Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen = Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie

Band: 22 (1942)

Heft: 2

Artikel: Kristallographie und Optik des Kupfervitriols

Autor: Mäder, Josef

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19519

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 05.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kristallographie und Optik des Kupfervitriols

Von *Josef Mäder*

L. WEBER hat nachgewiesen (Lit. 11), dass die optischen Konstanten eines triklinen Kristalls sich mittels eines einzigen Prismas unbekannter Orientierung bestimmen lassen, falls die Schwingungsrichtungen jener Wellen berücksichtigt werden, deren Ebenen parallel zu den Grenzflächen des Prismas sind. Die experimentelle Prüfung der Methode an Hand eines Kupfervitriolkristalls ergab dann allerdings nicht unerhebliche Abweichungen von den Werten, die PAPE, KOHLRAUSCH, LAVENIR und G. WULFF (Lit. 8, 4, 6, 2) auf andere Weise gefunden hatten. Den Grund dafür sieht L. WEBER vor allem darin, dass bei seinem Verfahren vom Befund in einem beschränkten Beobachtungsgebiet auf das Verhalten im Gesamtraum extrapoliert wird. In einer Schlussbemerkung meint er, dass die zusätzliche Berücksichtigung der Doppelbrechung zu besseren Resultaten führen könnte.

So schien es verlockend, die Bestimmung der optischen Konstanten eines triklinen Kristalls mit Hilfe der Prismenmethode nochmals zu versuchen. Zum vorneherein war aber die Forderung eines einzigen Prismas fallen zu lassen. Auch sollten die Lichtgeschwindigkeiten in möglichst verschiedenen Richtungen ermittelt und vor allem die Doppelbrechung herangezogen werden.

Als Untersuchungsmaterial dienten selbstgezüchtete Kupfervitriolkristalle. Diese eignen sich für die beschriebenen Zwecke besonders gut, weil sie chemisch völlig bestimmt sind und sich leicht in passender Grösse und Zahl gewinnen lassen. Überdies können die Flächen, die sich mannigfach unter spitzen Winkeln treffen, zu optischen Prismen ganz verschiedener Orientierung kombiniert werden. Die Flächen selber wurden nicht poliert, sondern in ihrem ursprünglichen Zustand belassen. Natürlich mussten die bestgeformten Kristalle ausgesucht werden.

I. Kristallographischer Teil

Die zur Untersuchung benötigten Kristalle wurden zur warmen Sommerszeit in einem temperaturkonstanten Kellervorraum gezogen.

Neben ganz grossen Individuen (2—3 cm) bildeten sich viele kleinere (etwa ½ cm Längsdurchmesser). Unter diesen allen wurden jene, die sich durch gute Flächenbeschaffenheit und klare Durchsichtigkeit auszeichneten, sorgfältig herausgelesen. An 15 Individuen, die näher geprüft und naturgetreu skizziert wurden, konnten folgende Formen festgestellt werden: a (100), b (010), m (110), q (011), t (021), $\varkappa$ (0$\bar{1}$1), μ (1$\bar{1}$0), ξ ($\bar{1}$21), σ (12$\bar{1}$), τ (0$\bar{2}$1), ω ($\bar{1}$11). Das Pinakoid λ (1$\bar{2}$0), das mehrfach gefunden und auch für die optischen Beobachtungen verwertet wurde, ist an diesen 15 Individuen wegen seiner Kleinheit nicht mitgezählt worden. Nie beobachtet wurden π (1$\bar{3}$0) und c (001).

Der Habitus dieser nach der c-Achse durchwegs gestreckten Kristalle entspricht nicht ganz den in GROTHS Chemischer Kristallographie (Bd. II, S. 419) abgebildeten Typen. Diese sind in der Hauptzone zu rundlich, einzig Fig. 669 zeigt eine gewisse Tafeligkeit nach m. Von den 15 in Rede stehenden Kristallen sind 12 nach m ausgesprochen tafelig; ein weiterer zeigt diese Tafeligkeit durch ungleiche Ausbildung der hintern und vorderen Fläche etwas gestört. Einmal sind a und m im Gleichgewicht. Am letzten Kristall herrscht a entschieden vor. Oberes und unteres Ende unterscheiden sich zuweilen auffallend durch Zahl und relative Grösse der ausgebildeten Flächen. ω (öfters parallel zur Kombinationskante mit ξ fein gestreift) ist immer am stärksten entwickelt, jedoch nur in einem einzigen Fall von keinen weiteren Endflächen begleitet. Im Gegensatz zu GROTHS Figuren sind auch q und t, einzeln oder beide zugleich, recht stark ausgedehnt. Tabelle 1 gibt über diese Grössenverhältnisse näheren Aufschluss. Es bedeutet darin: g = gross; sg = sehr gross; + = vorhanden, aber klein; ++ = verhältnismässig gross.

Tabelle 1

Grössen-Entwicklung der Endflächen an 15 Kupfervitriolkristallen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t	g			g	g	+			g		+		g	g	+
q		g	g	g		g	++						++	+	g
$\varkappa$		+				+							+	++	
τ		++	++	+		+	+	+							+
ξ	+	+	++	+	++	++					+	+	+	++	+
ω	g	g	sg	sg	sg	g	sg	sg	g	sg	sg	sg	g	g	g
σ		+	+	+		+	+	+							+

Fig. 1 gibt ein Idealbild des durch die Angaben von Tab. 1 festgelegten Typus des Kupfervitriols.

Zur sicheren Deutung der Kristallflächen wie auch zur Ermittelung der genauen Winkel an den brechenden Kanten mussten zahlreiche Messungen vorgenommen werden. Dabei ergaben sich für die Winkel gleicher Flächenpaare verschiedener Kristalle Abweichungen von maximal 25′. Um ähnliche Beträge weichen die Mittel meiner Messungsergebnisse von den BARKER'schen Werten (Lit. 2) ab. BARKER selbst erhielt zwischen Messung und Berechnung Unterschiede bis zu 32′. Der Grund für diese Unsicherheit der Winkel

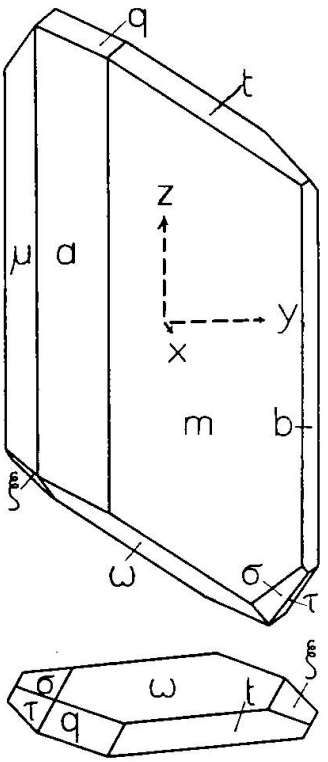


Fig. 1. Ideales Habitusbild des Kupfervitriols.

liegt in der starken Neigung des Kupfervitriols zu Vizinalflächenbildung. Flächen, die einander parallel liegen sollten, schliessen Winkel ein, die von 180° um mehrere Minuten verschieden sein können. Einzelne Flächen, besonders die breit entwickelten m-Flächen, zeigen Doppelreflexe, die bis zu 25′ voneinander abstehen. Durch geeignete Schwärzung einzelner Flächenteile mit Tusche wurden Nebenreflexe zum Verschwinden gebracht. Sollen geschwärzte Kristalle für optische Zwecke gebraucht werden, so ist darauf zu achten, dass das Licht noch in möglichst verschiedenen Richtungen hindurchgehen kann. Auch ist nicht zu übersehen, dass beim Schwärzen einer vorderen und hinteren Fläche u. U. nicht zusammengehörige Teile zugedeckt werden. So wird ohne weiteres verständlich, dass

Flächen, die tadellos erscheinen und einheitliche Reflexe ergeben, zu den Gegenflächen nicht parallel sind. Ein Beispiel hierfür liefert Kr. 27.

Ablesung	Fläche [1])	Reflex-beschaffenheit	Innen- oder Aussenwinkel	Mittel
341° 12 1/8′	m	sehr gut		
214 16 3/8	b′	gut	53° 4 1/4′	
160 49 1/8	m′	sehr gut	53 27 1/4	53° 14 1/2
34 13 7/8	b	verschwommen	53 24 3/4	
341 12 1/8	m		53 1 3/4	

Die Flächen m und m′, die beide sehr gute Reflexe liefern, bilden einen Winkel von 180° 23′. Das ist leicht verständlich, wenn man bedenkt, dass vor dem Schwärzen die eine Fläche zwei sehr gute und gleich starke Reflexe gibt, die 33′ voneinander abstehen, während die maximale Signalabweichung der andern Fläche 27′ ausmacht.

Bei diesem Sachverhalt, wo in der gegenseitigen Lage der Flächen doch eine gewisse Unbestimmtheit zu herrschen scheint, ist es angezeigt, die kristallographischen Konstanten des Kupfervitriols neu zu berechnen, aber nicht nach der gewöhnlichen, auch von BARKER befolgten Methode, wo von fünf unabhängigen Messungen ausgegangen wird, sondern unter gleichmässiger Berücksichtigung aller überhaupt gemessenen Winkel durch Anwendung des GAUSS'schen Ausgleichungsverfahrens. Allerdings werden dadurch systematische Fehler nicht weggeschafft. G. KALB (Lit. 3) weist in seiner Arbeit über „Die Bedeutung der Vizinalerscheinungen für die Kristallmessung" mit besonderer Eindrücklichkeit darauf hin, wie sehr in solchen Fällen die zuverlässige Bestimmung des Achsenverhältnisses erschwert ist.

Tabelle 2

Gemessene und berechnete Winkel des Kupfervitriols in der Zone [001]

Fl.	Kr. 14	Kr. 27	Kr. 28	Kr. 29	Kr. 30	Kr. 31	Mittlerer Meßwert	Barker	berechnet
b : m	53° 8′	53° 15′	53° 5′	53° 3′	53° 12′	53° 11′	53° 9′	52° 59′	53° 7′ 26″
b : a	79 3	79 5	78 58	79 9	79 2	79 5	79 4	79 6	79 7 40
b : μ	110 8	110 15	110 9	110 10	110 11	110 11	110 11	110 8	110 6 17
b : λ	132 50	132 42	132 44	132 48	—	132 26	132 42	132 37	132 44 35

[1]) Der Akzent beim Buchstabenzeichen der Form bedeutet, dass die betreffende Fläche auf der Hinterseite des Kristalls gelegen ist; im Symbol ist also der erste Index negativ.

Bei der geschilderten Ausbildung der Kristalle war es gegeben, dass für die fünf Flächen aus der Zone der c-Achse besonders viele Messungen vorliegen. Es schien darum erlaubt, diese für sich auszugleichen. Tab. 2 enthält die Winkelwerte, die an sechs Kristallen durch Ausmessen der ganzen Zone gefunden wurden. Sie stellen das Mittel dar, das an jedem Kristall für den Winkel des angegebenen Flächenpaares wie auch für den Winkel der parallelen Gegenflächen aus wiederholten Messungen erhalten wurde. Kristall 31 hat jedoch eine einzige Fläche λ; b λ konnte so nicht mit der gleichen Zuverlässigkeit bestimmt werden, wie das für die übrigen Winkel der Fall ist. Vielleicht erklärt sich daraus der grosse Unterschied dieses Einzelwertes gegenüber den vier andern Angaben. Für die Ausgleichungsrechnung wurde das auf volle Minuten gekürzte Gesamtmittel der an den sechs Kristallen gemessenen Winkel verwendet (= mittlerer Messwert). Zum Vergleich sind in Tab. 2 die entsprechenden Messwerte BARKERS angegeben.

Die Flächen der c-Zone seien, bei b beginnend, gemäss ihrer natürlichen Reihenfolge numeriert. Es ergibt sich so die eindeutige Zuordnung: b (1), m (2), a (3), μ (4), λ (5). Der Winkel, den die k^{te} Fläche mit b bildet, heisse φ_{1k}. Die am Beobachtungswert von φ_{1k} anzubringende Korrektur sei x_{1k}. Nach dem GAUSS'schen Satz über das Doppelverhältnis vier tautozonaler Flächen ergeben sich die beiden Gleichungen (Lit. 7, S. 113):

$$\lambda_1 \operatorname{cotg}(\varphi_{13} + x_{13}) - \operatorname{cotg}(\varphi_{14} + x_{14}) = (\lambda_1 - 1) \operatorname{cotg}(\varphi_{12} + x_{12})$$
$$\lambda_2 \operatorname{cotg}(\varphi_{13} + x_{13}) - \operatorname{cotg}(\varphi_{15} + x_{15}) = (\lambda_2 - 1) \operatorname{cotg}(\varphi_{12} + x_{12})$$

Hierin sind λ_1 und λ_2 einfache Funktionen der Flächenindizes; sie haben also mit dem vorerwähnten Flächenzeichen λ für $(1\bar{2}0)$ nichts zu tun. Die kleinen Unbekannten x_{1k} sind so zu bestimmen, dass sie einerseits die beiden Gleichungen erfüllen, anderseits aber Σx_{1k}^2 zu einem Minimum werden lassen. Dazu werden die beiden trigonometrischen Beziehungen zunächst linear gemacht und hierauf nach zwei der vier Unbekannten (z. B. x_{11} und x_{15}) aufgelöst. Durch Substitution der gewonnenen Werte in $\Sigma x_{1k}^2 = \text{Min.}$ ergibt sich [2]):

$$F(x_{12}, x_{13}) \equiv 5{,}73829\, x_{12}^2 + 7{,}16512\, x_{13}^2 - 10{,}69916\, x_{12} x_{13} + 0{,}01701\, x_{12} - 0{,}02056\, x_{13} + 0{,}00002 = \text{Min.}$$

Nach üblicher Rechnungsart finden sich daraus eindeutig x_{12} und x_{13} und damit ebenso eindeutig x_{11} und x_{15}. Endgültig kommt:

bm = 53°7,4′ ba = 79°7,7′ bμ = 110°6,5′ bλ = 132°44,8′

[2]) Diese und die spätern Ausgleichungsrechnungen wurden mit einer achtstelligen Multiplikations-Rechenmaschine („Millionär", Egli A.G. Zürich-Wollishofen) durchgeführt.

Die Abweichung von den mittleren Messwerten (vergl. Tab. 2) ist also sehr gering und die vorzügliche Übereinstimmung mit den aus dem Achsenverhältnis zurückberechneten Werten (Tab. 2, letzte Kolonne) ebenfalls beachtenswert.

Tabelle 3

Messwerte der von den Endflächen des Kupfervitriols untereinander und mit a, m, μ gebildeten Winkel

Fl.	Kr. 28	Kr. 32	Kr. 33	Kr. 34	Kr. 35	Kr. 36	Mittel	Barker	berechnet
b : q	—	—	—	—	—	64°46′	64°46′	64°58′	64°46′ 1″
b′ : τ	—	—	—	—	—	40 39	40 39	40 33	40 42 59
b : t	—	—	—	—	—	44 32	44 32	44 41	44 33 16
b : ω'	76°17′	—	—	—	—	76 17	76 17	76 23	76 22 33
b : σ	—	—	—	—	—	40 53	40 53	40 52	40 57 48
b : ξ'	54 38	—	—	—	—	—	54 38	54 44	54 44 6
m : q	—	—	—	—	61°58′	—	61 58	61 47	61 55 17
m : t	—	53°28′	—	53°40′	53 24	—	53 31	53 30	53 32 23
m : ω	72 4	—	—	—	—	—	72 4	72 0	72 0 13
a : q	—	—	—	—	70 2	—	70 2	69 59	69 52 2
a : ω	—	59 32	59 32	—	—	—	59 32	59 25	59 26 37
μ : ω	—	52 26	—	—	—	—	52 26	52 27	52 26 22
q : ω'	—	—	—	—	50 28	—	50 28	50 36	50 41 25
σ' : τ	—	—	—	—	—	33 41	33 41	33 28	33 43 45

Die sechs Endflächen q, t, ξ, σ, τ, ω wurden unter sich und gegenüber den Flächen a, m, μ der Grundzone durch 14 Winkel festgelegt. Sie sind in Tab. 3 zusammengestellt. Wegen der besonderen Ausbildung der Kristalle erfolgten die Messungen nicht ringsum. Die Winkel sind also nicht durch Mittelung der Ergebnisse an einem Flächenpaar und den dazu „parallelen" Ebenen gewonnen. Auch wurden sie, von drei Fällen abgesehen, nur je an einem Kristall bestimmt. Die der Ausgleichungsrechnung zu Grunde gelegten „Mittelwerte" dürften somit weniger sicher sein als bei der c-Achsenzone. Wenn übrigens mit einer einzigen Ausnahme für Tab. 3 andere Kristalle zur Verwendung kamen als für Tab. 2 — und ähnliches gilt für die kristallographisch durchgemusterten Kristalle 1 bis 15 —, so erklärt sich das im Wesentlichen aus dem Umstand, dass beim Aufsetzen der Kristalle auf das Goniometer die Anhaftflächen teilweise verunreinigt werden und für optische Untersuchungen nicht mehr in Frage kommen.

Zwischen den Winkeln der Tab. 3 bestehen naturgemäss wiederum gewisse Widersprüche. Aufgabe der Ausgleichungsrechnung ist es, Werte zu finden, die den Beobachtungen gegenüber Unter-

schiede mit möglichst kleiner Quadratsumme ergeben. Naheliegend wäre es, die Gleichungen, denen die Verbesserungen zu genügen haben, auf Grund der stereographischen Projektion (Fig. 6) aufzustellen. Leider führt das zu höchst verwickelten trigonometrischen Ausdrücken, die beim Linearmachen Anlass zu allerlei Fehlern sind. Dieser Übelstand lässt sich bei Zugrundelegung des gnomonischen Projektionsverfahrens weitgehend vermeiden. Wir legen also im Abstand 1 vom Kristallmittelpunkt eine Ebene senkrecht zur c-Achse. Wo diese aussticht, liege der Anfangspunkt O eines neuen Bezugssystems, dessen x- und y-Achse senkrecht und parallel zum seitlichen

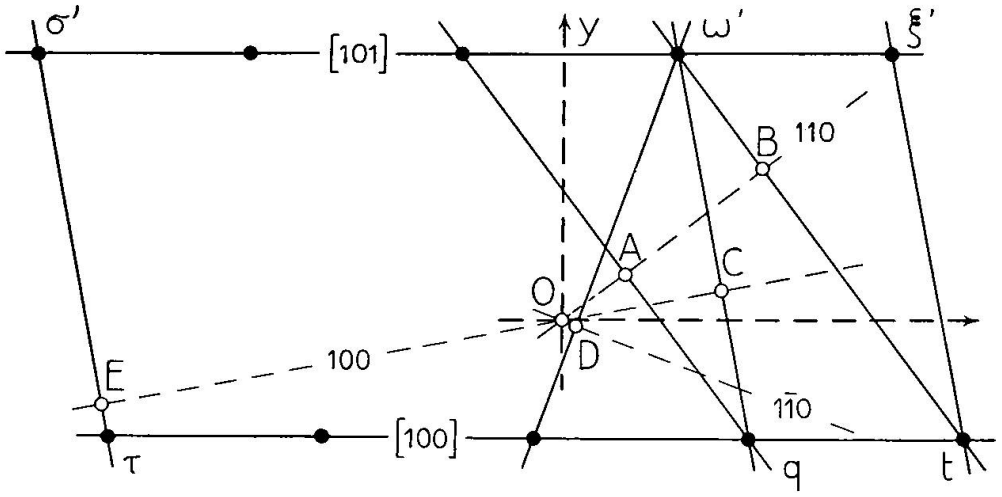


Fig. 2. Gnomonische Projektion der Endflächen des Kupfervitriols mit den Ebenenspuren (100), (110), (1$\bar{1}$0). x- und y-Achse kräftig gestrichelt.

