

# Die Verzerrungen des Oktaeders

Autor(en): **Weber, Leonhard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen  
= Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie**

Band (Jahr): **28 (1948)**

Heft 1: **Festschrift P. Niggli zu seinem 60. Geburtstag den 26. Juni 1948**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23016>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Die Verzerrungen des Oktaeders

Von *Leonhard Weber*, Fribourg

Verzerrt heisst eine Form, wenn infolge gewisser Zufälligkeiten, z. B. richtungsbedingter Stoffzufuhr, die einzelnen Flächen verschieden weit vom Keimpunkt weg nach aussen gewachsen sind. Langsam wachsende Flächen erreichen im allgemeinen eine grössere Ausdehnung als die rascher wachsenden; diese können sogar gänzlich verschwinden. So erklärt es sich, dass flächenreiche Formen an den Kristallen oft nur mit einer einzigen Facette entwickelt sind. Tetraeder und Bisphenoid sind, wenn sie selbständig auftreten und den Kristall ringsum begrenzen, nie verzerrt. Auch von den Oktaederverzerrungen, die hier behandelt sind<sup>1)</sup>, wird vorausgesetzt, dass sie selbständige und geschlossene Formen seien; sie brauchen aber nicht acht Flächen zu haben.

Unter den verzerrten Oktaedern, die nicht mit voller Flächenzahl erscheinen, gibt es viele offene Gestalten: *Einflächner* (je eine einzige Oktaederfläche); *Zweiflächner* (nicht nur zwei parallele Flächen, sondern auch zwei kanten- oder eckenanstossende Flächen, d. h. Flächen, die am idealen Oktaeder eine Kante oder eine Ecke gemeinsam haben); *Dreiflächner* (jede trigyrische Flächengruppe oder eine beliebige Fläche mit zwei kantenanliegenden Flächen oder endlich zwei parallele Flächen mit einer kanten[= ecken-]anliegenden Fläche); *Vierflächner* (vier tetragyrisch verbundene Flächen, auch vier tautozonale Flächen oder eine beliebige Fläche und die drei kantenanliegenden Flächen, ferner zwei parallele Flächen, von denen die eine mit zwei andern je eine Kante oder Ecke gemeinsam hat oder schliesslich zwei parallele Flächen und zwei weitere, die unter sich und mit je einer der erstern kantenanstossend sind); *Fünfflächner* (vier tetragyrisch zusammengehörige Flächen mit einer beliebigen fünften Fläche oder vier tautozonale Flächen und irgend eine andere Fläche des Oktaeders); *Sechsfächner* (nur vier tautozonale Flächen, zusammen mit zwei andern, die am gleichen Ende des „rhombischen Prismas“ liegen).

Die flächenärmste als selbständige Kristallbegrenzung mögliche Oktaederverzerrung ist ein reguläres Tetraeder. Es darf unbeschadet der Allgemeingültigkeit nachstehender Ableitungen positiv gestellt werden (Fig. 1). Doch bleibt zu beachten, dass zu jedem weiterhin erhaltenen Polyeder auch das Spiegelbild nach 010 möglich ist. Allgemein stehen zwei derartige Gebilde im Verhältnis enantiomorpher

<sup>1)</sup> Vgl. Verhandl. der S. N. G., 1930, S. 303, und 1943, S. 106.

