser Ausdruck mit einer geometrischen Progression zu tun?! Nun, eine kleine Umformung macht die ganze Summe der Berechnung zugänglich! Fügt man nämlich zur obigen Gleichung beiderseits die neue Summe $P/_4 + P/_{16} + P/_{64} + P_{256} + \ldots .,$ also die geom. Progression mit dem Summenwert $\dfrac{P/_4}{1 - {}^1/_4} = P/_3$ hinzu, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$V + P/_3 = P + {}^4/_4\,P + {}^8/_{16}\,P + {}^{16}/_{64}\,P + {}^{32}/_{256}\,P + \ldots .$$
$$\text{oder} = P + P + P/_2 + P/_4 + P/_8 + P/_{16} + \ldots .$$

und das ist $= 2\,P + \dfrac{P/_2}{1 - {}^1/_2} = 2\,P + 1\,P = 3\,P$

also folgt weiter $V = 3\,P - P/_3 = 2{}^2/_3\,P = {}^8/_3\,P.$

Nun ist die Grundfläche des Prismas P ${}^1/_4$ von der Grundfläche G der zu berechnenden Pyramide und seine Höhe die Hälfte der Pyramidenhöhe, somit ist sein Rauminhalt

$$P = G/_4 \cdot h/_2 = \frac{G \cdot h}{8};$$

setzen wir diesen für P gefundenen Ausdruck in die Gleichung ein, so erhalten wir $V = {}^8/_3 \cdot \dfrac{G \cdot h}{8} = \dfrac{G \cdot h}{3}$

$$\text{also Volumen der Pyramide} = \frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}}{3}$$

Ergebnis: *Die Raummaßzahl einer Pyramide ist gleich dem 3. Teil des Produktes aus den Maßzahlen von Grundfläche und Höhe.*

R. W.