Pinakoid b (010) seien (Fig. 2). Vom Kristallmittelpunkt aus fällen wir die Senkrechten zu allen Endflächen und bringen sie mit der Projektionsebene zum Schnitt. Die Koordinaten x, y eines jeden „Flächenpols" berechnen wir aus den gemessenen Winkeln und betrachten sie als auszugleichende Beobachtungsgrössen.

Wie in Fig. 2 dargestellt, sind die Zonen [100] und [101] mit den Flächen t, q, τ bezw. ξ', ω', σ' zwei zur x-Achse parallele Geraden mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= -\operatorname{tg}(\beta - 90) = -0{,}30987 \\ y &= \operatorname{tg}(90 - \beta') = 0{,}70891, \end{aligned}$$

worin β der stumpfe Winkel der kristallographischen Achsen a und c, β' aber der spitze Winkel der Kanten [001] und [101] ist.

Geeignet ausgewählte Winkel der Messungsreihe führen für die Abszissen von t, q, τ, ξ', ω', σ' zu den in Tab. 4 zusammengestellten Werten. Bei der Berechnung ist natürlich zu berücksichtigen, dass

die beiden Tripel tautozonaler Flächennormalen je in einer Ebene liegen, die gegenüber der Projektionsebene geneigt ist.

Tabelle 4

Numerische Lagebestimmung der in Fig. 2 vermerkten Flächenpole

Koord. und Abstände unkorrig.		Korrekturen		Koord. und Abstände korrig.	Koord. und Abstände rückberech.
y_1	-0,30987	z_1	-0,00110	-0,31097	-0,31097
y_2	0,70891	z_2	0,00163	0,71054	0,71054
x_q	0,49338	z_3	0,00015	0,49353	0,49353
x_t	1,06410	z_4	-0,00044	1,06366	1,06366
x_τ	-1,21931	z_5	0,00245	-1,21686	-1,21684
$x_{\omega'}$	0,29920	z_6	-0,00186	0,29734	0,29732
$x_{\xi'}$	0,87006	z_7	-0,00259	0,86747	0,86743
$x_{\sigma'}$	-1,41593	z_8	0,00288	-1,41305	-1,41301
Aq	0,54391	z_9	0,00101	0,54492	0,54491
Bt	0,88802	z_{10}	-0,00096	0,88706	0,88704
ω'B	0,38863	z_{11}	0,00132	0,38995	0,38999
qC	0,39493	z_{12}	0,00355	0,39848	0,39847
Cω'	0,63946	z_{13}	0,00225	0,64171	0,64171
ω'q	1,03595	z_{14}	0,00423	1,04018	1,04023
ω'D	0,76972	z_{15}	-0,00027	0,76945	0,76948
$\tau\sigma$	1,03874	z_{16}	0,00144	1,04018	1,04007

Die gefundenen x -Werte und Abstände sind nicht nur ungenau, sondern sogar mit gewissen Widersprüchen behaftet. Sie wären durch andere Zahlen zu ersetzen, wenn unter den gemessenen Winkeln eine andere Auswahl getroffen würde. Um Werte zu finden, die sich den Beobachtungen möglichst anpassen, werden die x und y mit Korrekturen z_i versehen (Tab. 4). Die beiden vorstehenden Gleichungen nehmen so die Gestalt an:

$$\text{I.} \quad y_1 = -0{,}30987 + z_1$$
$$\text{II.} \quad y_2 = 0{,}70891 + z_2$$

Da zufolge der Eigentümlichkeit der gnomonischen Projektion die Bedingungen

$$\omega'\sigma' = 3\,\xi'\omega' \qquad q\tau = 3\,tq \qquad \omega'\xi' = qt$$

bestehen (Fig. 2), so ergeben sich mit Berücksichtigung der Abszissenwerte der Tab. 4 die Fehlergleichungen:

$$\text{III.} \quad -4z_6 + 3z_7 + z_8 = 0{,}002550$$
$$\text{IV.} \quad -4z_3 + 3z_4 + z_5 = 0{,}000531$$
$$\text{V.} \quad z_3 - z_4 - z_6 + z_7 = -0{,}000141$$

Die Zonengeraden q ω' und t ω' stehen auf den Schnittlinien der Projektionsebene mit den Flächen a (100) bezw. m (110) senkrecht. Somit ist

$$\frac{y_2 - y_1}{x_{\omega'} - x_q} = \operatorname{tg}(180 - ab) \qquad \frac{y_2 - y_1}{x_{\omega'} - x_t} = \operatorname{tg}(180 - bm),$$

worin a b den bereits ausgeglichenen Winkel a : b und b m den ebenfalls feststehenden Winkel b : m bedeutet. Werden in diesen Formeln die entsprechenden Werte aus Tab. 4 eingesetzt, so folgen die Fehlergleichungen

$$\text{VI.} \quad -z_1 + z_2 - 5{,}20673\, z_3 + 5{,}20673\, z_6 = -0{,}007753$$
$$\text{VII.} \quad -z_1 + z_2 - 1{,}33301\, z_4 + 1{,}33301\, z_6 = 0{,}000830.$$

Die durch den Ursprung verlegte m-Fläche schneidet die Projektionsebene in der Geraden

$$x \cos(bm) - y \sin(bm) = 0.$$

Aus dieser Gleichung werden durch Einsetzen der Koordinaten von q, t, ω' und ihren Korrekturen die Abstände A q, B t und B ω' gefunden. Diese Abstände lassen sich auch aus den gemessenen Winkeln m : q, m : t und m : ω' berechnen (Tab. 4). Das führt auf drei weitere Fehlergleichungen

$$\text{VIII.} \quad 0{,}79992\, z_1 - 0{,}60010\, z_3 + z_9 = 0{,}000037$$
$$\text{IX.} \quad 0{,}79992\, z_1 - 0{,}60010\, z_4 + z_{10} = -0{,}001580$$
$$\text{X.} \quad 0{,}79992\, z_2 - 0{,}60010\, z_6 - z_{11} = 0{,}001103.$$

Unter gleichen Voraussetzungen wie soeben kommt für a (100) die Gleichung

$$x \cos(ab) - y \sin(ab) = 0.$$

Sie liefert mit Berücksichtigung der Winkel a : q und a' : ω' für C q und C ω' die Fehlergleichungen

$$\text{XI.} \quad 0{,}98205\, z_1 - 0{,}18861\, z_3 + z_{12} = 0{,}002438$$
$$\text{XII.} \quad 0{,}98205\, z_2 - 0{,}18861\, z_6 - z_{13} = -0{,}000298.$$

Es wurden auch die Winkel q ω' und $\tau\,\sigma'$ gemessen, welche die beiden charakteristischen Zonen der Endbegrenzung miteinander verknüpfen. Aus den Beziehungen (Fig. 2)

$$qC + C\omega' = q\omega' \quad \text{und} \quad \tau E + E\sigma' = \tau\sigma'$$

werden zwei neue Fehlergleichungen gewonnen

$$\text{XIII.} \quad z_{12} + z_{13} - z_{14} = 0{,}001566$$
$$\text{XIV.} \quad -0{,}98205\, z_1 + 0{,}98205\, z_2 + 0{,}18861\, z_5 - 0{,}18861\, z_8 - z_{16} = 0{,}001158.$$

Schliesslich wurde noch $\mu' \omega'$ gemessen. Wird der Ebene μ' $(\bar{1}10)$ die Gleichung

$$x \cos(b\,\mu') + y \sin(b\,\mu') = 0$$

zugeordnet, so ergibt sich für den Abstand ω' D eine letzte Fehlergleichung:

$$\text{XV.} \quad 0{,}93904\, z_2 + 0{,}34379\, z_6 - z_{15} = 0{,}001157$$

Die 13 Bedingungsgleichungen III—XV lassen sich auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen, indem man 13 Unbekannte durch die 3 verbleibenden — gewählt wurde z_1, z_3, z_6 — ausdrückt. Statt das an 13 Nebenbedingungen geknüpfte Minimum von Σz_i^2 $(i = 1, \ldots 15)$ zu suchen, ist nurmehr der kleinste Wert einer Funktion zu finden, die zur Erzielung gleichartigerer Koeffizienten in der Form

$$\begin{aligned} F(z_1', z_3', z_6') \equiv \; & 6{,}73025\, z_1'^2 + 3{,}16889\, z_3'^2 + 3{,}41368\, z_6'^2 \\ & + 3{,}12218\, z_1' z_3' - 6{,}50988\, z_3' z_6' - 3{,}41972\, z_6' z_1' \\ & - 5{,}35328\, z_1' - 12{,}72731\, z_3' + 13{,}31097\, z_6' \\ & + 13{,}74951 = \text{Min.} \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Darin ist $z_1' = z_1 \cdot 10^2$, $z'_3 = z_3 \cdot 10^3$ und $z_6' = z_6 \cdot 10^3$. Mit den hierdurch bestimmten Werten berechnen sich alle z_i $(i = 1, \ldots 15)$ und schliesslich auch y_1 und y_2. Die Korrekturen z_i und die verbesserten x-Werte usw. sind in Tab. 4 zusammengestellt.

Nun wird aus y_1 direkt der Winkel β gefunden. Die korrigierten Lagen von t und q (Fig. 2) ergeben die Winkel b t und b q. Hieraus liefert der Gauss'sche Satz sofort b c. Im sphärischen Dreieck a b c (Fig. 6) sind demnach die Seiten b a und b c, sowie der Aussenwinkel β bei b bekannt. Nach geläufiger Formel errechnen sich die Aussenwinkel α und γ bei a und c. Aus diesen kommen mit Hilfe der Dreiecke a b q und b c m die Winkel ε und η. Das Achsenverhältnis ermittelt sich hernach in üblicher Weise. Es wurde erhalten

$$\underline{a : b : c = 0{,}56890 : 1 : 0{,}55494}$$

$$\underline{\alpha = 82^\circ 22' 31''} \qquad \underline{\beta = 107^\circ 16' 27''} \qquad \underline{\gamma = 102^\circ 35' 11''}$$

Der Unterschied gegenüber den BARKER'schen Werten

$$a : b : c = 0{,}5721 : 1 : 0{,}5554$$

$$\alpha = 82^\circ 5' \qquad \beta = 107^\circ 8' \qquad \gamma = 102^\circ 41'$$

ist also nicht beträchtlich. Die Neuberechnung stützt sich auf die fünf Winkel β, b t, b q, b m, b a. Dass eine andere Winkelauswahl

— im Gegensatz zur üblichen Kristallberechnung — im wesentlichen zum gleichen Achsenverhältnis geführt hätte, ergibt sich aus der glänzenden Übereinstimmung zwischen den ausgeglichenen und den aus dem gefundenen Achsenverhältnis zurückberechneten Winkeln und übrigen Grössen (Tab. 2 und 4).

II. Optischer Teil

a) INSTRUMENT, MESSUNG, MESSERGEBNISSE

Die Messungen wurden mit einem Fuess'schen Goniometer, Modell II (Websky'scher Spalt, Ramsden'sches Okular mit $3^0\,45'$ Sehfeldgrösse) durchgeführt. Als Lichtquelle diente eine Heliumgasentladungsröhre. Eingestellt wurde auf die Linien 5876 (gelb), 5016 (grün) und 4471 Å (violett). Wenn infolge geringer Doppelbrechung sich die beiden Spektren teilweise überlagerten, wurden die zusammenfallenden Linien durch ein zwischen Auge und Fernrohr gehaltenes Nicol'sches Prisma voneinander getrennt.

Die Winkelablesung wurde an beiden Nonien (I und II) auf $1/4'$ genau vorgenommen. Dabei zeigte es sich, dass je nach wechselseitiger Stellung des Limbus und der Nonien die Stelle II gegenüber I einen Unterschied von $180^0 - 41/4'$ bis $180^0 + 11/4'$ aufwies. Die Messungen selber wurden anfänglich in drei verschiedenen Limbusstellungen ausgeführt; von Journal-Nr. 17 ab wurde indessen hievon Umgang genommen, weil der feststellbare Einfluss auf die q^2-Werte (q = Lichtgeschwindigkeit) zu unbedeutend war, um den erforderlichen Zeitaufwand zu rechtfertigen.

Tabelle 5

Abhängigkeit der Winkelmessung von der Auffallsrichtung des Lichtes

Krist. Nr.	28	29	31	28	36
Flächenpaar	m : b	m : b	m : b	b : ω	b : q
Auffallsw.	$30^0 31'$	$32^0 59'$	$30^0 34'$	$12^0 30'$	$11^0 54'$
Prismenw.	53 19	53 3 3/8	53 12 1/24	76 17 1/3	64 47 1/12
Auffallsw.	46 27	43 3	43 8	43 54	44 49
Prismenw.	53 18 5/6	53 3 13/24	53 11 2/3	76 17 1/8	64 47 1/24
Auffallsw.	77 24	66 17	62 51	68 58	77 17
Prismenw.	53 18 7/24	53 4	53 11 7/12	76 17 1/3	64 46 1/6
Mittelwert	$53^0 18\ 17/24'$	$53^0\ 3\ 23/36'$	$53^0 11\ 55/72'$	$76^0 17\ 19/72'$	$64^0 46\ 55/72'$

Für den Prismenwinkel fanden sich nicht gänzlich übereinstimmende Werte, falls der Lichteinfall variiert wurde, d. h. Kollimator und Fernrohr in verschiedene gegenseitige Stellungen gebracht wur-

den. Die Prismenwinkel wurden daher bei kleinem, mittlerem und grossem Lichtauffallswinkel gemessen und als Mittel der so erhaltenen Grössen berechnet. Tab. 5 gibt einige Beispiele. Die Zu- und Abnahme des Prismenwinkels ändert sich mit der Grösse des Auffallswinkels nicht einsinnig. Die grösste beobachtete Schwankung beträgt 1½ Minuten. Dabei ist zu beachten, dass sämtliche Einzelwerte bereits die Mittel je dreier, wohl selten mehr als ± ½′ voneinander abweichender Messungen sind. Die kleinen Schwankungen des Prismenwinkels sind nicht bloss durch Konstruktionsmängel des Instrumentes bedingt, sondern dürften — wie schon im kristallographischen Teil angedeutet wurde — aus der Flächenbeschaffenheit der benutzten Kristalle zu erklären sein.

Tabelle 6

Orientierung der für die optische Untersuchung benutzten Prismen und Zahl der verschiedenen Einfallsrichtungen

Flächen-Paar	Brech. Kante	Kristallnummer 14	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
a : m	001		9	9		2							
a : μ	001					5							
b : m	001				7	5	2	2					
b : λ	001				1								
b : μ	001				3	2							
m : μ	001	3	2	2									
m : q	$1\bar{1}1$											3	
m : t	$1\bar{1}2$										3		
b : q	100												6
b : ξ	101				2								
b : ω	101				3								
μ : ω	110								5				
a : ω	$01\bar{1}$								4	4			

Das optische Verhalten des Kupfervitriols wurde an zwölf verschiedenen Kristallen geprüft. Zur Untersuchung gelangten insgesamt 22 Prismen. Ihre brechenden Kanten gehören 7 Richtungen an; die begrenzenden Ebenen entsprechen 13 natürlichen Flächenpaaren. Die Einzelheiten sind aus Tab. 6 ersichtlich. Darin geben die vermerkten Zahlen an, für wieviele verschiedene Einfallsrichtungen die Ablenkungen gemessen wurden. Die Addition ergibt, dass für jede der drei Wellenlängen die Lichtgeschwindigkeiten in je 85 Richtungspaaren bestimmt wurden. Über welche Bereiche sie sich verteilen, erhellt aus den fetten Kreislinienzügen der Fig. 6.

Tabelle 8. Endmittel der Prismen-, Eintritts- und Ablenkungswinkel.