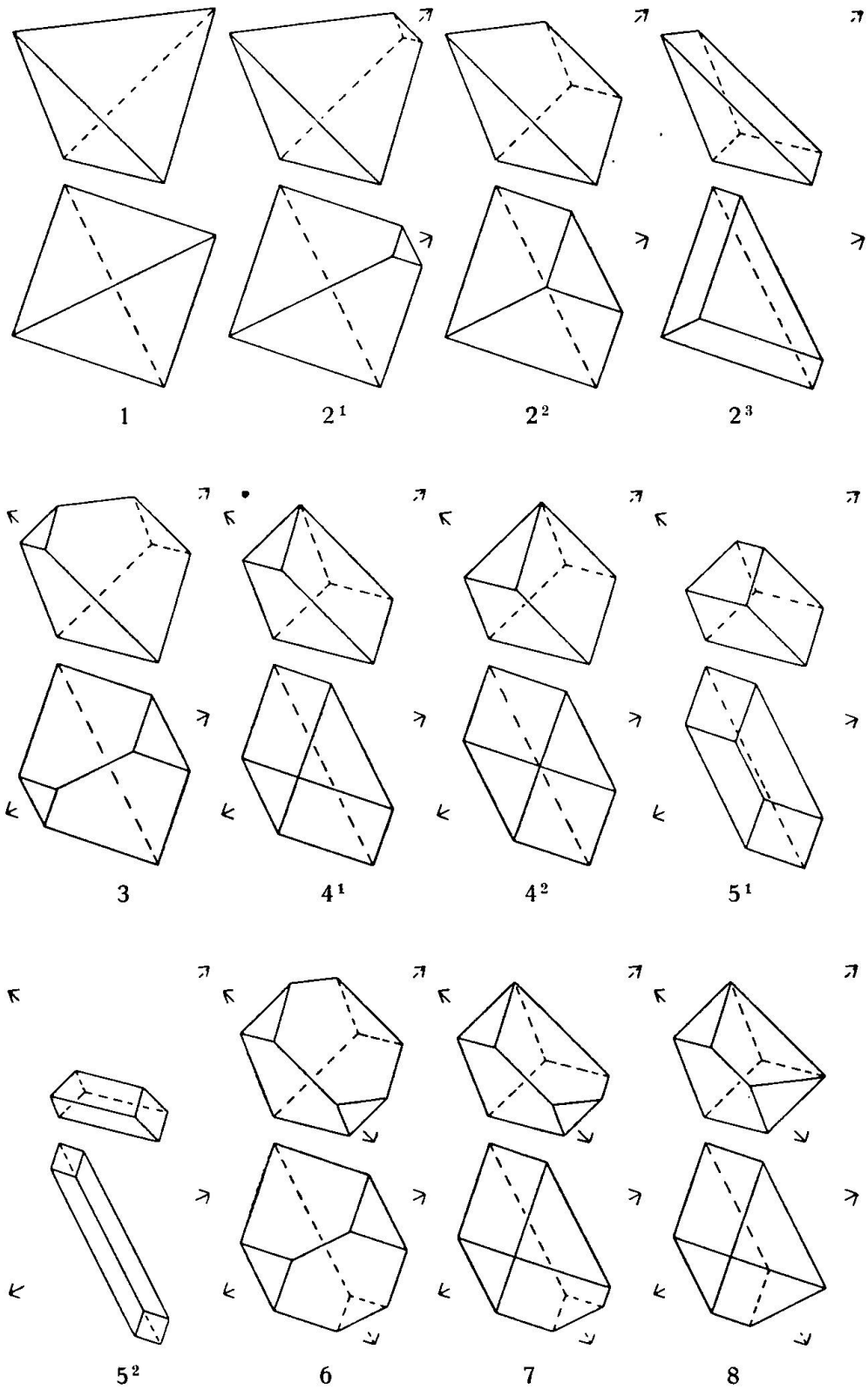


Fig. 1--8

Links- und Rechtsgestalten. Nur wenn die Flächengruppierung nach einer Ebene spiegelbildlich (z. B. Fig. 2, 5<sup>2</sup>, 9 usw.) oder durch das Symmetriezentrum ausgezeichnet ist (Fig. 16), kann durch eine reelle Bewegung das eine Polyeder in das andere übergeführt werden.

Am Ausgangstetraeder sollen nun der Reihe nach die vier Ecken durch Oktaederflächen ersetzt werden. Sehr anschaulich lässt sich das am Fluorit durch Spaltbarkeit durchführen. Als erste Abstumpfung sei  $\bar{1}11$  gewählt. Läge sie zufällig an einer andern Ecke, so kann sie immer durch entsprechende Umstellung des Polyeders in die Lage  $\bar{1}11$  gebracht werden. Die Abstumpfung selber verändert das Aussehen des gegebenen Tetraeders mehr oder weniger stark. Alle Übergänge vom unversehrten Tetraeder bis zur dreiseitigen Fläche  $1\bar{1}\bar{1}$  sind denkbar (Fig. 2<sup>1</sup>, 2<sup>2</sup>, 2<sup>3</sup>). Hierbei wird die Begrenzung von zwei gleichseitigen Dreiecken unterschiedlicher Grösse und drei kongruenten gleichschenkligen Trapezen gebildet. Der Flächeninhalt eines solchen Trapezes ist gleich der Grössendifferenz der beiden Dreiecke. Die sechs Polyederecken sind alle dreikantig.

Enthält die Oktaederverzerrung mehr als fünf Flächen, so werde als erste Abstumpfung (also  $\bar{1}11$ ) eine solche genommen — die Wahl kann mehrdeutig sein —, die möglichst nahe an die gegenüberliegende Fläche des Ausgangstetraeders herangerückt ist. Bezogen auf das Tetragyroidenkreuz des Tetraeders, dessen von  $111$  bestimmte Achsenabschnitte zur Einheit genommen sind, hat die erste Abstumpfung, d. h. die „fünfte“ Oktaederfläche, die Gleichung  $-x + y + z = a_5$ . Darin ist  $-1 < a_5 < 3$ .

Nun werde eine weitere Tetraederecke abgestumpft. Unter Wahrung aller bisherigen Festlegungen lässt sich der Körper so stellen, dass die neue (= „sechste“) Fläche — u. U. verschieden wählbar! — links oben liegt und die Gleichung  $x - y + z = a_6$  erhält. Das Variationsintervall von  $a_6$  ist dem von  $a_5$  gleich, nur gilt noch die Bedingung  $a_5 \leq a_6$ . Drei Fälle sind möglich: die  $a_5$ - und  $a_6$ -Fläche schneiden die obere Tetraederkante nicht ganz weg (Fig. 3;  $2 < a_5 + a_6 < 6$ ) oder haben mit ihr nur noch einen einzigen Punkt gemeinsam (= vierkantige Ecke; Fig. 4 mit  $a_5 + a_6 = 2$ ) oder treffen sich in einer Geraden, die tiefer als die besagte Kante liegt (Fig. 5;  $-2 < a_5 + a_6 < 2$ ). Als neue Oberflächenelemente erscheinen Parallelogramm (Fig. 4, 5) und Fünfeck (Fig. 3). Für  $a_5 = a_6$  werden die Parallelogramme zu Rhomben (Fig. 4<sup>2</sup>, 5<sup>2</sup>), ohne dass sich aber Kanten- und Eckenanzahl gegenüber 4<sup>1</sup> und 5<sup>1</sup> verändern. Von derartigen metrischen Gleichheiten ist in den spätern Figuren im allgemeinen Abstand genommen worden, sofern sie für die Ecken- und Kantenzahl belanglos sind.

Fig. 5<sup>2</sup> veranschaulicht übrigens einen jener Fälle, wo das Oktaeder nach einer (morphologisch nicht in die Erscheinung tretenden) Digyre gestreckt oder gar extrem stengelig ist. Von der ursprünglichen Tetraedermasse ist nicht mehr viel erhalten. Um trotzdem den Zusammenhang der herausgeschnittenen Polyeder mit der tetraedrigen Grundgestalt augenscheinlich zu machen, sind im „perspektivischen“ Bild wie auch in dem darunterstehenden „Kopfbild“ überall die abgetrennten Tetraederecken durch kurze Stücke der daselbst zusammenstossenden Tetraederkanten angedeutet. Die untere Tetraederkante ist meistens noch vorhanden und nur in Fig. 22 und Fig. F auf einen Punkt reduziert.