L.	J.	K.	E : A	Prisma	Eintritt	Gelb	Grün	Violett
0	45	29	b : μ	69°50′ 10″	49°52′ 50″	57°37′ 45″ 58 42 40	59°19′ 32,5″ 60 21 40	61° 9′ 55″ 62 8 0
1	44	29	b : μ	69 50 10	52 23 15	54 37 2,5 58 42 40	55 45 57,5 60 21 40	56 54 15 62 8 0
2	36	28	b : λ	69 49 2,5	55 9 43,8	52 48 15 56 6 47,5	53 43 7,5 57 16 47,5	54 36 50 58 26 0
3	39	28	b : λ	47 8 15	57 55 12,5	31 26 25 32 27 15	31 44 42,5 32 46 40	31 59 20 33 4 0
4	43	29	b : μ	69 50 10	59 50 43,8	51 45 27,5 54 30 10	52 31 32,5 55 25 12,5	53 14 40 56 17 30
5	38	28	b : μ	69 49 2,5	66 31 21,3	52 21 37,5 54 48 57,5	53 0 57,5 55 34 5	53 37 40 56 17 30
6	37	28	b : μ	69 49 2,5	76 55 36,3	56 47 50 59 7 15	57 22 57,5 59 47 55	57 55 45 60 24 10
7	40	29	a : μ	31 3 15	47 18 28,8	19 18 50 20 18 12,5	19 30 0 20 29 57,5	19 39 27,5 20 40 45
8	46	29	a : μ	31 3 2,5	40 29 11,3	18 2 47,5 19 0 20	18 12 22,5 19 10 40	18 22 15 19 22 10
9	41	29	a : μ	31 3 0	33 31 40	17 12 0 18 9 27,5	17 22 0 18 20 37,5	17 32 22,5 18 31 0
10	47	29	a : μ	31 3 2,5	24 30 48,8	16 47 20 17 45 22,5	16 57 35 17 56 37,5	17 7 17,5 18 7 42,5
11	6	26	m : μ	57 10 19,2	83 6 31,7	50 57 34,1 52 58 43,3	51 19 46,7 53 23 13,3	51 40 54,6 53 46 25
12	7	26	m : μ	57 10 19,2	80 59 55	49 15 33,3 51 16 28,3	49 37 52,5 51 41 25,8	49 58 43,3 52 4 29,2
13	26	14	m : μ	57 9 17,5	78 42 57,5	47 30 40 49 31 40	47 53 5 49 56 55	48 12 55 50 19 5
14	22	27	m : μ	57 16 7,5	76 1 47,5	45 40 25 47 41 52,5	46 3 12,5 48 7 22,5	46 25 5 48 29 42,5
15	42	29	a : μ	31 3 0	17 50 32,5	16 59 17,5 17 58 52,5	17 9 35 18 10 20	17 20 25 18 22 30
16	3	26	m : a	26 9 56,7	67 42 31,3	23 59 12,5 24 55 27,5	24 9 34,2 25 6 58,3	24 19 20,8 25 17 41,7
17	17	27	m : a	26 2 16,7	67 45 58,8	23 58 35 24 54 10	24 8 2,5 25 5 15	24 18 17,5 25 15 15
18	18	27	m : a	26 2 16,7	54 32 32,5	18 40 10 19 29 22,5	18 49 47,5 19 39 52,5	18 59 42,5 19 50 40
19	21	27	m : μ	57 13 25	52 21 0	36 16 30 38 19 57,5	36 40 10 38 47 17,5	37 1 15 39 10 42,5
20	28	14	m : μ	57 9 17,5	47 30 31,3	35 51 5 37 58 12,5	36 15 57,5 38 26 35	36 39 5 38 52 57,5
21	5	26	a : m	26 9 42,5	0 0 0	15 48 35,8 16 41 31,7	15 59 31,7 16 53 49,2	16 10 55,8 17 5 44,2
22	13	27	a : m	26 2 16,7	0 0 0	15 42 44,2 16 35 3,3	15 53 6,7 16 46 41,7	16 2 48,3 16 57 30
23	27	14	m : μ	57 9 17,5	34 31 41,3	38 30 52,5 41 15 40	39 5 52,5 41 57 7,5	39 39 22,5 42 37 12,5
24	54	29	m : a	26 5 12,5	32 0 5	14 32 22,5 15 11 7,5	14 41 5 15 20 35	14 48 52,5 15 29 10
25	15	27	m : a	26 2 16,7	30 53 58,7	14 24 50,8 15 3 25	14 33 50,8 15 13 9,2	14 43 10,8 15 22 36,7
26	1	26	m : a	26 10 29,2	29 34 27,5	14 22 26,7 15 0 47,5	14 30 40,8 15 9 40	14 39 0,8 15 18 47,5
27	14	27	m : a	26 2 16,7	25 4 58,3	14 6 5 14 42 36,7	14 15 11,7 14 52 20	14 24 49,2 15 2 10
28	10	26	m : a	26 10 10,8	19 59 56,2	14 6 0,8 14 41 51,7	14 15 0,8 14 51 10	14 23 38,3 15 0 5,8
29	53	29	m : a	26° 5′ 12,5″	15°57′ 25″	14° 8′ 55″ 14 43 35	14°17′ 57,5″ 14 53 17,5	14°27′ 10″ 15 2 32,5
30	19	27	m : a	26 2 16,7	12 22 12,5	14 19 20 14 53 2,5	14 29 0 15 3 10	14 39 0 15 13 30
31	11	26	m : a	26 10 10,8	11 42 20,8	14 27 8,3 15 0 54,2	14 36 23,3 15 10 48,3	14 45 40 15 21 1,7
32	2	26	m : a	26 10 1,7	0 0 0	16 7 43,3 16 40 32,5	16 18 56,6 16 52 27,5	16 28 52,1 17 3 44,2
33	12	27	m : a	26 2 16,7	0 0 0	16 0 52,5 16 33 1,7	16 12 45 16 45 41,7	16 25 13,3 16 58 22,5
34	16	27	m : a	26 2 16,7	0 0 0	16 0 46,7 16 33 20	16 13 1,7 16 46 0	16 24 45 16 58 9,2
35	20	27	m : a	26 2 16,7	−14 9 28,7	21 45 30 22 25 0	22 5 47,5 22 46 2,5	22 22 50 23 4 22,5
36	4	26	m : a	26 9 45	−15 45 44,6	23 17 25 24 0 2,5	23 37 33,3 24 22 19,2	23 58 30,8 24 43 48,3
37	8	26	m : a	26 9 50,8	−17 59 37,9	25 38 34,2 26 28 55,8	26 3 20,8 26 55 22,5	26 26 39,2 27 19 40,8
38	9	26	a : m	26 8 43,3	78 41 41,7	31 21 46,7 31 43 20	31 33 35 31 55 35	31 44 5 32 6 27,5
39	30	28	m : b	53 19 3,8	31 2 13,8	35 55 27,5 36 40 52,5	36 25 7,5 37 13 0	36 55 35 37 43 35
40	55	30	m : b	53 16 31,7	32 19 10	35 27 2,5 36 9 0	35 57 42,5 36 40 55	36 26 20 37 10 40
41	48	29	m : b	53 3 38,3	35 1 10	34 24 52,5 34 59 57,5	34 53 15 35 29 35	35 20 0 35 56 35
42	34	28	b : m	53 18 57,5	48 58 32,5	34 2 0 34 29 22,5	34 26 12,5 34 54 5	34 48 40 35 16 12,5
43	59	31	m : b	53 11 45,8	40 27 2,5	33 46 12,5 34 14 45	34 12 22,5 34 41 2,5	34 36 5 35 7 10
44	49	29	m : b	53 3 38,3	43 0 5	33 34 22,5 33 59 47,5	33 59 5 34 25 17,5	34 22 35 34 48 47,5
45	29	28	m : b	53 19 3,8	45 20 41,3	33 49 12,5 34 13 2,5	34 12 10 34 37 7,5	34 34 37,5 34 59 42,5
46	33	28	b : m	53 19 18,8	38 54 13,8	34 4 32,5 34 29 45	34 30 52,5 34 56 32,5	34 56 42,5 35 22 7,5
47	50	29	m : b	53 3 38,3	50 59 32,5	34 16 10 34 36 50	34 39 30 35 0 17,5	35 0 25 35 22 30
48	35	28	b : m	53 18 57,5	33 2 20	35 26 47,5 35 52 15	35 57 30 36 24 30	36 26 7,5 36 53 37,5
49	56	30	m : b	53 16 31,7	56 44 40	35 41 52,5 36 0 57,5	36 4 7,5 36 23 50	36 25 25 36 45 32,5
50	60	31	m : b	53 11 45,8	57 59 16,3	36 1 25 36 20 2,5	36 24 17,5 36 43 12,5	36 45 12,5 37 4 12,5
51	52	29	m : b	53 3 38,3	62 29 0	37 28 47,5 37 46 45	37 50 45 38 9 40	38 11 2,5 38 30 35
52	32	28	b : m	53 19 18,8	26 59 38,8	38 42 45 39 14 27,5	39 23 17,5 39 57 27,5	39 58 5 40 35 22,5
53	51	29	m : b	53 3 38,3	71 48 22,5	42 0 10 42 17 50	42 22 20 42 41 0	42 42 30 43 2 0
54	31	28	m : b	53 18 5	76 58 2,5	45 28 30 45 47 2,5	45 50 22,5 46 10 2,5	46 10 15 46 30 25
55	83	35	q : m	61°58′ 19,2″	65°50′ 55″	44°47′ 7,5″ 45 59 5	45°16′ 7,5″ 46 30 22,5	45°40′ 47,5″ 46 58 25
56	85	35	m : q	61 58 19,2	51 28 7,5	41 54 42,5 43 16 57,5	42 27 15 43 52 45	42 57 25 44 25 22,5
57	82	35	q : m	61°58′ 19,2″	48°24′ 40″	42° 6′ 50″ 43 32 22,5	42°42′ 2,5″ 44 11 7,5	43°14′ 45″ 44 46 35
58	84	35	m : q	61 58 19,2	72 48 33,8	48 1 25 49 6 15	48 29 25 49 36 2,5	48 53 27,5 50 2 37,5
59	81	34	t : m	53°40′ 7,5″	57° 0′ 58,8″	35°42′ 32,5″ 36 30 25	36° 4′ 50″ 36 53 32,5	36°24′ 35″ 37 15 32,5
60	80	34	m : t	53 40 7,5	43 0 5	33 53 17,5 34 42 40	34 17 12,5 35 8 12,5	34 40 55 35 32 25
61	79	34	m : t	53 40 7,5	46 57 55	34 2 5 34 47 22,5	34 25 35 35 12 15	34 46 22,5 35 35 52,5
62	87	36	b : q	64°46′ 45,8″	44° 8′ 53,8″	49°53′ 52,5″ 50 53 12,5	50°56′ 25″ 51 59 22,5	51°56′ 10″ 53 4 57,5
63	90	36	b : q	64 46 45,8	64 10 41,3	47 26 15 47 55 5	47 59 10 48 28 47,5	48 30 0 49 0 45
64	86	36	b : q	64 46 45,8	54 27 28,8	46 5 27,5 46 35 37,5	46 43 25 47 15 7,5	47 18 52,5 47 52 22,5
65	91	36	q : b	64 46 45,8	50 50 15	46 31 7,5 47 1 35	47 13 15 47 45 2,5	47 52 55 48 26 22,5
66	89	36	q : b	64 46 45,8	45 50 20	48 31 0 49 7 10	49 23 55 50 2 30	50 14 35 50 55 52,5
67	88	36	b : q	64 46 45,8	77 33 31,3	53 50 30 54 11 5	54 20 40 54 41 55	54 48 47,5 55 11 5
68	78	28	b : ξ	54°37′ 47,5″	47°36′ 36,3″	34°53′ 22,5″ 35 34 57,5	35°17′ 45″ 36 0 25	35°38′ 40″ 36 23 32,5
69	77	28	b : ξ	54 37 47,5	54 6 50	35 46 7,5 36 24 27,5	36 8 22,5 36 48 7,5	36 29 37,5 37 10 55
70	75	28	ω : b	76 17 15,8	77 13 56,3	67 11 0 69 6 22,5	68 10 52,5 70 14 42,5	69 8 0 71 20 22,5
71	74	28	ω : b	76 17 15,8	68 53 50	65 48 20 68 37 22,5	67 11 12,5 70 23 52,5	68 34 52,5 72 17 22,5
72	76	28	b : ω	76 17 15,8	81 13 26,3	69 7 30 71 1 50	70 4 45 72 5 25	70 59 17,5 73 6 22,5
73	69	32	ω : μ	52°25′ 52,5″	73° 4′ 15″	41° 0′ 40″ 42 42 22,5	41°20′ 37,5″ 43 4 37,5	41°39′ 7,5″ 43 24 52,5
74	65	32	μ : ω	52 25 52,5	27 16 40	34 46 25 37 25 27,5	35 17 35 38 2 32,5	35 45 52,5 38 37 7,5
75	68	32	ω : μ	52 25 52,5	41 53 45	31 38 32,5 33 23 2,5	32 0 45 33 48 2,5	32 19 30 34 10 42,5
76	67	32	μ : ω	52 25 52,5	49 59 58,8	32 18 35 33 54 52,5	32 39 42,5 34 18 5	32 58 5 34 39 42,5
77	66	32	μ : ω	52 25 52,5	70 27 36,3	39 34 55 41 2 37,5	39 54 35 41 24 42,5	40 12 32,5 41 44 25
78	61	32	ω : a	59°31′ 58,3″	74°33′ 53,8″	46°14′ 15″ 48 15 2,5	46°38′ 40″ 48 42 0	47° 0′ 57,5″ 49 6 2,5
79	72	33	ω : a	59 32 10	63 58 17,5	40 57 30 43 0 50	41 22 0 43 28 17,5	41 44 25 43 53 5
80	64	32	a : ω	59 31 58,3	43 31 2,5	38 22 40 40 59 50	38 54 27,5 41 37 2,5	39 24 12,5 42 10 52,5
81	70	33	a : ω	59 32 10	50 25 33,8	38 0 17,5 40 16 37,5	38 27 7,5 40 46 25	38 52 15 41 14 35
82	62	32	ω : a	59 31 58,3	42 14 17,5	38 37 32,5 41 16 42,5	39 10 12,5 41 54 22,5	39 39 32,5 42 29 0
83	73	33	a : ω	59 32 10	59 2 52,5	39 23 37,5 41 27 7,5	39 47 35 41 54 35	40 10 42,5 42 20 42,5
84	63	32	a : ω	59 31 58,3	61 31 37,5	40 3 40 42 5 7,5	40 29 52,5 42 34 15	40 53 10 42 59 37,5
85	71	33	a : ω	59 32 10	77 35 56,3	48 14 52,5 50 9 25	48 39 2,5 50 37 10	48 59 35 50 59 37,5

Leere Seite
Blank page
Page vide

Tabelle 7

Einfalls- und Ablenkungsmessungen an den Nonien I und II, sowie Differenzbildung w, δ

		1. Messung	2. Mess.	3. Mess.	Teilmittel	Gesamtmittel	w und δ
Reflekt.	I	228° 11 1/4′	10 3/4′	10 ′	228° 10 8/12′		
	II	48 8	7 1/2	6 3/4	48 7 5/12	228° 9 1/24′	
Direkt	I	327 16	16	16	327 16		
	II	147 13 3/4	14	14	147 13 11/12	327 14 23/24	99° 5 22/24′
Gelb	I	361 1 3/4	1 3/4	2 1/4	361 1 11/12		
	II	181 0 1/4	0	1	181 0 5/12	361 1 4/24	33 46 5/24
Grün	I	361 27 3/4	27 1/2	28 1/2	361 27 11/12		
	II	181 26 1/2	26 1/4	27 1/2	181 26 9/12	361 27 8/24	34 12 9/24
Violett	I	361 52	50 1/2	52 1/2	361 51 8/12		
	II	181 50 3/4	49	51 1/2	181 50 5/12	361 51 1/24	34 36 2/24
Gelb	I	361 30	30 1/4	30 3/4	361 30 4/12		
	II	181 29	29	29 1/4	181 29 1/12	361 29 17/24	34 14 18/24
Grün	I	361 56 1/2	55 1/2	57 3/4	361 56 7/12		
	II	181 55	54 1/2	56 3/4	181 55 5/12	361 56	34 41 1/24
Violett	I	362 23	23 1/2	22	362 22 10/12		
	II	182 21 1/2	22	20 3/4	182 21 5/12	362 22 3/24	35 7 4/24

Im allgemeinen wurde der Lichtdurchgang in verschiedenen Stellungen des Prismas gemessen. Eintritts- und Austrittsflächen wurden öfters vertauscht (Tab. 8). Stets wurde in folgender Reihe vorgegangen: reflektiert → direkt → gelb, grün, violett I → gelb, grün, violett II, dann zurück und schliesslich nochmals im ersten Sinn. Es liessen sich in der Weise Mittelwerte aus jeweils drei Messungen finden. Tab. 7 bietet ein Beispiel für die Durchführung dieser Messungen (Journ.-Nr. 59). Wie ersichtlich, weichen die Einzelmessungen maximal 1½′ voneinander ab. Die letzte Kolonne enthält als Differenzen den Winkel w (zwischen reflektiert und direkt) sowie die Ablenkung δ für die sechs Linien. Aus w berechnet sich nach der selbstverständlichen Formel $(180 - w) : 2$ der Einfallswinkel i_1.

Die so bestimmten Endmittel aller i_1- und δ-Werte sämtlicher Messungsreihen sind in Tab. 8 zusammengestellt. Ausser der laufenden Nummer (L) enthält sie auch die Journal- (J) und Kristallnummer (K) und lässt erkennen, welche Flächen zu Ein- und Austrittsebenen (E und A) gewählt wurden. Ob es sich dabei im Einzelfall um eine vordere oder hintere Fläche gehandelt habe, konnte Raumes halber nicht näher vermerkt werden, ist aber wegen der Zentrosymmetrie des Vorganges belanglos. Dass jedes optische Prisma von einer vorderen und einer hinteren Fläche gebildet war, ist eine Selbstverständlichkeit. Zu jedem Einfallswinkel gehören drei

Ablenkungswinkel des einen und drei des anderen Spektrums. Einzig an Kristall Nr. 29 war bei der Messung L. 0 nur das weniger abgelenkte Spektrum zu sehen.

In Tab. 8 sind die Werte, die zu bestimmten Zonen gehören, durch feine Linien voneinander geschieden. Es entsprechen

L.	0—54	der Zone	[001]
	55—58		$[1\bar{1}1]$
	59—61		$[1\bar{1}2]$
	62—67		[100]
	68—72		$[10\bar{1}]$
	73—77		[110]
	78—85		$[01\bar{1}]$

Zum Einfallswinkel i_1 findet sich der Austrittswinkel i_2 nach der bekannten Beziehung $i_2 = \gamma + \delta - i_1$. Da überdies $r_2 = \gamma - r_1$ ist, liefert das Brechungsgesetz

$$q = \frac{\sin r_1}{\sin i_1} = \frac{\sin r_2}{\sin i_2}$$

für r_1 die Beziehung

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{\sin i_1 \sin \gamma}{\sin i_2 + \sin i_1 \cos \gamma} = \frac{Z}{N}$$

Diese Formel wurde mit Hilfe siebenstelliger Logarithmen ausgewertet; es sollte dadurch verhütet werden, dass sich durch die Rechnung Fehler einschleichen, die u. U. grösser sind als jene, die sich aus den Messungen als unvermeidlich ergeben. Die Produkte $\sin i_1 \sin \gamma$ und $\sin i_1 \cos \gamma$ sind für alle sechs Linien einer Messungsreihe konstant und wurden für sich berechnet. Wie sich die übrigen Rechnungen tabellarisch durchführen lassen, ist aus Tab. 9 ersichtlich, wo die Daten der Tabelle 7 ausgewertet sind. log q ergibt sich zweifach. Die beiden Grössen weichen um kaum mehr als fünf Einheiten der letzten Dezimale voneinander ab und erlauben dadurch eine angenehme Kontrolle. Für den endgültigen Wert q^2 wurde vom arithmetischen Mittel ausgegangen. Von log q und log q^2 ist überall in Tab. 9 die Grösse 1 abzuziehen.

Alle auf diese Weise errechneten q^2-Werte sind in Tab. 10 zusammengestellt. Der Index 1 ist immer der rascheren, also schwächer abgelenkten Welle zugeordnet. Durch den Winkel χ ist die Fortpflanzungsrichtung gegeben. Für Wellen, deren Ebenen parallel zur c-Achse sind (L. 0—54), wird χ von (110) aus über (010) hin positiv gemessen und ergibt sich sowohl aus r_1 wie aus r_2 unter Berück-

Tabelle 10. Richtungen und Geschwindigkeitsquadrate der Wellennormalen.

Nr.	Gelb χ_1	Gelb q_1^2	Gelb χ_2	Gelb q_2^2	Grün χ_1	Grün q_1^2	Grün χ_2	Grün q_2^2	Violett χ_1	Violett q_1^2	Violett χ_2	Violett q_2^2	Nr.
0	–96°52′16″	4291275	—	—	–96°59′22″	4260847	—	—	–97° 5′52″	4232717	—	—	0
1	–95°39′49″	4293640	–96° 3′53″	4194973	–95°47′14″	4263140	–96°11′45″	4162912	–95°54′ 5″	4235103	–96°19′ 3″	4133232	1
2	–94 7 50	97792	–94 34 6	95232	–94 15 33	67564	–94 42 17	63460	–94 22 46	39382	–94 49 50	34220	2
3	–92 55 26	4301418	–93 23 17	97449	–93 3 54	69736	–93 32 0	65094	–93 10 37	44665	–93 39 42	36540	3
4	–92 23 11	01131	–92 52 20	95584	–92 31 42	70255	–93 1 18	63228	–92 39 24	42318	–93 9 28	33799	4
5	–89 40 30	06720	–90 13 57	95891	–89 49 44	76070	–90 23 35	64079	–89 58 9	48169	–90 32 35	34388	5
6	–86 54 56	12499	–87 33 48	95615	–87 5 1	82148	–87 44 34	63299	–87 14 15	54367	–87 53 58	35151	6
7	–55 7 3	60009	–54 30 56	96067	–55 0 9	4328534	–54 23 57	64661	–54 54 20	4302093	–54 17 35	36070	7
8	–51 27 43	57642	–50 57 8	95497	–51 22 32	29995	–50 51 47	67214	–51 17 14	01780	–50 45 52	36163	8
9	–47 28 23	59967	–47 2 59	96807	–47 23 53	30880	–46 58 11	66193	–47 19 16	01008	–46 53 45	38058	9
10	–41 58 50	58329	–41 40 34	97080	–41 55 33	29114	–41 37 7	66970	–41 52 28	01741	–41 33 45	37658	10
11	–40 57 20	59202	–40 2 18	98816	–40 47 1	29084	–39 51 33	67538	–40 37 18	00725	–39 41 28	38277	11
12	–40 42 2	59122	–39 47 35	99007	–40 31 45	28835	–39 36 43	67151	–40 22 15	00851	–39 26 47	38075	12
13	–40 21 34	60537	–39 27 41	4200152	–40 11 21	30081	–39 16 49	67905	–40 2 24	03421	–39 7 22	39938	13
14	–39 52 15	63900	–38 59 14	03220	–39 42 4	32983	–38 48 28	70742	–39 32 24	03646	–38 39 9	42653	14
15	–37 44 56	54830	–37 31 55	4196563	–37 42 38	26752	–37 29 29	67289	–37 40 15	4297537	–37 26 55	36593	15
16	–37 39 10	58845	–36 50 54	4200783	–37 30 10	29250	–36 41 12	69195	–37 21 43	4301535	–36 32 14	40056	16
17	–37 38 37	53416	–36 50 46	4196924	–37 30 22	26344	–36 41 25	66445	–37 21 29	4297224	–36 33 1	39177	17
18	–32 30 32	53282	–31 52 1	4200986	–32 22 54	22958	–31 43 58	69358	–32 15 5	91980	–31 35 44	37155	18
19	–31 29 33	53142	–30 52 43	01669	–31 22 18	23167	–30 44 53	69727	–31 15 55	96849	–30 38 17	42808	19
20	–29 5 50	49234	–28 33 2	01026	–28 59 13	19227	–28 26 3	69648	–28 53 10	91775	–28 19 39	41023	20
21	–26 9 43	46597	–26 9 43	02513	–26 9 43	16071	–26 9 43	70361	–26 9 43	84664	–26 9 43	39640	21
22	–26 2 17	45755	–26 2 17	02220	–26 2 17	16554	–26 2 17	71521	–26 2 17	89602	–26 2 17	43397	22
23	–21 55 22	38766	–21 33 27	02274	–21 50 29	08189	–21 28 22	70821	–21 45 55	79744	–21 23 36	41470	23
24	–20 25 14	34734	–20 5 32	02266	–20 20 45	04430	–20 0 50	70847	–20 16 46	77580	–19 56 35	42630	24
25	–19 45 52	35987	–19 26 53	03643	–19 41 23	04554	–19 22 12	71204	–19 36 46	72321	–19 17 40	40026	25
26	–18 58 16	38608	–18 40 18	07503	–18 54 22	09932	–18 36 13	78012	–18 50 26	81203	–18 32 4	48022	26
27	–16 11 48	29269	–15 57 17	04268	–16 8 8	4297554	–15 53 30	71941	–16 4 17	64440	–15 49 42	39650	27
28	–12 59 55	25395	–12 48 49	05201	–12 57 6	94702	–12 46 0	74876	–12 54 25	65617	–12 43 18	46108	28
29	–10 24 33	19213	–10 16 9	05044	–10 22 26	90331	–10 13 50	73963	–10 20 6	58473	–10 11 40	44709	29
30	– 8 5 14	12478	– 7 59 4	04223	– 8 3 27	80949	– 7 57 15	72606	– 8 1 37	48748	– 7 55 25	40755	30
31	– 7 39 23	12300	– 7 33 37	05205	– 7 37 47	82506	– 7 31 57	74651	– 7 36 12	52963	– 7 30 15	43520	31
32	0 0 0	4294207	0 0 0	05864	0 0 0	63603	0 0 0	74647	0 0 0	36886	0 0 0	45520	32
33	0 0 0	94943	0 0 0	07615	0 0 0	62288	0 0 0	74142	0 0 0	28501	0 0 0	41137	33
34	0 0 0	95216	0 0 0	06799	0 0 0	61533	0 0 0	73337	0 0 0	29769	0 0 0	41713	34
35	9 12 6	74113	9 7 45	07723	9 9 51	39640	9 5 31	73567	9 7 59	11296	9 3 35	44463	35
36	10 13 27	69567	10 8 51	06416	10 11 15	39339	10 6 31	74622	10 9 1	08626	10 4 19	44743	36
37	11 38 24	65832	11 33 21	05120	11 35 53	35499	11 30 48	74722	11 33 34	07791	11 28 32	47657	37
38	13 38 31	58898	13 20 27	05184	13 28 7	27971	13 8 54	70919	13 18 55	00643	12 59 29	42995	38
39	19 39 4	54136	19 32 37	09600	19 34 50	24861	19 28 11	79069	19 30 35	4195524	19 24 4	50745	39
40	20 23 36	48025	20 17 6	05008	20 18 50	16447	20 12 18	73237	20 14 29	87654	20 7 55	44338	40
41	21 57 22	45165	21 50 55	05775	21 52 8	13224	21 45 35	73317	21 47 18	83738	21 40 50	44369	41
42	23 51 54	47431	24 0 24	10242	23 59 26	14509	24 7 59	77247	24 6 20	84434	24 14 40	48161	42
43	24 59 46	41820	24 53 4	06449	24 53 37	09365	24 47 0	74501	24 48 8	80481	24 41 4	43350	43
44	26 21 48	39333	26 15 12	06509	26 15 23	07417	26 8 40	74161	26 9 21	77570	26 2 44	44857	44
45	27 35 47	40771	27 29 9	09478	27 29 23	10617	27 22 32	78373	27 23 12	81578	27 16 24	49669	45
46	29 11 5	39790	29 16 35	09538	29 16 50	08200	29 22 20	77990	29 22 22	77796	29 27 45	48436	46
47	30 22 42	35306	30 15 53	06685	30 15 0	03020	30 8 14	74659	30 8 12	74491	30 1 5	44790	47
48	32 31 59	35570	32 36 5	09026	32 36 55	03619	32 41 10	76157	32 41 25	74520	32 45 40	47177	48
49	32 58 7	34768	32 51 1	07835	32 49 51	03399	32 42 36	75968	32 42 2	73781	32 34 43	46138	49
50	33 28 53	32783	33 21 47	06354	33 20 10	00367	33 13 2	73900	33 12 17	71115	33 5 12	44869	50
51	35 14 28	33048	35 7 3	07235	35 5 25	01521	34 57 42	74684	34 57 8	72744	34 49 15	45354	51
52	36 8 45	32875	36 11 55	07700	36 12 47	00816	36 16 4	74703	36 16 8	74232	36 19 37	46671	52
53	38 10 30	32674	38 2 22	07221	38 0 18	00777	37 51 48	74199	37 51 7	72078	37 42 20	44625	53
54	39 19 8	30031	39 10 19	03569	39 8 44	4198835	38 59 29	71096	38 59 23	70806	38 50 0	42650	54
55	25°20′56″	4274220	25°44′31″	4195472	25°30′33″	4242089	25°54′31″	4162233	25°38′37″	4215181	26° 3′19″	4132956	55
56	30 45 49	75361	30 27 16	98117	30 38 22	44283	30 19 29	65838	30 31 36	16080	30 12 33	37100	56
57	32 41 21	76763	32 58 21	4201531	32 48 28	45237	33 5 45	68949	32 54 56	16656	33 12 22	39930	57
58	38 40 50	79841	38 17 18	06718	38 30 35	47948	38 6 43	73971	38 21 53	20942	37 57 25	45191	58
59	20°27′26″	4263731	20°45′10″	4196697	20°35′45″	4232273	20°53′35″	4165015	20°43′ 2″	4204758	21° 1′29″	4135290	59
60	26 25 27	57495	26 12 57	95367	26 19 21	27134	26 6 37	64062	26 13 23	4197534	26 0 43	34906	60
61	28 28 30	54670	28 15 26	95128	28 21 41	23550	28 8 23	63193	28 15 43	96422	28 1 47	33356	61
62	26°56′37″	4232038	26°50′28″	4202257	26°50′ 8″	4200672	26°43′54″	4170582	26°44′12″	4172066	26°37′49″	4141347	62
63	28 55 56	32614	29 3 59	05180	29 5 7	01334	29 13 14	73713	29 13 34	72596	29 21 51	44472	63
64	31 57 45	32465	31 51 28	07656	31 49 51	01332	31 43 24	75953	31 42 39	72987	31 36 0	46852	64
65	34 28 47	34036	34 34 11	11327	34 36 13	02766	34 41 41	79818	34 43 1	74220	34 48 36	50811	65
66	36 56 51	35517	37 1 26	14133	37 3 31	04463	37 8 11	82751	37 9 37	76111	37 14 23	53982	66
67	39 27 58	36792	39 20 54	15660	39 17 39	05901	39 10 28	84440	39 8 9	77551	39 0 44	55387	67
68	28°48′ 1″	4254722	28°36′14″	4201769	28°41′ 5″	4223505	28°29′ 9″	4170072	28°35′12″	4197116	28°22′49″	4141746	68
69	31 54 52	57685	31 41 56	06319	31 47 20	27720	31 34 4	75220	31 40 12	99471	31 26 36	45709	69
70	36 42 54	66793	37 1 56	09724	36 53 0	36496	37 12 22	78465	37 2 11	4208958	37 21 49	50175	70
71	38 43 26	70235	39 1 42	11290	38 52 50	39898	39 11 26	79995	39 1 27	12080	39 20 18	51492	71
72	40 14 28	72678	39 53 43	11822	40 3 51	41536	39 42 57	80276	39 54 10	13116	39 33 8	51548	72
73	13°16′53″	4355339	14° 5′51″	4203420	13°26′40″	4324885	14°16′15″	4171252	13°35′40″	4296941	14°25′38″	4142310	73
74	17 36 17	55046	17 17 21	05111	17 32 24	24053	17 13 16	72990	17 28 57	96611	17 9 33	43963	74
75	26 17 33	52260	26 45 6	11035	26 23 33	21365	26 51 27	78769	26 28 33	95661	26 57 7	50005	75
76	30 21 4	51041	29 48 40	11663	30 13 49	19700	29 41 6	79372	30 7 34	92795	29 34 8	49722	76
77	38 24 52	46958	37 43 33	15610	38 15 27	16962	37 33 25	83498	38 6 56	89853	37 24 28	55170	77
78	20° 0′16″	4359628	20°49′14″	4209565	20°10′24″	4328526	20°59′47″	4177353	20°19′32″	4300474	21° 9′ 5″	4149010	78
79	23 8 27	60326	23 52 7	10629	23 17 20	29740	24 1 29	78723	23 25 23	02129	24 9 49	50349	79
80	27 3 9	62653	26 32 49	12888	26 56 46	30958	26 26 5	79900	26 50 54	01952	26 20 6	50688	80
81	30 35 53	60834	30 1 6	12408	30 28 49	30551	29 53 51	81730	30 22 18	02677	29 47 7	53284	81
82	33 10 13	63627	33 39 2	17010	33 16 23	32099	33 45 24	84814	33 21 48	04432	33 51 7	56028	82
83	34 29 19	59525	33 49 32	13265	34 21 24	30294	33 41 2	82206	34 13 51	02477	33 33 3	53133	83
84	35 29 52	63557	34 48 37	17357	35 20 45	31122	34 39 6	83830	35 12 45	02711	34 30 56	55088	84
85	40 8 59	58487	39 21 22	15717	39 58 43	27669	39 10 12	82373	39 50 5	01764	39 1 17	55737	85

Leere Seite
Blank page
Page vide

sichtigung des Winkels, den die entsprechenden Flächen des optischen Prismas mit (110) bilden. Die übrigen χ-Werte gehören zu Prismen, die von einer vertikalen und einer schiefen Ebene gebildet sind, z. B. F_1 und F_2 der Fig. 5. S bedeutet darin die Fortpflanzungsrichtung der fraglichen Welle. Unter χ ist der Winkel F S verstanden, wo F die Gegenfläche von F_1 ist. Auch hier ergibt sich χ aus r_1 und r_2 durch gleiche Überlegungen wie im Fall der Zone [001].

Tabelle 9

Rechnungsschema zur Bestimmung von r_i und q_i^2

	Gelb	Grün	Violett	Gelb	Grün	Violett
γ	$53^\circ 11' 55^{55}/_{72}$	$53^\circ 11' 55^{55}/_{72}$	$53^\circ 11' 55^{55}/_{72}$	$53^\circ 11' 55^{55}/_{72}$	$53^\circ 11' 55^{55}/_{72}$	$53^\circ 11' 55^{55}/_{72}$
δ	$33\ 46^{15}/_{72}$	$34\ 12^{27}/_{72}$	$34\ 36\ ^{6}/_{72}$	$34\ 14^{54}/_{72}$	$34\ 41\ ^{3}/_{72}$	$35\ \ 7^{12}/_{72}$
$\gamma+\delta$	$86\ 57^{70}/_{72}$	$87\ 24^{10}/_{72}$	$87\ 47^{61}/_{72}$	$87\ 26^{37}/_{72}$	$87\ 52^{58}/_{72}$	$88\ 18^{67}/_{72}$
i_1	$40\ 27\ ^{3}/_{72}$	$40\ 27\ ^{3}/_{72}$	$40\ 27\ ^{3}/_{72}$	$40\ 27\ ^{3}/_{72}$	$40\ 27\ ^{3}/_{72}$	$40\ 27\ ^{3}/_{72}$
$_2 = \gamma + \delta - i_1$	$46\ 30^{67}/_{72}$	$46\ 57\ ^{7}/_{72}$	$47\ 20^{58}/_{72}$	$46\ 59^{34}/_{72}$	$47\ 25^{55}/_{72}$	$47\ 51^{64}/_{72}$
og sin i_2	9,8606737	9,8637851	9,8665636	9,8640653	9,8671399	9,8701485
sin i_2	0,7255607	0,7307773	0,7354676	0,7312490	0,7364442	0,7415637
in $i_1 \cdot \cos\gamma$	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784
in $i_2 + \sin i_1 \cos\gamma$	1,1142391	1,1194557	1,1241460	1,1199274	1,1251226	1,1302421
og (Z)	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710
og (N)	0,0469784	0,0490069	0,0508227	0,0491898	0,0511998	0,0531715
og tg r_1	9,6685926	9,6665641	9,6647483	9,6663812	9,6643712	9,6623995
r_1	24°59'45,5"	24°53'37,0"	24°48' 8,2"	24°53' 3,9"	24°47' 0"	24°41' 4,2"
og sin r_1	9,6258828	9,6242147	9,6227197	9,6240645	9,6224088	9,6207826
og sin i_1	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065
og q	0,8137763	0,8121082	0,8106132	0,8119580	0,8103023	0,8086761
$_2 = \gamma - r_1$	28°12' 0,3"	28°18' 8,8"	28°23'37,6"	28°18'41,9"	28°24'45,8"	28°30'41,6"
og sin $(\gamma - r_1)$	9,6744496	9,6758936	9,6771767	9,6760229	9,6774422	9,6788241
og sin i_2	9,8606737	9,8637851	9,8665636	9,8640653	9,8671399	9,8701485
og q	0,8137759	0,8121085	0,8106131	0,8119576	0,8103023	0,8086756
og q (mittel)	0,8137761	0,8121083	0,8106131	0,8119578	0,8103023	0,8086758
og q^2	0,6275522	0,6242166	0,6212262	0,6239156	0,6206046	0,6173516
q^2	0,4241820	0,4209365	0,4180481	0,4206449	0,4174501	0,4143350

Die Werte der Tab. 10 sind in Fig. 3 und Fig. 4 aufgetragen: χ wurde zur Abszisse und q^2 zur Ordinate gewählt. Zwischen den Punkten [3]) hindurch sind in möglichster Annäherung kontinuierliche

[3]) Im Gebiet, wo sich zwei Kurvenäste kreuzen, sind die q^2-Werte, welche dem weniger steilen oder weniger gekrümmten Ast entsprechen, durch ausgefüllte Kreischen gekennzeichnet. Die Verteilung der Kurven von Fig. 4 auf die verschiedenen Farben macht keine Schwierigkeit; q^2_1 und q^2_2 unterscheiden sich hinreichend durch den Kurvenverlauf.

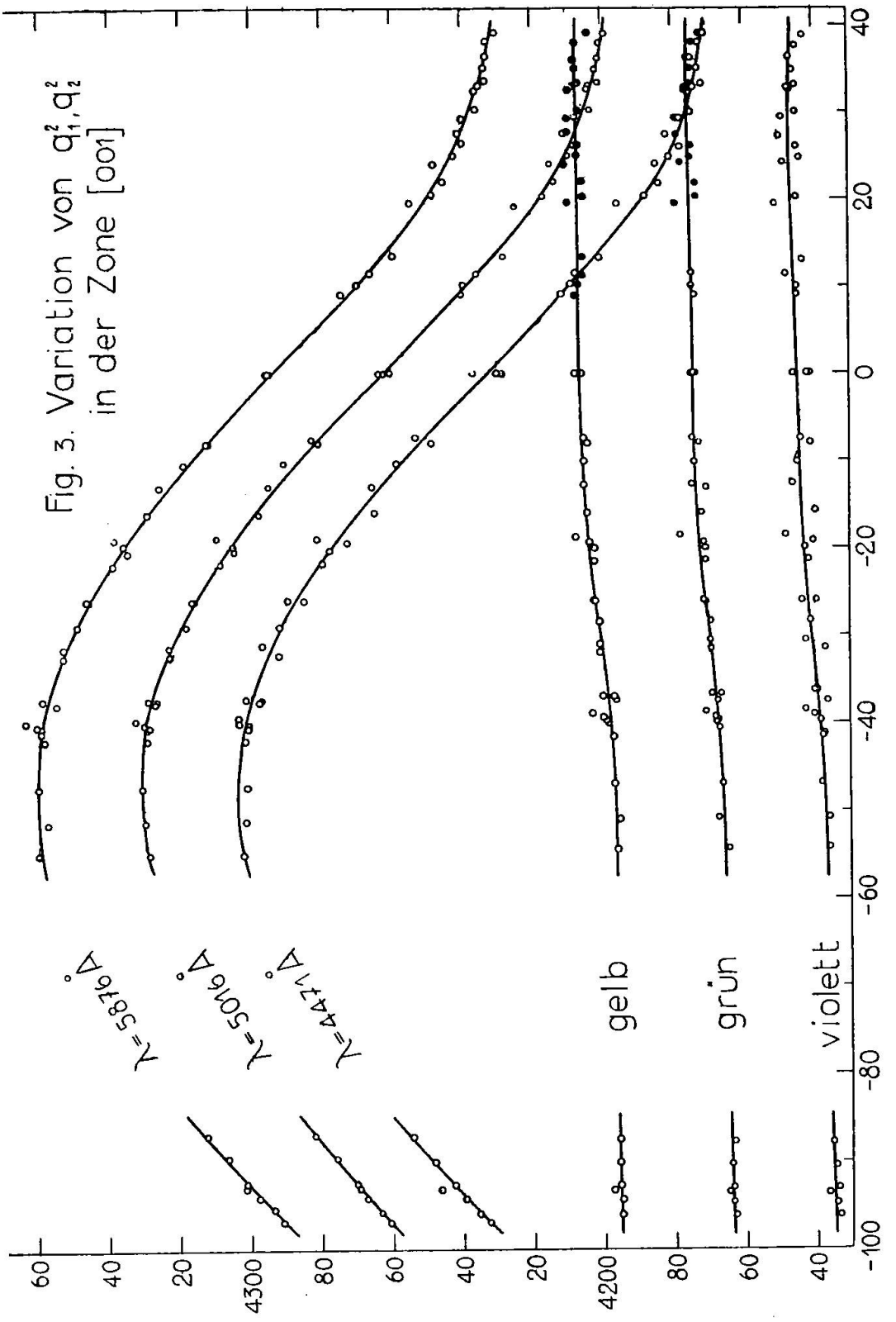


Fig. 3. Variation von q_1^2, q_2^2 in der Zone [001]
λ=5876 Å
λ=5016 Å
λ=4471 Å
gelb
grün
violett
60
40
20
4300
80
60
40
20
4200
80
60
40
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100