Völlig anders gestaltet sind die rhomboedrigen Sechsfächner, die sich im Zusammenhang mit den Siebenflächnern ergeben (Fig. 16).

Welche der noch freien Tetraederecken durch die „siebente“ Fläche abgestumpft werde, ist nicht mehr so bedeutungslos wie bei der „fünften“ und „sechsten“ Fläche. Denn die beiden Polyeder, die durch die eine oder andere Abstumpfung aus den Sechsfächnern gebildet werden, sind bei gleicher Stärke der Abstumpfung zueinander nach 110 spiegelbildlich, lassen sich aber durch keine wirkliche Bewegung ineinander überführen, wenn nicht wegen besonderer metrischen Gegebenheiten (z. B. Fig. 4<sup>2</sup>, 5<sup>2</sup>) auch 110 Spiegelebene ist. Diesem Umstand ist Rechnung zu tragen, wenn nunmehr der „siebenten“ Ebene die Gleichung  $x + y - z = a_7$  zugeschrieben wird. Die Konstante  $a_7$  gehört selbstverständlich dem bei  $a_5$  genannten Intervall an. Überdies unterliegt sie der Bedingung  $a_7 \geq a_6 \geq a_5$ . In Fig. 6 ist der allgemeine Fall  $a_7 > a_6 > a_5$  (mit den Nebenbedingungen  $a_5 + a_6 > 2$ ,  $a_6 + a_7 > 2$ ,  $a_7 + a_5 > 2$ ) dargestellt. Zu beachten, dass hier erstmals ein Sechseck als Polygon mit höchstmöglicher Eckenzahl auftritt. Die  $a_7$ -Fläche kann den getroffenen Vereinbarungen zufolge weder das  $a_5$ - noch das  $a_6$ -Dreieck „berühren“, bevor diese letzteren sich selber in einer vierkantigen Ecke treffen. So sind Fig. 7, 8 sofort verständlich. Es berührt aber  $a_7$  die  $a_6$ -Fläche selbst unter diesen engern Voraussetzungen noch nicht. Dazu ist weiter erforderlich, dass  $a_5 = a_6 = a_7 = 1$  (die Berührungspunkte sind auf den Tetraederkanten gelegen; Fig. 9).

Die siebenflächigen Figuren 6, 7, 8, 9 stehen in leicht erkennbarer Beziehung zu den Sechsfächnern 3, 4<sup>1</sup> und 4<sup>2</sup>. Zu mannigfaltigeren Siebenflächnern führt Fig. 5<sup>1</sup>. Hier kann 111 bei stetig abnehmendem  $a_7$ -Wert zunächst die beiden untern Tetraederflächen schneiden (Fig. 10), dann die  $a_5$ -Fläche berühren und 111 noch schneiden (Fig. 11), hernach diese und  $a_5$  zugleich schneiden (Fig. 13),