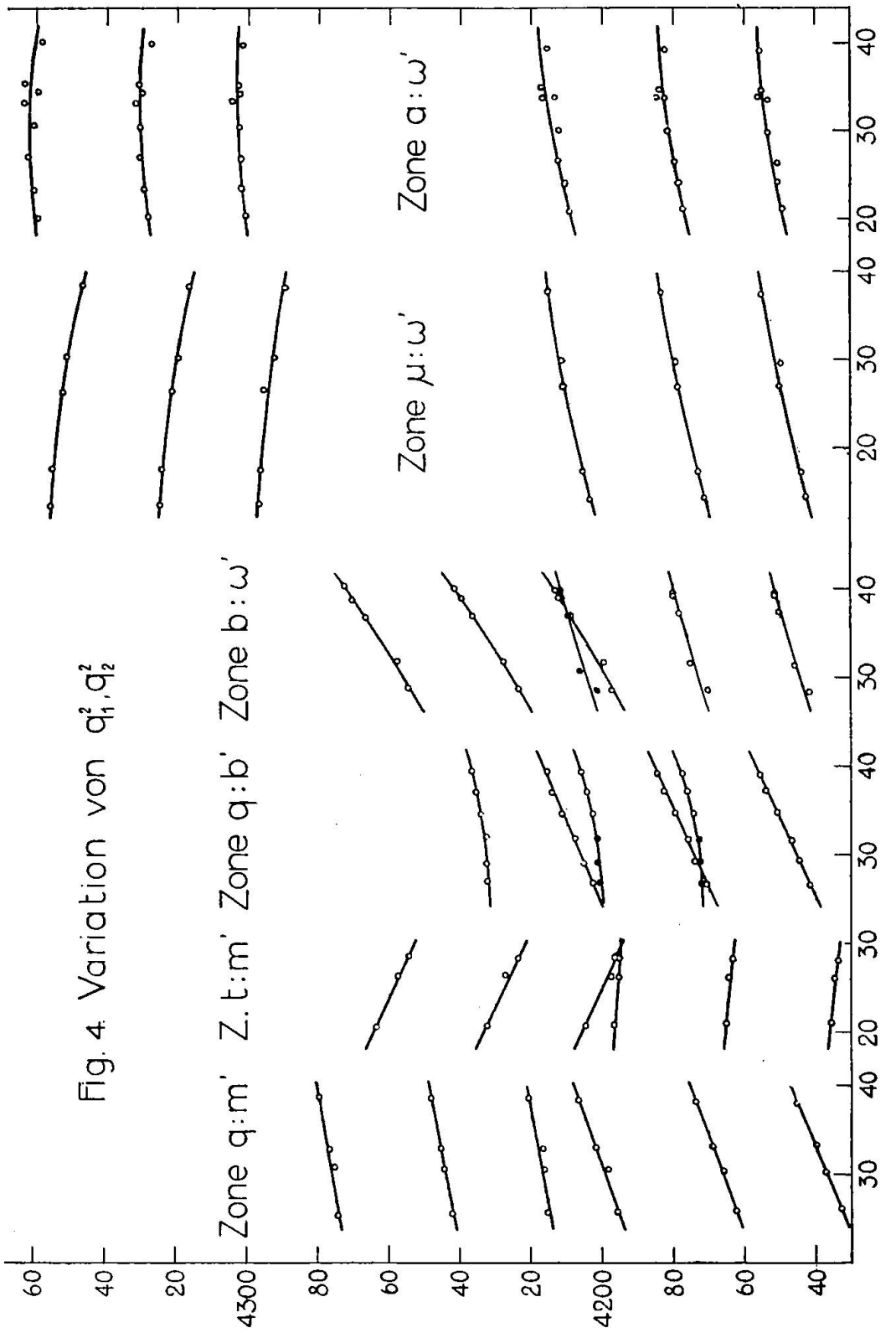


Fig. 4. Variation von q_1^2, q_2^2

Kurven gezogen. Für gelb und grün ist die Streuung der Punkte ungefähr gleich. Sie beträgt maximal etwa fünf Einheiten der vierten Dezimale, d. h. ungefähr $^1/_{1000}$ des q^2-Wertes. Für violett macht sie etwas mehr aus — wohl deshalb, weil die violetten Linien vom Auge weniger scharf gesehen werden.

Die Streuung hat im einzelnen verschiedene Gründe. Bedeutungsvoll ist vorab die Ungenauigkeit des Prismenwinkels, der sich infolge gekrümmter oder vizinaler Flächenausbildung mit dem wechselnden Lichteinfall etwas zu ändern scheint (Tab. 5). Gerade dieser Umstand dürfte für die Streuung im Gebiete von 20^0—40^0 der c-Achsenzone massgebend sein. Es liegen Messungen an vier verschiedenen Kristallen mit gleich orientierten Prismen vor. Die Ergebnisse von drei Kristallen schmiegen sich den Kurven gut an; die vom vierten Kristall gelieferten Punkte stimmen nur in einem mittleren Gebiete, also bei relativ symmetrischem Durchgang der Wellen, befriedigend mit den Kurven überein, entfernen sich aber davon umso mehr, je stärker der Wellendurchgang vom Minimum der Ablenkung abweicht. Da Reflex und Spektrum durchwegs schön sind, so zeigt sich daraus überzeugend, dass einzelne Messungen, selbst wenn sie noch so gut erscheinen, Fehlschlüsse veranlassen können. Ob innere Reflexionen in diesem Fallel mitspielen, konnte nicht entschieden werden.

Die Flächenbeschaffenheit der Eintrittsebene beeinflusst den Gang des reflektierten Lichtes auch etwas. Ist sie nicht besonders gut, so treten selbst bei nicht zu grossen Einfallswinkeln Verbreiterungen des Spaltbildes auf, und das erschwert die genaue Bestimmung von i_1. Dass die abgelenkte Welle bei angenähert symmetrischem Durchgang die genauesten Messungen gestattet, ist längst bekannt. Wird der Einfallswinkel grösser, so werden die Spaltbilder nicht nur schmäler, sondern rücken sich auch stetig näher. Ein kleinster Messungsfehler von δ wirkt sich demnach unverhältnismässig stark auf q^2 aus. Umgekehrt werden die Spaltbilder der abgelenkten Wellen bei sehr kleinem oder gar negativem Einfallswinkel überaus in die Breite gezogen, so dass die genaue Einstellung abermals erschwert ist.

Die Grösse des Prismenwinkels selber spielt auch eine gewisse Rolle. Ist dieser Winkel beträchtlich, so tritt eine starke Ablenkung auf und die Messungsfehler wirken sich relativ wenig aus. Grosse Prismenwinkel sind aber insofern nachteilig, als dann infolge des baldigen Eintretens der Totalreflexion nur ein kleines Durchgangsgebiet erfasst wird. Es sei hier auf Journ.-Nr. 45 (L. 0) verwiesen,

wo das stärker abgelenkte Spektrum, wie schon erwähnt, nicht mehr austritt [4]).

Die grosse Streuung in der c-Achsenzone bei -37^0 und $+12^0$ erklärt sich aus dem Zusammenwirken äusserster Lagen mit kleinem Prismenwinkel, während sie bei -97^0 bis -87^0 eben darum sehr klein ist, weil es sich um Prismenwinkel von 47^0 und 70^0 handelt. Die ansehnliche Streuung bei -39^0 (Prismenwinkel $= 57^0$) ist aus der extremen Lage des Wellendurchganges begreiflich. Bei anderem Durchgang ergibt das gleiche Prisma sehr gut mit der Kurve übereinstimmende Werte [5]).

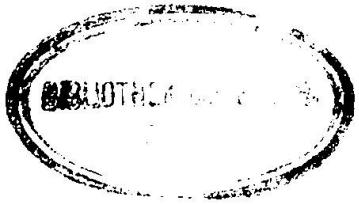
Aus dem genauen Studium der in Fig. 3 und Fig. 4 dargestellten Kurven zeigt sich sofort, dass die Differenz $D = q_1^2 - q_2^2$ viel genauer ermittelt werden kann als die q^2-Werte selber. Liegt q_1^2 unter- oder oberhalb der gezeichneten Kurve, so befindet sich q_2^2 zumeist fast ebensoviel unter oder über dem andern Kurvenast. Dieses Verhalten stimmt im allgemeinen für alle drei Farben bestens überein. Begründet ist diese grössere Genauigkeit von D dadurch, dass für die drei zusammengehörigen q^2-Paare Einfalls- und Prismenwinkel unverändert bleiben, sodass die davon herrührenden Fehler in der Differenz wegfallen.

Hier sei noch darauf hingewiesen, dass aus den Kurvenästen der c-Achsenzone die Hauptlichtgeschwindigkeiten angenähert abgelesen werden können. Das Minimum der unteren Kurven, bei ca. -55^0, entspricht dem c^2-Wert jeder Farbe, das Maximum der oberen Äste gibt bei fast gleichem Azimut wie soeben je a^2. Zur mittleren Hauptlichtgeschwindigkeit b^2 gehört jeweils das Maximum der untern oder das Minimum der oberen Zweige. Wo b^2 wirklich liegt, kann aus dem Kurvenverlauf nicht erschlossen werden. Da aber in jenem Gebiete, ungefähr bei $+35^0$, auch die Schwingungsrichtungen mit einem Nicol geprüft und für die unteren Kurven annähernd parallel der c-Achse gefunden wurden, so ist b^2 das Minimum der oberen Kurven. Es ergeben sich so die Näherungswerte (vgl. Tab. 21):

---

[4]) Die Messungen für das weniger stark abgelenkte Spektrum wurden trotzdem durchgeführt, weil die so erhaltenen Punkte für den Verlauf der oberen Kurvenäste wichtig erschienen.

[5]) Gemäß diesen Feststellungen ist es ratsam, bei solchen Arbeiten äusserste Wellendurchgänge nicht einzubeziehen, d.h. auf eine gewisse Gedrängtheit der Kurvenpunkte zu verzichten — zumal wenn die Flächen weniger gut ausgebildet sind und weder gründlich gereinigt noch vollkommen geschliffen werden können.



	Gelb	Grün	Violett
a^2	0,4361	0,4330	0,4301
b^2	0,4231	0,4200	0,4172
c^2	0,4195	0,4163	0,4133

Aus diesen Feststellungen und aus dem fast horizontalen Verlauf des unteren Kurvenastes folgt, dass die Schwingungsrichtung n_γ nicht allzu stark zur c-Achse geneigt ist.

b) AUSWERTUNG DER MESSERGEBNISSE

Um die Messergebnisse zur Ermittlung der optischen Konstanten auszuwerten, gehen wir vom Indexellipsoid (= Indikatrix) aus. Wir beziehen diese Fläche auf ein Rechtssystem, dessen

x-Achse die Aussennormale zu (110) ist
y- „ nach rechts hin zeigt
z- „ der positiven c-Achse des Kristalls parallel verläuft (Fig. 1).

Die Gleichung der Indikatrix werde in der Form

$$I(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 1 \quad (1)$$

geschrieben. Die Fortpflanzungsrichtung sei durch die Richtungscosinus ψ_1, ψ_2, ψ_3 festgelegt. Die zugehörigen Geschwindigkeiten [6]) q_1 und q_2 sind die Reziproken der Hauptachsen jener Ellipse, in der $I(x,y,z) = 1$ von der zu ψ_1, ψ_2, ψ_3 senkrechten Ebene

$$E(x,y,z) \equiv \psi_1 x + \psi_2 y + \psi_3 z = 0 \quad (2)$$

geschnitten wird. Es muss also das Abstandsquadrat

$$\frac{1}{q^2} \equiv x^2 + y^2 + z^2 \quad (3)$$

ein Extremum werden und die Koordinaten müssen überdies Gl. 1 und Gl. 2 erfüllen. Mithin gilt:

$$F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1 I(x,y,z) - \lambda_2 E(x,y,z) = \text{Extremum.}$$

Hierin bedeuten λ_1 und λ_2 noch zu bestimmende Konstanten. Durch partielle Differentiation von F nach x, y und z ergeben sich (Lit. 9) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x - \lambda_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) - \lambda_2'\psi_1 &= 0 \\ y - \lambda_1(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) - \lambda_2'\psi_2 &= 0 \\ z - \lambda_1(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) - \lambda_2'\psi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

[6]) Im Gegensatz zur bisherigen Schreibweise bezeichnen q_1 und q_2 die beiden einer bestimmten Fortpflanzungsrichtung zugeordneten Lichtgeschwindigkeiten.

Aus Symmetriegründen ist für a_{ik} auch a_{ki} gesetzt. Nebstdem ist $2\lambda_2' = \lambda_2$. Werden nun die Gleichungen 4 der Reihe nach mit x, y und z multipliziert und hernach addiert, so kommt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1 I(x,y,z) - \lambda_2' E(x,y,z) = 0$$

Mit Berücksichtigung von 1, 2 und 3 folgt hieraus:

$$\lambda_1 = \frac{1}{q^2}$$

Demnach lassen sich die Gl. 4 auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}(q^2 - a_{11})\,x - a_{12}\,y - a_{13}\,z &= \lambda_2' q^2 \psi_1 \\ -a_{21}\,x + (q^2 - a_{22})\,y - a_{23}\,z &= \lambda_2' q^2 \psi_2 \\ -a_{31}\,x - a_{32}\,y + (q^2 - a_{33})\,z &= \lambda_2' q^2 \psi_3\end{aligned} \tag{5}$$

Das System 5 wird nach x, y, z aufgelöst. Nach Eintragung der gefundenen Werte in die Gl. 2 kommt für die sogen. Wellennormalenfläche der Ausdruck:

$$\begin{aligned}q^4 - q^2 [&(a_{22} + a_{33})\psi_1^2 + (a_{33} + a_{11})\psi_2^2 + (a_{11} + a_{22})\psi_3^2 \\ &- 2a_{12}\psi_1\psi_2 - 2a_{23}\psi_2\psi_3 - 2a_{31}\psi_3\psi_1] \\ &+ [(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\psi_1^2 + (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)\psi_2^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\psi_3^2 \\ &- 2(a_{12}a_{33} - a_{23}a_{31})\psi_1\psi_2 - 2(a_{23}a_{11} - a_{31}a_{12})\psi_2\psi_3 \\ &- 2(a_{31}a_{22} - a_{12}a_{23})\psi_3\psi_1] = 0\end{aligned} \tag{6}$$

Abkürzend sei für die auftretenden Funktionen der sechs Polarisationskonstanten $a_{ik} = a_{ki}$ gesetzt:

$$\begin{aligned}a_{22} + a_{33} &= L_{11} & a_{33} + a_{11} &= L_{22} & a_{11} + a_{22} &= L_{33} \\ -a_{12} &= L_{12} & -a_{23} &= L_{23} & -a_{31} &= L_{31}\end{aligned} \tag{7a}$$

und

$$\begin{aligned}a_{22}a_{33} - a_{23}^2 &= P_{11} & a_{33}a_{11} - a_{31}^2 &= P_{22} & a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= P_{33} \\ a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33} &= P_{12} & a_{31}a_{12} - a_{23}a_{11} &= P_{23} & a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22} &= P_{31}\end{aligned} \tag{7b}$$

Gl. 6 nimmt so die vereinfachte Gestalt an:

$$\begin{aligned}q^4 - q^2 [&L_{11}\psi_1^2 + L_{22}\psi_2^2 + L_{33}\psi_3^2 + 2L_{12}\psi_1\psi_2 + 2L_{23}\psi_2\psi_3 + 2L_{31}\psi_3\psi_1] \\ + [&P_{11}\psi_1^2 + P_{22}\psi_2^2 + P_{33}\psi_3^2 + 2P_{12}\psi_1\psi_2 + 2P_{23}\psi_2\psi_3 + 2P_{31}\psi_3\psi_1] = 0\end{aligned} \tag{8}$$

Zur Bestimmung der Richtungscosinus ψ_i ist zu beachten, dass jede Wellenrichtung entweder der Grundzone selber angehört, oder aber einer Zone, die ausser einer schiefen Endfläche F_2 auch eine Ebene F_1 = (hk0) enthält. Die Gegenfläche der letzteren sei F (Fig. 5). Es sei nun φ der über (010) gemessene Winkel (110) : F, χ (wie bereits S. 211 vermerkt) der Winkel F : S und endlich ω der Winkel, den die Grundzone mit der Zone F_1F_2 im angedeuteten Sinne

einschliesst. Für diesen allgemeineren Fall lassen sich aus den in Fig. 5 sofort ersichtlichen sphärischen Dreiecken folgende Beziehungen aufstellen:

$$\cos\psi_1 = \cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\chi\cos\omega$$
$$\cos\psi_2 = \sin\varphi\cos\chi + \cos\varphi\sin\chi\cos\omega$$
$$\cos\psi_3 = \sin\chi\sin\omega$$

Liegt die Wellennormale in der Grundzone, so wird $\chi = 0$. Die Formeln vereinfachen sich daher zu:

$$\cos\psi_1 = \cos\varphi \qquad \cos\psi_2 = \sin\varphi \qquad \cos\psi_3 = 0$$

In Tabelle 10 wurde der die Fortpflanzungsrichtung bestimmende Winkel einheitlich und darum auch für die Grundzone χ genannt. Der

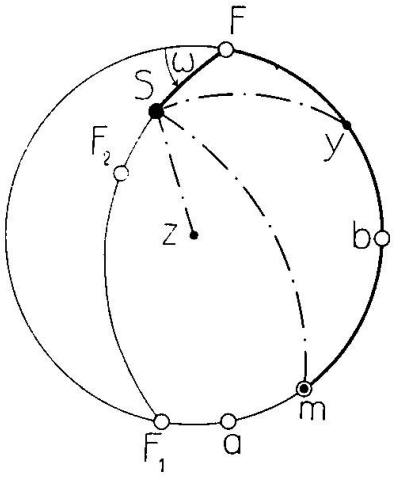


Fig. 5. Festlegung der Wellennormale S im xyz-System.
m ist zugleich Ausstichpunkt der x-Achse.

jetzigen Schreibweise zufolge wäre für L. 0—54 χ durch φ oder ψ zu ersetzen.

Leider ist es nicht möglich, für eine beliebige Fortpflanzungsrichtung die beiden zusammengehörigen q^2-Werte durch Ablenkungsmessungen direkt zu bekommen. Hingegen zeigt ein Blick auf die Kurven und das Zahlenmaterial, dass die „beobachteten" Geschwindigkeitsquadrate mit den hier in Rede stehenden nahezu übereinstimmen. Es schien deshalb erlaubt, durch Auswertung der Kurven die beobachteten q^2-Werte je auf die gleiche Richtung zu reduzieren. Zur Vereinfachung späterer Rechnungen war es angezeigt, diese Reduktion für alle drei Farben auf eine einzige Richtung vorzunehmen. So wurden alle zusammengehörigen, d. h. aus dem gleichen Einfallswinkel erhaltenen q^2 auf die Richtung von grün I umgerechnet. Hierdurch werden die erforderlichen Korrekturen z. T. positiv, z. T. ne-

Tabelle 11. Reduktion der zu einem i_1-Wert gehörigen Lichtgeschwindigkeitsquadrate auf eine einzige Fortpflanzungsrichtung.

				Gelb					Grün				Violett				
Nr.	cos ψ_1	cos ψ_2	cos ψ_3	k_1	k_2	$q_1^2+q_2^2$	$q_1^2\cdot q_2^2$	$q_1^2-q_2^2$	k_2	$q_1^2+q_2^2$	$q_1^2\cdot q_2^2$	$q_1^2-q_2^2$	k_1	k_2	$q_1^2+q_2^2$	$q_1^2\cdot q_2^2$	$q_1^2-q_2^2$	Nr.
1	$\bar{1}$007669	$\bar{9}$949100	0000000	$\bar{2}$80	57	8488390	1801077	0098330	42	8426094	1774726	0100186	257	53	8368645	1750595	0102075	1
2	$\bar{0}$743986	9972286	—	$\bar{3}$20	63	92767	02916	0102177	90	31114	76822	04014	257	57	73916	52784	05362	2
3	$\bar{0}$534979	$\bar{9}$985679	—	$\bar{3}$20	63	98610	05391	03586	47	34877	78405	04595	280	48	81605	55989	08357	3
4	$\bar{0}$442006	$\bar{9}$990226	—	$\bar{3}$60	67	96422	04453	05120	48	33531	77825	06979	270	62	76514	53854	08727	4
5	0029089	$\bar{9}$999958	—	$\bar{3}$30	00	8502281	06914	10499	0	40149	80589	11991	293	72	82922	56510	14002	5
6	0508835	$\bar{9}$987045	—	$\bar{3}$50	$\bar{1}$9	07745	09204	16553	$\bar{2}$67	45180	82672	19116	330	33	89881	59395	19513	6
7	5735764	8191521	—	23	0	56099	29499	63965	0	93195	1802688	63873	$\bar{2}$0	0	8438143	79368	66003	7
8	6241070	$\bar{7}$813389	—	17	$\bar{8}$7	53069	28217	62249	$\bar{1}$03	97106	04357	62884	0	0	37943	79286	65617	8
9	6768759	$\bar{7}$360971	—	0	$\bar{7}$0	56704	29763	63230	$\bar{8}$7	96986	04291	64774	0	$\bar{1}$00	38966	79739	63050	9
10	7439229	$\bar{6}$682654	—	$\bar{1}$5	$\bar{5}$0	55344	29197	61284	$\bar{6}$3	96021	03902	62207	7	$\bar{7}$3	39333	79885	64163	10
11	7571852	$\bar{6}$532003	—	$\bar{6}$0	$\bar{2}$25	57733	30225	60551	$\bar{2}$75	96348	04044	61821	33	$\bar{3}$30	38732	79642	62811	11
12	7600281	$\bar{6}$498903	—	$\bar{6}$0	$\bar{2}$20	57849	30277	60275	$\bar{2}$75	95711	03772	61959	60	$\bar{3}$25	38661	79609	63161	12
13	7639837	$\bar{6}$452354	—	$\bar{5}$0	$\bar{2}$20	60419	31375	60555	$\bar{1}$83	97711	04618	62359	30	$\bar{2}$12	43084	81471	63725	13
14	7693995	$\bar{6}$387678	—	$\bar{6}$7	$\bar{2}$15	66838	34121	60828	$\bar{1}$80	8503455	07058	62421	33	$\bar{3}$15	46051	82743	61341	14
15	7910456	$\bar{6}$117572	—	$\bar{2}$3	$\bar{3}$7	51333	27506	58281	$\bar{4}$7	8493994	03062	59510	20	$\bar{5}$3	34097	77702	61017	15
16	7933535	$\bar{6}$087614	—	$\bar{1}$20	$\bar{1}$95	59283	30908	58137	$\bar{2}$45	98200	04843	60300	53	$\bar{2}$90	41434	80790	61822	16
17	7933535	$\bar{6}$087614	—	$\bar{1}$07	$\bar{1}$33	50100	26993	56518	$\bar{1}$63	92626	02477	60062	60	$\bar{1}$90	36271	78640	58297	17
18	8444837	$\bar{5}$355811	—	$\bar{1}$33	$\bar{1}$03	54032	28707	52266	$\bar{1}$30	92186	02340	53730	107	$\bar{1}$57	29085	75636	55089	18
19	8538537	$\bar{5}$205130	—	$\bar{1}$28	$\bar{1}$30	54564	28940	51475	$\bar{1}$23	92734	02573	53563	90	$\bar{7}$3	39566	80061	54204	19
20	8747608	$\bar{4}$845551	—	$\bar{1}$40	$\bar{3}$0	50090	27053	48098	$\bar{1}$10	88710	00894	49689	150	$\bar{6}$6	32815	77239	50968	20
21	8975152	$\bar{4}$409838	—	0	0	49110	26663	44084	0	86432	1799957	45710	0	0	24304	73697	45024	21
22	8985390	$\bar{4}$388939	—	0	0	47975	26182	43535	0	88075	1800660	45033	0	0	32999	77352	46205	22
23	9282696	$\bar{3}$719079	—	$\bar{1}$33	$\bar{5}$7	40850	23188	36416	$\bar{7}$3	78937	1796837	37441	158	$\bar{9}$0	21257	72460	38522	23
24	9375857	$\bar{3}$477540	—	$\bar{1}$07	$\bar{3}$5	36858	21510	32396	$\bar{4}$7	75230	95292	33630	133	$\bar{5}$6	20287	72074	35139	24
25	9415685	$\bar{3}$368214	—	$\bar{1}$11	$\bar{5}$0	39469	22626	32283	$\bar{6}$3	75695	95490	33413	167	$\bar{8}$0	12405	68775	32542	25
26	9460852	$\bar{3}$239174	—	$\bar{1}$20	$\bar{4}$7	45944	25400	31032	$\bar{6}$0	87884	1800669	31980	120	$\bar{7}$3	29272	75871	33374	26
27	9606178	$\bar{2}$778735	--	$\bar{1}$20	$\bar{2}$9	33388	20078	24910	$\bar{4}$0	69455	1792897	25653	147	$\bar{4}$8	04162	65358	24985	27
28	9745661	$\bar{2}$241007	—	$\bar{1}$00	$\bar{2}$7	30469	18862	20121	$\bar{3}$7	69541	92969	19863	110	$\bar{4}$7	11778	68592	19666	28
29	9836764	$\bar{1}$799469	—	$\bar{1}$00	$\bar{1}$0	24147	16202	14079	$\bar{1}$3	64281	90763	16381	80	$\bar{1}$7	03245	65039	13861	29
30	9901461	$\bar{1}$400372	—	$\bar{7}$7	$\bar{1}$3	16611	13024	08191	$\bar{2}$0	53535	86263	08363	80	$\bar{2}$7	8389527	59312	08100	30
31	9911384	$\bar{1}$328330	—	$\bar{7}$3	$\bar{9}$	17406	13369	07031	$\bar{1}$4	57143	87791	07869	80	$\bar{1}$9	96537	62246	09542	31
32	1,0	0	—	0	0	00071	06085	0088343	0	38250	79904	0088956	0	0	82406	56410	0091366	32
33	1,0	0	—	0	0	02558	07147	87328	0	36430	79140	88146	0	0	69638	51080	87364	33
34	1,0	0	—	0	0	02015	06911	88417	0	34870	78481	88196	0	0	71482	51849	88056	34
35	9872293	1593069	—	83	3	8481922	1798465	66470	7	13214	69445	66066	$\bar{8}$0	10	55686	45326	66743	35
36	9842470	1767984	—	83	3	76089	96002	63231	8	13969	69767	64709	$\bar{8}$3	12	53298	44338	63788	36
37	9795752	2010779	—	120	5	71077	93886	60827	8	10229	68206	60769	$\bar{8}$0	12	55380	45219	60042	37
38	9725056	2328796	—	367	0	64449	91099	54081	0	8398890	63452	57052	$\bar{3}$30	0	43308	40188	57318	38
39	9421550	3351775	—	120	0	63856	90872	44656	0	8403930	65599	45792	$\bar{1}$20	18	46167	41413	44641	39
40	9377880	3472085	—	142	0	53175	86358	43159	0	8389684	59623	43210	$\bar{1}$42	18	31868	35454	43156	40
41	9279447	3727179	—	107	2	51049	85467	39495	$\bar{7}$	86548	58315	39900	$\bar{1}$60	12	27959	33834	39197	41
42	9136637	4064708	—	$\bar{1}$87	$\bar{1}$	57485	88192	37003	$\bar{9}$	91747	60501	37271	163	$\bar{1}$5	32743	35832	36451	42
43	9070442	4210358	—	130	1	48400	84355	35500	7	83873	57203	34857	$\bar{1}$20	13	23724	32075	36998	43
44	8968727	4422887	—	128	0	45970	83333	32952	1	81579	56244	33255	$\bar{1}$10	3	22320	31499	32600	44
45	8871451	4614905	—	100	0	50349	85185	31393	$\bar{1}$2	89002	59358	32232	$\bar{1}$00	22	31169	35184	31787	45
46	8722116	4891288	—	$\bar{1}$00	0	49228	84714	30152	$\bar{6}$	86184	58179	30216	80	0	26312	33165	29440	46
47	8638356	5037740	—	120	0	42111	81710	28741	0	77679	54618	28361	$\bar{8}$2	0	19199	30205	29619	47
48	8422958	5390158	—	$\bar{5}$8	0	44538	82738	26486	0	79776	55497	27462	25	0	21722	31258	27368	48
49	8402513	5421971	—	67	$\bar{1}$	42669	81948	27001	0	79390	55336	27431	$\bar{6}$7	0	19862	30484	27576	49
50	8354877	5495090	—	90	0	39047	80421	26519	0	74267	53191	26467	$\bar{5}$3	0	15931	28851	26193	50
51	8183168	5747672	—	$\bar{6}$6	0	40349	80971	25879	0	76205	54002	26837	$\bar{5}$3	0	18045	29728	27337	51
52	8067885	5908404	—	$\bar{2}$7	0	40548	81055	25148	0	75519	53716	26113	15	0	20923	30925	27576	52
53	7880107	6156615	—	33	0	39928	80793	25486	0	74976	53488	26578	$\bar{3}$0	0	16673	29157	27423	53
54	7754957	6313528	0000000	0	0	33600	78123	26462	0	69931	51374	27739	0	0	13456	27819	28156	54
55	9024600	0877990	4217312	0	$\bar{1}$86	8469506	1793158	0078934	$\bar{3}$20	8404002	1765521	0080176	0	$\bar{5}$13	8347624	1741900	0082738	55
56	8604458	1038533	4988463	$\bar{5}$0	$\bar{1}$48	73576	94889	77046	$\bar{2}$84	10405	68220	78161	33	$\bar{4}$05	53618	44419	78608	56
57	8405665	1104093	5303371	$\bar{5}$9	$\bar{1}$48	78205	96857	75439	$\bar{2}$88	13898	69695	76576	$\bar{4}$2	$\bar{3}$98	56146	45481	77082	57
58	7824271	1269255	6096702	$\bar{1}$02	266	86723	1800479	72755	478	22397	73284	73499	160	696	66989	50021	75215	58
59	9360596	1946744	2930775	$\bar{1}$52	0	8460276	1789295	0066882	0	8397288	1762748	0067258	117	60	8340225	1738863	0069525	59
60	8963576	2452961	3692872	126	$\bar{2}$8	52960	86216	62282	$\bar{5}$1	91145	60183	63123	$\bar{1}$14	$\bar{8}$1	32245	35560	62595	60
61	8799251	2628802	3957597	147	$\bar{3}$1	49914	84937	59720	$\bar{6}$6	86677	58318	60423	$\bar{1}$20	$\bar{1}$00	29558	34439	63046	61
62	6426945	6333654	4310364	$\bar{2}$2	$\bar{4}$	8434269	1778400	0029763	$\bar{1}$14	8371368	1751973	0029976	10	214	8313637	1727891	0030515	62
63	6398857	6124582	4641563	40	20	37854	79916	27454	$\bar{1}$62	74885	53448	27783	$\bar{3}$7	307	16724	29177	28394	63
64	6351136	5856260	5036594	$\bar{4}$0	$\bar{3}$2	40049	80845	24801	$\bar{1}$29	77414	54511	25250	$\bar{4}$2	$\bar{2}$77	20158	30609	25900	64
65	6288366	5572702	5422310	37	41	45441	83124	22705	$\bar{1}$09	82475	56634	23057	$\bar{6}$8	$\bar{2}$48	24715	32508	23589	65
66	6220035	5308917	5755570	$\bar{5}$6	$\bar{3}$8	49744	84943	21402	$\bar{8}$9	87125	58585	21801	$\bar{8}$1	$\bar{1}$92	29820	34635	22240	66
67	6148220	5061583	6048121	$\bar{1}$03	$\bar{4}$7	52302	86024	21076	96	90437	59974	21365	143	254	33335	36100	22053	67
68	3040553	8686034	3912531	$\bar{1}$61	114	8456444	1787717	0052678	238	8393815	1761333	0053195	128	365	8339355	1738545	0055133	68
69	2660520	8630597	4293540	$\bar{1}$88	104	63920	90883	51074	$\bar{2}$21	8403161	65260	52279	173	$\bar{3}$67	45720	41204	53568	69
70	2018894	8484541	4892514	320	$\bar{1}$13	76724	96289	57502	$\bar{1}$61	14800	70137	58192	$\bar{2}$45	$\bar{3}$84	58504	46528	58922	70
71	1762626	8408845	5117085	$\bar{2}$98	$\bar{1}$12	81711	98397	59355	$\bar{1}$43	19750	72215	60046	$\bar{2}$30	$\bar{3}$21	63021	48411	60679	71
72	1609970	8359228	5247037	$\bar{3}$36	128	84292	99489	60392	139	21951	73138	61121	258	308	65230	49332	61518	72
73	$\bar{5}$231621	8199183	2324548	0	$\bar{3}$92	8558367	1830561	0152311	$\bar{4}$96	8495641	1803804	0154129	0	$\bar{5}$90	8438661	1779673	0155221	73
74	$\bar{5}$107806	8052678	3010768	13	150	60320	31416	49798	191	97234	04506	50872	$\bar{1}$2	230	40792	80594	52406	74
75	$\bar{4}$750688	7595067	4443639	$\bar{4}$4	$\bar{1}$79	63072	32655	41360	$\bar{2}$33	99901	05698	42829	25	$\bar{2}$36	45455	82610	45917	75
76	$\bar{4}$560540	7340225	5032154	60	210	62974	32628	39228	276	99348	05483	40052	$\bar{5}$1	331	42797	81512	42691	76
77	4098031	6702625	6187162	125	319	63012	32699	31154	420	8500880	06182	33044	$\bar{8}$5	510	45448	82690	34088	77
78	$\bar{7}$844208	5329999	3171671	34	$\bar{4}$55	8568772	1835030	0150552	$\bar{5}$72	8505307	1807931	0151745	$\bar{6}$0	$\bar{6}$88	8448736	1783950	0152092	78
79	$\bar{7}$576441	5419722	3636505	9	$\bar{3}$24	70640	35834	50030	411	08052	09100	51428	40	$\bar{5}$25	51913	85291	52265	79
80	$\bar{7}$232788	5504735	4169493	0	160	75701	38007	49605	206	11064	10386	50852	10	244	52894	85715	51030	80
81	$\bar{6}$873599	5565338	4666976	12	138	73392	37026	48300	175	12456	10995	48646	0	$\bar{2}$50	56211	87132	49143	81
82	$\bar{6}$572181	5598187	5046459	$\bar{2}$0	77	80540	40104	46674	$\bar{9}$7	16816	12861	47382	0	$\bar{1}$17	60343	88884	48521	82
83	$\bar{6}$450630	5607405	5190992	26	106	72922	36841	46180	108	12608	11065	47980	$\bar{8}$	242	55844	86977	49094	83
84	$\bar{6}$336381	5614134	5322759	30	107	81051	40327	46123	140	15092	12128	47152	0	167	57966	87886	47456	84
85	$\bar{5}$782404	5622979	5911506	51	100	74355	37480	42721	81	10123	10028	45215	$\bar{2}$9	96	57568	87729	45902	85

Leere Seite
Blank page
Page vide

gativ und haben in der Gesamtheit zumeist die geringsten Absolutwerte. Die Umrechnung liess sich leicht durchführen. Die q^2-Kurven wurden in grossem Masstab aufgetragen (eine Einheit der vierten Dezimale = 1 mm; 1^0 = 4 mm). Die Korrektur der Winkel ergibt sich aus Tab. 10 als Differenz der Fortpflanzungsrichtung χ von grün I und jener χ-Werte, die den zu ändernden q^2-Grössen entsprechen. In den zugehörigen q^2-Punkten wird die Tangente an die Kurve gezogen, die q^2-Änderung pro 5^0 entnommen und daraus der Reduktionsbetrag berechnet. Dieser beträgt maximal 7 Einheiten der fünften Dezimale, meistens liegt er aber unter drei Einheiten und ist oft sehr klein. In jedem Fall ist er kleiner als die vermutliche Unsicherheit der gemessenen q^2-Werte. Das Vorzeichen wird aus dem steigenden oder sinkenden Kurvenverlauf entnommen.

Die so erhaltenen Korrekturwerte sind in Tab. 11 — zugleich mit den nunmehr für alle Farben übereinstimmenden Richtungscosinus ψ_1, ψ_2, ψ_3 — zusammengestellt. k_1 bedeutet die Korrektur an q_1^2, k_2 die an q_2^2. Da sich die Korrekturen auf die Richtung von grün I beziehen, wird für diese Farbe k_1 immer null und ist darum nicht aufgenommen.

Werden nun die errechneten k_1- und k_2-Werte zu den in Tab. 10 aufgeführten q^2-Grössen hinzugezählt (unter Berücksichtigung des Vorzeichens, das, wenn negativ, in Tab. 11 je über die erste Ziffer von k_1 und k_2 gesetzt ist), so finden sich leicht die Summen, Produkte und Differenzen der beiden Geschwindigkeitsquadrate einer Fortpflanzungsrichtung. Diese sind in Tab. 11 — entsprechend Anm. 6 S. 216 als $q_1^2 + q_2^2$, $q_1^2 \cdot q_2^2$, $q_1^2 - q_2^2$ für die verschiedenen Farben aufgeführt. Es ist also wohl zu beachten, dass, trotz der unveränderten Bezeichnungsart, q^2 in Tab. 10 und Tab. 11 nicht genau das Gleiche bedeutet.

Um die Tab. 10 und 11 etwas leserlicher zu gestalten, sind bei den Kolonnen der Geschwindigkeitsquadrate und ihrer Funktionen die beiden ersten Dezimalen nicht ständig wiederholt. Sie haben also an irgend einer Stelle jenen Wert, welcher in der fraglichen Kolonne irgendwo zuvor notiert wurde.

Beim aufmerksamen Durchgehen der Kolonnen für $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$ stellt man mit Leichtigkeit in der vierten Dezimale verschiedene Unregelmässigkeiten fest. In den Kolonnen für $q_1^2 - q_2^2$ machen sie sich im allgemeinen erst in der fünften Dezimale geltend. Wegen der hohen Genauigkeit der Differenzen $q_1^2 - q_2^2$ wäre es verlockend, die optischen Konstanten einzig auf Grund der „Doppelbrechung“

zu finden. Leider ist das nicht angängig, weil das entsprechende Gleichungssystem (S. 222) nicht linear unabhängig ist.

Mit $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$ lässt sich Gl. 8 zerlegen und auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen. Es ist nämlich:

$$L_{11}\psi_1^2 + L_{22}\psi_2^2 + L_{33}\psi_3^2 + 2L_{12}\psi_1\psi_2 + 2L_{23}\psi_2\psi_3 + 2L_{31}\psi_3\psi_1 = q_1^2 + q_2^2 \quad (9a)$$

und

$$P_{11}\psi_1^2 + P_{22}\psi_2^2 + P_{33}\psi_3^2 + 2P_{12}\psi_1\psi_2 + 2P_{23}\psi_2\psi_3 + 2P_{31}\psi_3\psi_1 = q_1^2 \cdot q_2^2 \quad (9b)$$

L_{ik} und P_{ik} sind die Unbekannten. Für die Fälle 1—54 der Tab. 11, wo überall $\psi_3 = 0$ ist, vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$L_{11} + (L_{22} - L_{11})\sin^2\psi_1 + 2L_{12}\sin\psi_1\cos\psi_1 = q_1^2 + q_2^2 \quad (10a)$$

$$P_{11} + (P_{22} - P_{11})\sin^2\psi_1 + 2P_{12}\sin\psi_1\cos\psi_1 = q_1^2 \cdot q_2^2 \quad (10b)$$

Zur Berechnung der sechs Konstanten dieser zwei Gleichungen diente das reichhaltige Zahlenmaterial der Tab. 11, L. 1—54. Es kam das Gauss'sche Ausgleichungsverfahren zur Verwendung. L. 7, 8, 9 und 38—46 wurden aber weggelassen, weil an diesen Stellen der Kurvenverlauf zu unsicher schien. Die gefundenen L_{ik} und P_{ik} sind in Tab. 12 zusammengestellt.