darauf  $a_6$  berühren und  $a_5$  schneiden (Fig. 14), weiterhin  $a_6$  und  $a_5$  schneiden (Fig. 15) und schliesslich 111 ganz zum Wegfall bringen (Fig. 16). Dadurch ist das Oktaeder zu einem rhomboedrischen Parallelepipiped geworden. Natürlich lässt sich das alles nicht an jedem beliebigen Oktaedersiebenflächner, etwa an Fig. 6, durchführen, sofern die Forderung  $a_7 > a_6 > a_5$  bestehen soll. In Fig. 14, wo  $a_6 = a_7 = 1$  ist, könnte die Abstumpfende  $a_7$  dem Koordinatenanfangspunkt nicht mehr näher rücken. Darum wurden in Fig. 15, 16 die Konstanten  $a_5, a_6$  wesentlich kleiner genommen. Die Bedingung, unter der 111 überhaupt verschwinden kann, ist leicht aufzustellen. Es muss der Eckpunkt 111,  $a_5, a_6$  mit den Koordinaten  $2x = 1 - a_5$ ,  $2y = 1 - a_6$ ,  $2z = a_5 + a_6$  auf der  $a_7$ -Ebene liegen. Somit kommt  $a_7 = 1 - a_5 - a_6$ . In Fig. 16 wurde  $a_5 = -1/2$ ,  $a_6 = 0$  angenommen. Es ist daher  $a_7 = 3/2$ . Alle gestellten Forderungen sind erfüllt. Werden am Parallelepipiped der Fig. 16 sämtliche Flächen kongruent, so wird es zu einem idealen Rhomboeder. Das stellt sich ein, wenn  $a_5 = a_6 = a_7 = 1/3$ . Alle siebenflächigen Figuren lassen sich grundsätzlich als Rhomboeder deuten, bei denen die obere trigyrische Ecke abgestumpft ist. Diese Rhomboeder sind aber zumeist verzerrt (vgl. Fig. 16) und haben ihre obere Spitze, auch wenn sie ideal sind, im Aussenraum der Fläche 111.

Der in Fig. 5<sup>2</sup> dargestellte Sonderfall eines Sechsfächners bringt die Verschiedenheiten der Figuren 11, 13, 14 zum Verschwinden und führt auf Fig. 12 mit zwei vierkantigen Ecken.

Damit sind alle oktaedrischen Siebenflächner erledigt.

Die achtflächigen Oktaederverzerrungen leiten sich am bequemsten aus den siebenflächigen ab, indem die letzte freie Tetraederecke durch  $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$  soweit wie möglich abgestumpft wird. Erlaubte Grenze für diese Abstufung ist die zu  $11\bar{1}$  symmetrische Lage von  $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ . Gerade diese wurde der Einfachheit halber in mehreren Figuren zur Darstellung gebracht (z. B. Fig. 24, 26, 30). Denn bei der notgedrungenen Kleinheit der meisten Zeichnungen steht oft nur ein geringer Spielraum für die Flächenlagen zur Verfügung, wenn anders der ausschlaggebende Unterschied der einzelnen Figuren irgendwie deutlich werden soll. Ein flüchtiger Blick auf die Figuren zeigt, dass den Siebenflächnern 6—15 folgende Achtflächner zugeordnet sind.

6 — 17	9 — 21, 22	13 — 23, 29, 30
7 — 18	10 — 24	14 — D, 33, E, F, G
8 — 19, 20	11 — 25, 26	15 — 31, 32, A, B, C
	12 — 27, 28	