Tabelle 12

Die Konstanten der Wellennormalengleichung

	Gelb	Grün	Violett		Gelb	Grün	Violett
L_{11}	0,8499032	0,8435957	0,8376225	P_{11}	0,1805649	0,1778945	0,1753838
L_{22}	0,8500219	0,8437971	0,8382644	P_{22}	0,1806038	0,1779670	0,1756395
L_{33}	0,8576741	0,8505318	0,8459574	P_{33}	0,1838634	0,1808136	0,1788698
L_{12}	$\bar{0}$,0061659	$\bar{0}$,0063608	$\bar{0}$,0063696	P_{12}	$\bar{0}$,0025886	$\bar{0}$,0026509	$\bar{0}$,0026360
L_{23}	$\bar{0}$,0018452	$\bar{0}$,0015432	$\bar{0}$,0018865	P_{23}	$\bar{0}$,0007712	$\bar{0}$,0006372	$\bar{0}$,0007767
L_{31}	$\bar{0}$,0034518	$\bar{0}$,0032024	$\bar{0}$,0032858	P_{31}	$\bar{0}$,0014673	$\bar{0}$,0013510	$\bar{0}$,0013752

Durch diese L_{ik} und P_{ik} lassen sich alle a_{ik} bestimmen — leider nicht eindeutig. Schon Brill (Lit. 1) hat diese Vieldeutigkeit aufgezeigt. Eindeutige Beziehungen ergeben sich, sobald Fortpflanzungsrichtungen schief zur c-Achse berücksichtigt werden. Hierfür gelten die Gleichungen 9. Schon aus 9 a lassen sich die a_{ik} vollständig bestimmen. Trotzdem schien es angezeigt, auch 9 b mitzuberücksichtigen. Wiederum wurde nach dem Gauss'schen Ausgleichungsverfahren vorgegangen. Dabei wurden jedoch die bereits errechneten Werte L_{11}, L_{22}, L_{12}, P_{11}, P_{22}, P_{12}, die sich auf zwei Drittel aller Beobachtungen stützen, als richtig angenommen und in 9 a bezw. 9 b eingesetzt, sodass nur je ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten zu lösen war. Auf diese Weise wurden aus den 31 Angabenreihen

für die zur c-Achse schiefen Richtungen (L. 55—85 der Tab. 11) die ebenfalls in Tab. 12 aufgenommenen Grössen L_{33}, L_{23}, L_{31}, P_{33}, P_{23}, P_{31} bestimmt.

Nach 7a lassen sich die a_{ik} aus den L_{ik} sehr leicht finden. Aber auch die P_{ik} eignen sich für diese Berechnung. Aus der zweiten Reihe von 7b kommt nämlich:

$$a_{11} = \frac{a_{31}a_{12} - P_{23}}{a_{23}} \qquad a_{22} = \frac{a_{12}a_{23} - P_{31}}{a_{31}} \qquad a_{33} = \frac{a_{23}a_{31} - P_{12}}{a_{12}} \tag{11}$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke in die erste Reihe von 7b führt nach einigen Umformungen auf das symmetrische Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} P_{11}a_{31}a_{12} + P_{12}a_{12}a_{23} + P_{13}a_{23}a_{31} &= P_{31}P_{12} \\ P_{12}a_{31}a_{12} + P_{22}a_{12}a_{23} + P_{23}a_{23}a_{31} &= P_{12}P_{23} \\ P_{13}a_{31}a_{12} + P_{23}a_{12}a_{23} + P_{33}a_{23}a_{31} &= P_{23}P_{31} \end{aligned} \tag{12}$$

Da die P_{ik} bekannt sind, lassen sich die Produkte $a_{31}a_{12}$, $a_{12}a_{23}$, $a_{23}a_{31}$ eindeutig finden. Nun werden diese zu zweien multipliziert und durch das dritte dividiert. Es ergeben sich so a_{12}^2, a_{23}^2, a_{31}^2, also auch die Absolutwerte a_{12}, a_{23}, a_{31}. Die Vorzeichen dieser drei a_{ik} sind durch die Gl. 11 eindeutig bestimmt, da a_{11}, a_{22} und a_{33} notwendig positive Grössen sind. So werden schliesslich alle sechs Polarisationskonstanten erhalten. Sie sind mit den vorher aus L_{ik} errechneten in Tab. 13 aufgenommen. Die Übereinstimmung beider ist z. T. recht gut. Den weiteren Rechnungen wurden die Mittelwerte (Tab. 14) zugrunde gelegt.

Tabelle 13

Die zu L_{ik} und P_{ik} gehörigen Polarisationskonstanten a_{ik}

	Gelb		Grün		Violett	
	aus L_{ik}	aus P_{ik}	aus L_{ik}	aus P_{ik}	aus L_{ik}	aus P_{ik}
a_{11}	0,4288964	0,4288477	0,4253666	0,4252933	0,4232997	0,4233044
a_{22}	0,4287777	0,4288233	0,4251652	0,4252379	0,4226578	0,4226503
a_{33}	0,4211255	0,4211687	0,4184305	0,4184902	0,4149647	0,4149483
a_{12}	0,0061659	0,0061612	0,0063608	0,0063461	0,0063696	0,0063674
a_{23}	0,0018452	0,0018477	0,0015432	0,0015460	0,0018865	0,0018841
a_{31}	0,0034518	0,0034481	0,0032024	0,0032000	0,0032808	0,0032820

Tabelle 14

Aus Tab. 13 errechnete Mittelwerte der a_{ik}

	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{12}	a_{23}	a_{31}
Gelb	0,4288720	0,4288005	0,4211471	0,0061635	0,0018465	0,0034500
Grün	0,4253300	0,4252016	0,4184604	0,0063535	0,0015446	0,0032012
Violett	0,4233020	0,4226540	0,4149565	0,0063685	0,0018853	0,0032814

Eine Rückberechnung der q_1^2 und q_2^2 aus den a_{ik} in verschiedenen Richtungen zeigt, dass gegenüber den Messwerten noch erhebliche Abweichungen bestehen, die besonders stark in der Differenz der Lichtgeschwindigkeitsquadrate zur Geltung kommen. Es wurde darum versucht, die a_{ik} auf Grund der Differenzen $q_1^2 - q_2^2$, die ja bedeutend genauer sind als $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$, endgültig zu verbessern. Aus der Normalenfläche (Gl. 6) lässt sich für $(q_1^2 - q_2^2)^2$ der nicht gerade einfache Ausdruck 13 herleiten, falls

$$\cos\psi \equiv \psi \quad \text{und} \quad \sin\psi \equiv \Psi$$

gesetzt wird.

$$\begin{aligned}(q_1^2-q_2^2)^2 = {} & a_{11}^2\Psi_1^4 + a_{22}^2\Psi_2^4 + a_{33}^2\Psi_3^4 \\ & + 4a_{12}^2\Psi_1^2\Psi_2^2 + 4a_{23}^2\Psi_2^2\Psi_3^2 + 4a_{31}^2\Psi_3^2\Psi_1^2 \\ & + 2a_{22}a_{33}(\psi_2^2\psi_3^2-\psi_1^2) + 2a_{33}a_{11}(\psi_3^2\psi_1^2-\psi_2^2) + 2a_{11}a_{22}(\psi_1^2\psi_2^2-\psi_3^2) \\ & - 4a_{12}a_{11}\psi_1\psi_2\Psi_1^2 - 4a_{12}a_{22}\psi_1\psi_2\Psi_2^2 + 4a_{12}a_{33}\psi_1\psi_2(1+\psi_3^2) \\ & - 4a_{23}a_{22}\psi_2\psi_3\Psi_2^2 - 4a_{23}a_{33}\psi_2\psi_3\Psi_3^2 + 4a_{23}a_{11}\psi_2\psi_3(1+\psi_1^2) \\ & - 4a_{31}a_{33}\psi_3\psi_1\Psi_3^2 - 4a_{31}a_{11}\psi_3\psi_1\Psi_1^2 + 4a_{31}a_{22}\psi_3\psi_1(1+\psi_2^2) \\ & - 8a_{12}a_{23}\psi_3\psi_1\Psi_2^2 - 8a_{23}a_{31}\psi_1\psi_2\Psi_3^2 - 8a_{31}a_{12}\psi_2\psi_3\Psi_1^2\end{aligned} \tag{13}$$

Die errechneten a_{ik} seien mit den Fehlern α_{ik} behaftet. Es ist also der wahre Wert $a_{ik} = a_{ik}$-berechnet $+ \alpha_{ik}$. Im Hinblick auf Tab. 13 scheint es zum vorneherein wahrscheinlich, dass die α_{ik} höchstens die vierte Dezimale der a_{ik} beeinflussen. Unter dieser Voraussetzung ist es ein Leichtes, bei Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung Gl. 13 linear zu machen. Sie nimmt dann die Gestalt an:

$$\Sigma k_{ik}\alpha_{ik} = (q_1^2 - q_2^2)^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma k_{ik}a_{ik}, \tag{14}$$

worin

$$\begin{aligned}k_{11} = {} & 2a_{11}\Psi_1^4 + 2a_{22}(\psi_1^2\psi_2^2-\psi_3^2) + 2a_{33}(\psi_3^2\psi_1^2-\psi_2^2) \\ & - 4a_{31}\psi_3\psi_1\Psi_1^2 - 4a_{12}\psi_1\psi_2\Psi_1^2 + 4a_{23}\psi_2\psi_3(1+\psi_1^2) \\ k_{22} = {} & 2a_{22}\Psi_2^4 + 2a_{33}(\psi_2^2\psi_3^2-\psi_1^2) + 2a_{11}(\psi_1^2\psi_2^2-\psi_3^2) \\ & - 4a_{12}\psi_1\psi_2\Psi_2^2 - 4a_{23}\psi_2\psi_3\Psi_2^2 + 4a_{31}\psi_3\psi_1(1+\psi_2^2) \\ k_{33} = {} & 2a_{33}\Psi_3^4 + 2a_{11}(\psi_3^2\psi_1^2-\psi_2^2) + 2a_{22}(\psi_2^2\psi_3^2-\psi_1^2) \\ & - 4a_{23}\psi_2\psi_3\Psi_3^2 - 4a_{31}\psi_3\psi_1\Psi_3^2 + 4a_{12}\psi_1\psi_2(1+\psi_3^2) \\ k_{12} = {} & 4a_{33}\psi_1\psi_2(1+\psi_3^2) - 4a_{11}\psi_1\psi_2\Psi_1^2 - 4a_{22}\psi_1\psi_2\Psi_2^2 \\ & + 8a_{12}\Psi_1^2\Psi_2^2 - 8a_{23}\psi_3\psi_1\Psi_2^2 - 8a_{31}\psi_2\psi_3\Psi_1^2 \\ k_{23} = {} & 4a_{11}\psi_2\psi_3(1+\psi_1^2) - 4a_{22}\psi_2\psi_3\Psi_2^2 - 4a_{33}\psi_2\psi_3\Psi_3^2 \\ & + 8a_{23}\Psi_2^2\Psi_3^2 - 8a_{31}\psi_1\psi_2\Psi_3^2 - 8a_{12}\psi_3\psi_1\Psi_2^2 \\ k_{31} = {} & 4a_{22}\psi_3\psi_1(1+\psi_2^2) - 4a_{33}\psi_3\psi_1\Psi_3^2 - 4a_{11}\psi_3\psi_1\Psi_1^2 \\ & + 8a_{31}\Psi_3^2\Psi_1^2 - 8a_{12}\psi_2\psi_3\Psi_1^2 - 8a_{23}\psi_1\psi_2\Psi_3^2\end{aligned}$$

In mühsamer Arbeit wurden für sämtliche 85 Richtungspaare die k_{ik} berechnet — sie vereinfachen sich wesentlich, wenn $\psi_3 = 0$, $\Psi_3^2 = 1$ ist — und die der Fehlergleichung 14 entsprechenden numerischen Ausdrücke berechnet. Mit ihnen wurde nach dem Gauss'schen Verfahren für jede Farbe das symmetrische Gleichungssystem mit den sechs Unbekannten α_{ik} aufgestellt. Als Beispiel sei das für violettes Licht gefundene hergesetzt:

α_{11}	α_{22}	α_{33}	α_{12}	α_{23}	α_{31}	$A \cdot 10^{-3}$ (rechts)	
0,797750	0,348880	$\bar{1}$,146636	1,077318	1,097798	0,604190	0,579244	
	1,137816	$\bar{1}$,486695	1,023963	1,158186	0,674601	0,530390	
		2,633336	$\bar{2}$,101280	$\bar{2}$,255990	$\bar{1}$,278791	$\bar{1}$,109640	(15)
			2,488908	2,276527	0,857895	0,724809	
				2,592681	0,659471	0,800366	
					1,083456	0,674776	

System 15 ist nicht lösbar, weil $k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^2 \equiv 0$. Diese Beziehung kann am Beispiel leicht nachgeprüft, aber auch allgemein bewiesen werden. Um ein lösbares Gleichungssystem zu erhalten, wurden zu den 85 Fehlergleichungen noch 9 weitere hinzugenommen, die sich durch Berücksichtigung möglichst zuverlässiger Punkte des oberen Kurvenzweiges von Fig. 3 ergeben. Gewählt wurden L. 1, 6, 9, 22, 29, das Mittel aus 32, 33, 34 (= senkrechter Einfall auf m), 36, 43 und 51. Da $\psi_3 = 0$, vereinfacht sich für diese Punkte Gl. 6. Wird wiederum wie vorhin die an a_{ik} anzubringende Änderung α_{ik} genannt, so folgt unter Voraussetzung kleiner Korrekturen die Fehlergleichung

$$\Sigma\, k'_{ik}\, \alpha_{ik} = C$$

Darin ist:

$$k'_{11} = (q^2 - a_{33})\, \Psi^2 \qquad k'_{12} = 2(a_{33} - q^2)\, \psi\, \Psi$$

$$k'_{22} = (q^2 - a_{33})\, \psi^2 \qquad k'_{23} = 2a_{23}\, \psi^2 - 2a_{31}\, \psi\, \Psi$$

$$k'_{33} = q^2 - a_{22}\, \psi^2 - a_{11}\, \Psi^2 + 2a_{12}\, \psi\, \Psi \qquad k'_{31} = 2a_{31}\, \Psi^2 - 2a_{23}\, \psi\, \Psi$$

Die neuen Fehlergleichungen ergeben mit den 85 früheren ein symmetrisches Gleichungssystem, dessen Koeffizienten linear unabhängig sind. Als Beleg sei wieder das für violettes Licht mitgeteilt.

α_{11}	α_{22}	α_{33}	α_{12}	α_{23}	α_{31}	$A \cdot 10^{3}$ (rechts)	
0,823524	0,358460	$\bar{1}$,142746	1,092145	1,103458	0,621690	0,587158	
	1,177430	$\bar{1}$,483126	1,048873	1,177685	0,682215	0,541591	
		2,634134	$\bar{2}$,098808	$\bar{2}$,254279	$\bar{1}$,276035	$\bar{1}$,107351	(16)
			2,527229	2,291756	0,869214	0,729399	
				2,602834	0,663860	0,805141	
					1,095569	0,680901	

Ein Vergleich der Systeme 15 und 16 zeigt, dass die einzelnen Koeffizienten durch Hinzunahme der neuen Gleichungen nicht wesentlich beeinflusst wurden. Der Hauptanteil der Korrekturen rührt also wohl noch von $q_1^2 - q_2^2$ her.

Die Auflösung der drei Systeme von der Art 16 liefert die α_{ik} für alle verwendeten Wellenlängen. Diese Werte sind in Tab. 15 zusammengestellt. Dass sie nicht alle Fehlergleichungen einzeln erfüllen, ist selbstverständlich; sie bewirken nur, dass die Summe aller Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten $(q_1^2 - q_2^2)^2$-Werten den kleinsten Betrag annimmt.

Tabelle 15

Korrekturen der a_{ik}-Mittelwerte

	α_{11}	α_{22}	α_{33}	α_{12}	α_{23}	α_{31}
Gelb	0,0007512	$\bar{0}$,0000440	$\bar{0}$,0002917	$\bar{0}$,0001352	0,0001311	$\bar{0}$,0000389
Grün	0,0016275	0,0006916	$\bar{0}$,0008955	$\bar{0}$,0003224	0,0002285	0,0000973
Violett	0,0006202	0,0001742	$\bar{0}$,0002783	$\bar{0}$,0002109	$\bar{0}$,0001051	0,0000680

An Hand der Tab. 15 lassen sich bedeutungsvolle Feststellungen machen.

a) Die α_{ik} sind, wie vorausgesetzt und erwartet, kleine Werte, die mit Ausnahme von α_{11}-grün die 4. Dezimale nie überschreiten. Gegen die Grundlagen des Systems 16 sind also keine ernsthaften Einwendungen zu machen. Immerhin lassen die verhältnismässig grossen Korrekturen für grün vermuten, dass die daraus gewonnenen Schlusswerte nicht so sicher sind, wie die der andern Farben.

b) Die grössten Korrekturen sind bei allen Farben an a_{11} anzubringen. α_{11} hat überhaupt den wesentlichsten Anteil an der Fehlerquadratsumme. Es war also offenbar verfehlt, die aus L. 1—54 gewonnenen zwei Konstantentripel L_{ik} und P_{ik} unbesehen einzusetzen, als die beiden andern Konstantentripel aus den Daten L. 55—85 errechnet wurden.

c) Die Summe der Fehlerquadrate ist für violettes Licht am kleinsten. Dies überrascht zunächst, da die gelben und grünen Punkte sich einer kontinuierlichen Kurve viel besser anpassen als die violetten. Wahrscheinlich sind beim Einstellen der gelben und grünen Spektrallinien gewisse systematische Fehler unterlaufen, wogegen die bei den violetten Linien gemachten Fehler ganz zufälliger Art sind, bedingt durch die geringere Empfindlichkeit des Auges für diese Farbe. Aus diesem Grunde wurden diese Fehler schon bei der Bestimmung der L^i_k und P_{ik} relativ gut ausgeglichen, und es mussten die a_{ik} aus $(q_1^2 - q_2^2)^2$ nicht mehr so stark verbessert werden wie

für gelb und grün, wiewohl auch für violett jene Differenz bedeutend genauer ist, als die einzelnen q^2.

Tabelle 16

Die endgültigen Werte der Polarisationskonstanten

	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{12}	a_{23}	a_{31}
Gelb	0,4296232	0,4287565	0,4208554	0,0060283	0,0019776	0,0034111
Grün	0,4269575	0,4258932	0,4175649	0,0060311	0,0017731	0,0032985
Violett	0,4239222	0,4228282	0,4146782	0,0061576	0,0017802	0,0033494

Mit Hilfe der α_{ik} lassen sich aus den a_{ik} der Tab. 14 die endgültigen Polarisationskonstanten bestimmen. Sie sind in Tab. 16 zusammengestellt.

Tabelle 17

Unterschied der beobachteten $(q_1^2 - q_2^2)$-Werte (I) gegenüber den aus den unkorrigierten (II) und korrigierten (III) a_{ik}-Werten errechneten (in Einheiten der 6. Dezimalen)

		Gelb		Grün		Violett	
L	J	I-II	I-III	I-II	I-III	I-II	I-III
1	44	660	- 68	1802	-289	873	493
6	37	670	- 62	1832	-163	641	- 18
9	41	553	18	1674	-152	57	-330
22	13	301	- 36	1529	- 75	303	97
29	53	436	116	1831	204	228	26
32/34	⊥	309	- 29	1523	-179	164	- 69
36	4	308	-108	1322	-201	333	- 89
43	59	591	73	1718	-530	627	235
51	52	547	- 34	634	-136	784	-233
58	84	-375	27	- 62	-165	26	- 16
61	79	50	33	880	- 82	629	175
64	86	- 72	12	- 92	-288	209	141
67	88	-483	100	-1106	55	70	360
68	78	921	- 97	2427	-390	794	15
71	74	1023	- 81	2097	-303	576	- 82
76	67	813	39	1590	-167	419	164
79	72	496	- 4	1408	- 12	159	86
82	62	511	- 35	1302	-124	51	40
Mittel		507	54	1379	195	386	148

Um einen Einblick in die erzielte Genauigkeit der Verbesserungen zu bekommen, wurde für eine Reihe von Fortpflanzungsrichtungen die Differenz $q_1^2 - q_2^2$ sowohl aus den unkorrigierten (II) wie aus den korrigierten (III) a_{ik} zurückberechnet und von der „gemessenen" Differenz (I) subtrahiert. Die erhaltenen Werte sind in

Einheiten der sechsten Dezimale in Tab. 17 zusammengestellt. Drei Dinge fallen sofort auf: a) Die Kleinheit der Unterschiede I/III-gelb; sie beweist die Güte der Verbesserungen. b) Die relative Grösse von I/II-grün und I/III-grün; die Zahlen I/III erhärten die Bedenken, die S. 224 gegen die Zuverlässigkeit selbst der korrigierten a_{ik}-grün geäussert wurden. c) Die schwankende Grösse von I/III-violett. Sie erklärt sich aus der schwierigen Wahrnehmbarkeit der violetten Linien. Wenn auch bei grün wie bei violett zwei Differenzen I/III grösser sind, als die entsprechenden Differenzen I/II, so bleibt doch I/III im Mittel weit hinter I/II zurück (ersteres ist durchschnittlich ein Sechstel von letzterem). Die Ausgleichung mittels der $q_1^2 - q_2^2$ brachte also eine wirkliche Verbesserung der Polarisationskonstanten.

Es wäre interessant gewesen, in System 15 oder 16 auch die Schwingungsrichtung einzelner Flächen zur Korrektur der a_{ik} heranzuziehen. Einige Vorversuche zeigten aber, dass es ohne besondere Hilfsmittel nicht möglich ist, die Schwingungsrichtungen so genau zu bestimmen, dass dadurch eine wirkliche Verbesserung der Polarisationskonstanten erzielt würde. Immerhin schien sich mit ihrer Hilfe eine Möglichkeit zu bieten, die a_{ik} unabhängig von den bis dahin ausgeführten Messungen und Berechnungen einigermassen zu kontrollieren. Zu diesem Zwecke wurden sechs Kriställchen verwendet, bei denen zum mindesten je ein Pinakoid so gut entwickelt war, dass es die Schwingungsrichtungen zu bestimmen erlaubte.

Tabelle 18

Bestimmung der Schwingungsrichtungen einer Cu-Vitriolplatte

	c-Achse	Dunkel	Dunkel	c-Achse	Dunkel	Dunkel
1. Messung	229,4°	243,5°	334,1°	49,1°	64,4°	153,9°
2. Messung	229,3	243,8	334,6	49,4	65,1	153,7
3. Messung	229,5	243,5	334,8	49,2	64,8	153,9
Mittel	229,40	243,60	334,50	49,23	64,77	153,33
Reduktion der Winkel	229,40	243,60	244,50	229,23	244,77	243,83

Gesamtmittel	c-Achse	229,32°
	Dunkel	244,18
		14,86
	Korrektur	−1,29
Auslöschungsschiefe		13,57 ∼ 13,6°

Da beim Mikroskop Fadenkreuz und Nicolshauptschnitte nicht genau parallel waren, musste es zuerst geeicht werden. Dafür eigneten sich die Kupfervitriolkriställchen in hervorragender Weise. Die zur c-Achse parallele Kante ist meistens sehr scharf ausgebildet;

die Fläche (110) lässt sich auch recht genau auf Dunkel stellen. Indem dies für die Vorder- und Rückseite des Kristalls getan wurde, fand sich, dass das Fadenkreuz gegenüber den Nicolshauptschnitten um 1,29° nach rechts zu drehen war. Tab. 18 zeigt an einem beliebig gewählten Beispiel aus dem Journal (Kristall Nr. 37), wie für die Bestimmung der Schwingungsrichtungen vorgegangen wurde. Als Lichtquelle diente eine Zeiss'sche Quecksilbermikroskopierlampe. Ein Gelbfilter (A) lieferte homogenes Licht von der Wellenlänge [7]) $\lambda = 5791$ Å. Auf diese Art wurden an allen sechs Kriställchen sorgfältige Messungen gemacht. Über die Einzelheiten und Mittel orientiert Tab. 19.

Tabelle 19

Die Auslöschungsrichtungen verschiedener Flächen des Cu-Vitriols

Kristall Nr.	Obere Fläche	Bezugskante	Auslöschungsschiefe	Mittel
37	110	001	13,6°	
46	110	001	13,1	
46	$\bar{1}\bar{1}0$	001	- 13,2	
46	$\bar{1}\bar{1}0$	001	- 13,6	
47	110	001	13,3	
50	110	001	12,9	13,29°
50	$\bar{1}\bar{1}0$	001	- 13,7	
51	110	001	13,1	
51	110	001	13,1	
51	$\bar{1}\bar{1}0$	001	- 13,3	
47	$1\bar{1}0$	001	14,5	
47	$1\bar{1}0$	001	14,6	14,5°
47	$\bar{1}10$	001	- 14,5	
51	$1\bar{1}0$	001	14,6	
50	$0\bar{1}0$	001	24,8	25,0°
50	$0\bar{1}0$	001	25,2	
49	$0\bar{2}\bar{1}$	100	71,0	
49	$0\bar{2}\bar{1}$	100	70,0	70,5°
49	$0\bar{2}\bar{1}$	100	70,4	

Der Zusammenhang zwischen Polarisationskonstanten und Schwingungsrichtungen ergibt sich in einfachster Art aus der Indikatrix (Gl. 1). Für die Fläche (110), die senkrecht zur x-Achse steht, ist

$$\varrho^2 (a_{22} \cos^2 \varphi + a_{33} \sin^2 \varphi + 2 a_{23} \sin \varphi \cos \varphi) = 1$$

[7]) Der Unterschied gegenüber der Wellenlänge von He-gelb spielt wegen der geringen Dispersion der Schwingungsrichtungen keine Rolle. Tatsächlich ergaben Messungen mit dem Grünfilter ($\lambda = 5461$ Å) keine zuverlässig bestimmbaren Abweichungen.

die Gleichung der Schnittellipse, und die Lage ihrer Hauptachsen (d. h. die der gesuchten Schwingungsrichtungen) findet sich zu

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,a_{23}}{a_{22} - a_{33}}$$

Hier ist φ von der $+$ c-Achse aus im Gegenzeigersinn genommen.

Die Schwingungsrichtungen der andern Flächen aus der c-Achsenzone werden durch eine Achsentransformation erhalten, bei der die ξ-Achse auf der betreffenden Fläche senkrecht steht, die ζ-Achse mit der c-Achse zusammenfällt und die η-Achse durch das Rechtssystem gegeben ist. Wird das transformierte Ellipsoid durch die Ebene $\xi = 0$ geschnitten, so folgt für die Schwingungsrichtungen die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,(a_{23}\cos\alpha + a_{31}\sin\alpha)}{a_{11}\sin^2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha + 2\,a_{12}\sin\alpha\cos\alpha - a_{33}}$$

α ist hierin $56^0\,58'\,11''$ für die Fläche $(1\bar{1}0)$ und $-53^0\,7'\,26''$ für (010).

Die Fläche (021) verlangt eine Transformation allgemeinster Art. Wiederum ist ξ die Flächennormale. Da die Auslöschungsrichtung gegenüber der kristallographischen a-Achse gemessen wurde, empfiehlt es sich, η hiermit zusammenfallen zu lassen; ζ ist damit bestimmt und fällt in die Ebene des Zonenkreises [021 : 010]. Es wird (Koeffizienten etwas gekürzt):

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{3846\,a_{11} - 7887\,a_{22} + 4041\,a_{33} + 7628\,a_{12} + 3711\,a_{23} - 11890\,a_{31}}{5201\,a_{11} - 1453\,a_{22} - 3748\,a_{33} - 12219\,a_{12} + 12768\,a_{23} - 1110\,a_{31}}$$

Tab. 20 enthält die gemessenen und berechneten Schwingungsrichtungen. Letztere sind sowohl für die korrigierten wie nicht korrigierten a_{ik} angegeben. Es zeigt sich im allgemeinen eine vorzügliche Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung, sofern dieser die korrigierten a_{ik} zugrunde gelegt werden. Einzig (021) macht eine Ausnahme. Doch dürfte gerade hier die Messung nicht sehr genau sein, da das untersuchte Pinakoid nicht besonders gut ausgebildet war. Leider fand sich kein passenderes Individuum; denn Kristalle, an denen die (021) Flächen gross genug sind, um senkrecht auffallendes Licht ungestört durchzulassen, finden sich überhaupt recht selten. Wie günstig sich übrigens die Korrekturen α_{ik} auf die Polarisationskonstanten ausgewirkt haben, ergibt sich einwandfrei aus den Zahlen der letzten Kolonne von Tab. 20.

Tabelle 20

Die gemessenen und berechneten Schwingungsrichtungen

Fläche	Anzahl d. Kr.	Bezugs-kante	Lage der Schwingungsrichtungen gemessen	berechnet aus a_{ik} korrig.	a_{ik} nicht korr.
110	5	001	13,29°	13,29°	12,88°
$1\bar{1}0$	2	001	14,5	14,66	15,16
010	1	001	−25,0	−24,57	−30,83
021	1	100	19,5	20,72	17,02

Es erübrigt noch die Bestimmung der Indikatrixhauptachsen nach Länge und Richtung. Die Quadrate der Längen werden aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} = 0$$

erhalten. Schon WEBER (Lit. 11) hat auf die Eigenart dieser Gleichung und die erforderliche Genauigkeit der Rechnung hingewiesen. Bei vollständiger Ausmultiplikation hat der Koeffizient von x^2 sieben Dezimalstellen, der von x schon 14 und das Absolutglied sogar 21. Eine Vereinfachung dieser Zahlen, insbesondere die Abkürzung auf durchwegs gleichviele Dezimalstellen, kann nicht nur zu ungenauen, sondern u. U. zu widersinnigen x-Werten führen. Im gegebenen Falle wurde die Gleichung nach dem Annäherungsverfahren gelöst. Es zeigt sich dabei, dass wenn die Wurzeln bis auf ungefähr eine Einheit der achten Dezimale genau gerechnet werden, die Gleichung bis auf die 12. Dezimale erfüllt ist. Tabelle 21 enthält die gefundenen Werte, d. h. die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten (a^2, b^2, c^2) samt ihren Differenzen wie auch die sogenannten Hauptbrechungsindizes (n_α, n_β, n_γ) mit ihren Unterschieden. Aus dem Vergleich der Variationen ergibt sich von neuem, dass die Werte für grünes Licht weniger genau sind als die andern. Der Hauptfehler liegt wahrscheinlich bei b^2 bezw. n_β; die beiden angegebenen Zahlen sind offenbar etwas zu gross (b^2) bezw. zu klein (n_β).

Die Richtungscosinus der Hauptachsen, bezogen auf das Achsenkreuz x, y, z, sind durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= 0 \\ a_{12}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta + a_{23}\gamma &= 0 \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + (a_{33}-\lambda)\gamma &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}$$

bestimmt. Darin bezeichnet λ das in Frage stehende Hauptlichtgeschwindigkeitsquadrat. Die Winkel, welche die Hauptschwingungsrichtungen n_α, n_β, n_γ mit x, y, z bilden, sind in Tab. 22 zusammengestellt. Da die Orientierungsunterschiede äusserst gering sind, wurde als Charakteristikum des Kupfervitriols noch das Mittel dieser Winkel angegeben. Es entspricht den in Fig. 6 angedeuteten Lagen.

Tabelle 21

Die Hauptlichtgeschwindigkeitsquadrate und Hauptbrechungsindizes des Cu-Vitriols

	Gelb (5876 Å)	Grün (5016 Å)	Violett (4471 Å)
a^2	0,4362005	0,4333198	0,4304178
$a^2 - b^2$	0,0128492	0,0127435	0,0129917
b^2	0,4233513	0,4205763	0,4174261
$b^2 - c^2$	0,0036680	0,0040567	0,0038414
c^2	0,4196833	0,4165196	0,4135847
$a^2 - c^2$	0,0165172	0,0168002	0,0168331
n_α	1,514108	1,519133	1,524245
$n_\beta - n_\alpha$	0,022806	0,022843	0,023539
n_β	1,536914	1,541976	1,547784
$n_\gamma - n_\beta$	0,006702	0,007491	0,007171
n_γ	1,543616	1,549467	1,554955
$n_\gamma - n_\alpha$	0,029508	0,030334	0,030710

Tabelle 22

Orientierung der Indikatrix für Cu-Vitriol

		x	y	z
Gelb	n_α	43°52 ′	49°33 2/3′	75°53 1/6′
	n_β	127 25 1/6	40 27 1/6	103 9
	n_γ	109 27 1/2	89 5 1/2	19 29
Grün	n_α	43 10 1/2	49 45 1/3	76 58 1/2
	n_β	127 29 2/3	40 16 1/6	102 33 5/6
	n_γ	108 12 1/2	88 46 1/3	18 15 1/6
Violett	n_α	43 10 5/6	49 49 1/2	76 48 2/3
	n_β	126 55 2/3	40 15 1/6	103 45 1/2
	n_γ	109 7 1/3	87 54 5/6	19 14 2/3
Mittel	n_α	43 24 4/9	49 42 5/6	76 33 4/9
	n_β	127 16 5/6	40 19 1/2	103 9 4/9
	n_γ	108 55 7/9	88 35 5/9	18 59 11/18

Für den Winkel der optischen Achsen, die in Fig. 6 ebenfalls vermerkt sind, wurden folgende Werte berechnet

	Gelb	Grün	Violett
2V	56°13 2/3′	58°52′	57°4 1/3′

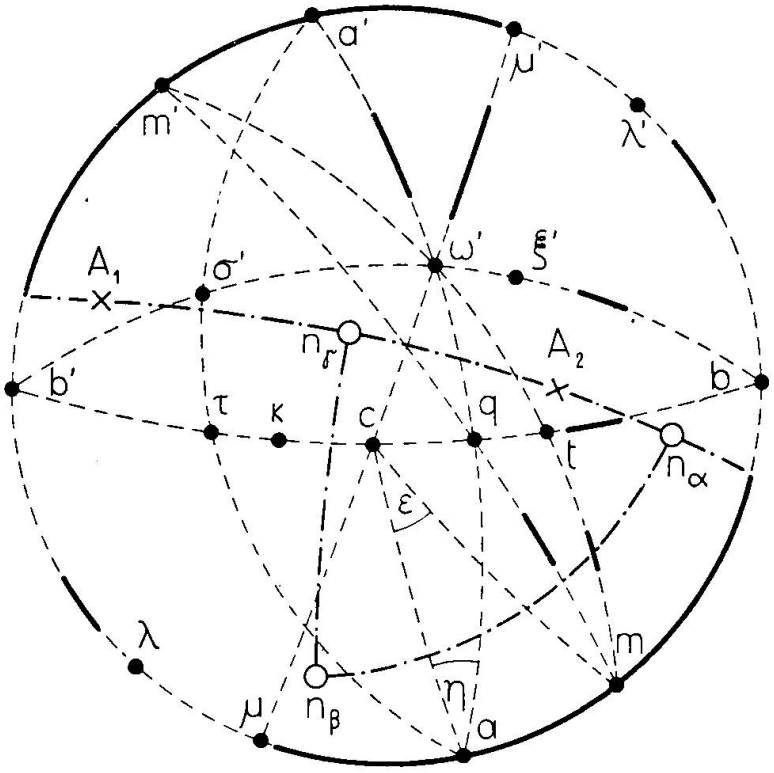


Fig. 6. Die Flächen des Kupfervitriols und die Lage der Indikatrix (n_α, n_β, n_γ) sowie der optischen Achsen (A_1, A_2). Die fettgezogenen Zonenstücke bestimmen die Lage der erfassten Fortpflanzungsrichtungen.

Tabelle 23

Zusammenstellung der von den verschiedenen Autoren gefundenen Hauptbrechungsindizes des Cu-Vitriols

		n_α	n_β	n_γ	$n_\beta - n_\alpha$	$n_\gamma - n_\beta$	$n_\gamma - n_\alpha$
Gelb	Pape	1,51564	1,53940	1,54639	0,02376	0,00699	0,03075
	Kohlrausch	1,5140	1,5368	1,5433	0,0228	0,0065	0,0293
	Lavenir	1,51408	1,53684	1,54345	0,02276	0,00661	0,02937
	Weber	1,51203	1,53806	1,54314	0,02603	0,00508	0,03111
	Schwietring	1,51449	1,53790	1,54312	0,02341	0,00522	0,02863
	Mäder	1,51411	1,53691	1,54362	0,02280	0,00671	0,02951
Grün	Weber	1,5193	1,5448	1,5494	0,0255	0,0046	0,0301
	Mäder	1,51913	1,54198	1,54947	0,02285	0,00749	0,03034
Violett	Mäder	1,52425	1,54778	1,55496	0,02353	0,00718	0,03071

Abschliessend sind in Tab. 23 die von den verschiedenen Autoren gefundenen Hauptbrechungsindizes des Kupfervitriols somt ihren Differenzen angegeben. Beim Vergleich der Zahlen fällt sofort auf

a) dass mit der vorliegenden Arbeit zum ersten Mal der Versuch gelungen ist, die Abhängigkeit der Lichtbrechung von der

Wellenlänge mit einer gewissen Zuverlässigkeit und Vollständigkeit zu prüfen,

b) dass sich die neu gewonnenen Werte für gelbes Licht ausgezeichnet den von KOHLRAUSCH und LAVENIR durch Totalreflexion gefundenen Konstanten einfügen. Die Übereinstimmung wirkt noch überzeugender, wenn berücksichtigt wird, dass die Neubestimmungen mittels He-Licht gemacht wurden, für die älteren Werte aber Na-Licht verwendet wurde. Einiges Befremden bewirkt der Umstand, dass SCHWIETRINGS sorgfältige Messungen (Totalreflexion, Lit. 10) zu ziemlich abweichenden Zahlen führten,

c) dass hinsichtlich Doppelbrechung auffallende Unterschiede zwischen verschiedenen Autoren bestehen. Der Gedanke WEBERS, die Brechungsindizes auf Grund der Doppelbrechung zu verbessern, gewinnt hieraus vermehrte Bedeutung.

Dem Verfasser ist es eine besondere Freude, gezeigt zu haben, dass die Prismenmethode auch im allgemeinsten Fall (triklines System und unbekannte optische Orintierung) zu wertvollen Resultaten führt, sofern die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen des Raums bestimmt und überdies die zugehörige Doppelbrechung in geeigneter Weise mitberücksichtigt wird.

Literaturverzeichnis

1. BRILL A., Math. Ann. 34 (1889) 297; München Sitzungsber. 13 (1883) 423.
2. GROTH P., Chemische Kristallographie II. Teil. Leipzig 1908.
3. KALB G., Die Bedeutung der Vizinalerscheinungen für die Kristallmessung. Zeitschr. f. Krist. 81, 342.
4. KOHLRAUSCH F., Über die Ermittlung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Totalreflexion. Pogg. Ann. der Phys. 1878, 1.
5. KUPFFER A. F., Über die Krystallisation des Kupfervitriols, nebst allgemeinen Betrachtungen über das ein- und eingliedrige oder tetartoprismatische System. Pogg. Ann. d. Phys. 1826, 61 u. 215.
6. LAVENIR M. A., Sur la détermination de l'orientation optique dans un cristal quelconque. Bull. soc. franç. min. 1891, 100.
7. NIGGLI P., Lehrbuch der Mineralogie. Leipzig 1924.
8. PAPE C., Bestimmung der optischen Constanten des Kupfervitriols. Pogg. Ann. d. Phys. 1874, 35 (Erg. Bd.).
9. POCKELS, Lehrbuch der Kristalloptik, Leipzig 1906.
10. SCHWIETRING FR., Die Methode der Totalreflexion für eine beliebig orientierte Kristallfläche. Zeitschr. f. Krist. **76**, 87.
11. WEBER L., Über die Prismenmethode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle ohne Absorptions- und Drehungsvermögen. Separatabdruck der Mitt. der Naturf. Gesellschaft in Freiburg (Schweiz), Bd. IV, 1921.

Eingegangen: August 1942.