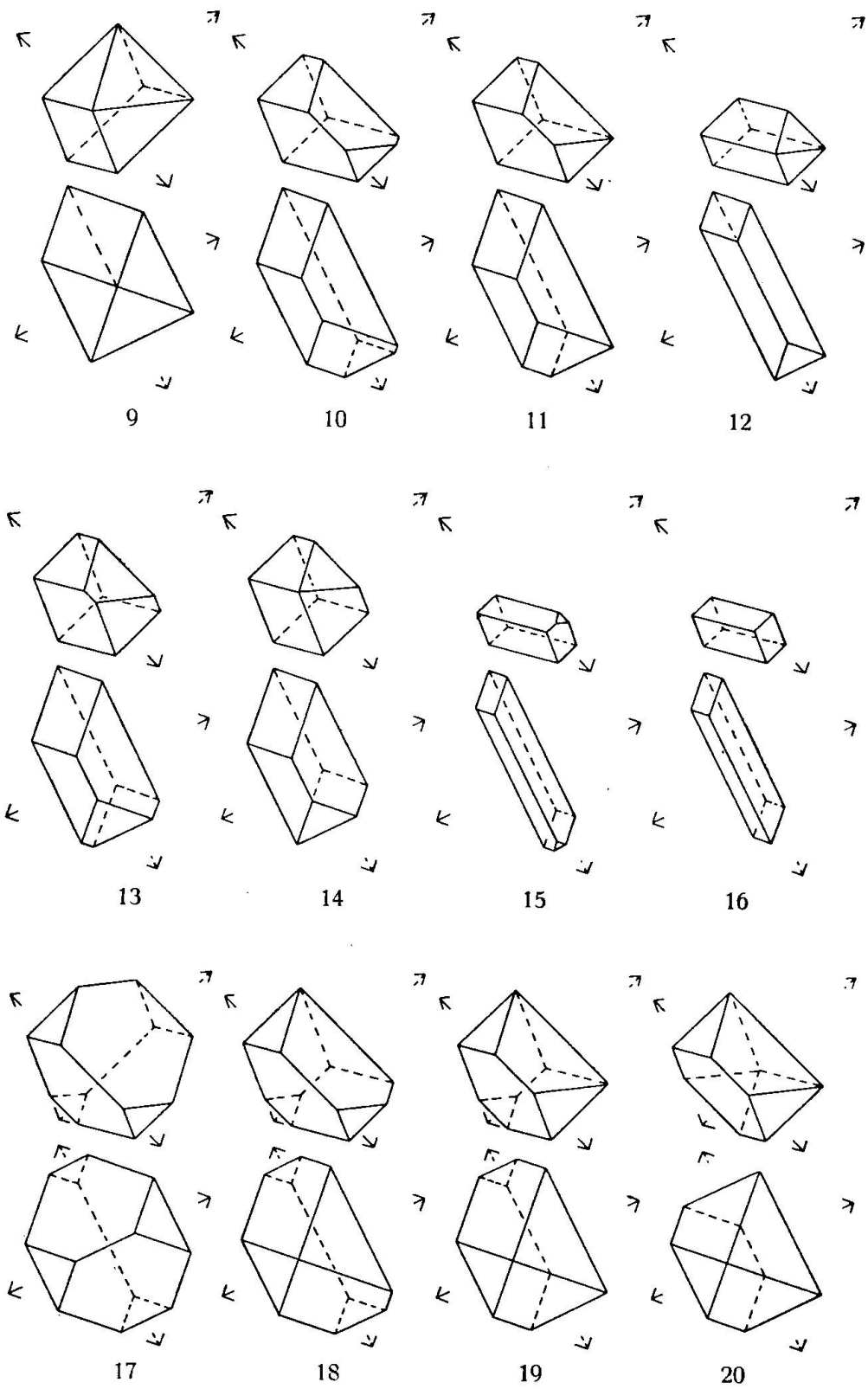


Fig. 9—20

Die übereinstimmende Behandlung von Fig. 16 führt sofort zum Spiegelbild von Fig. 15. Dieser Fall scheidet also aus.

Die achtflächigen Oktaeder, die sich leicht als zweiseitig enteckte Rhomboeder deuten lassen, unterscheiden sich von denen mit geringerer Flächenzahl wesentlich dadurch, dass die vier Abstumpfen  $a_5, a_6, a_7, a_8$  ebenfalls Tetraeder bilden. Es liegen also zwei gleichwertige, jedoch verschiedengestellte und im allgemeinen auch verschieden grosse Tetraeder vor. Jedes ist ebenso gut Ausgangs- wie Abstumpfungstetraeder. So kommt es, dass bei der planmässigen Abstumpfung der letzten freien Tetraederecke der gefundenen Siebenflächner mehrmals Polyeder erhalten werden, die einander gleichgebaut, aber nicht gleichgestellt sind. Folgende Übereinstimmungen sind festzuhalten:  $20 = F, G$  (Fig. G passt nicht in das Ableitungsschema herein; sie soll als Spezialfall von Fig. 20 einfach den extrem tafeligen Habitus veranschaulichen),  $23 = A, 24 = C, 25 = B, 29 = E, 32 = D$ .

Die Entdeckung des Ausgangstetraeders wurde bewusst nur soweit geführt, dass alle seine Flächen noch irgendwie erhalten blieben. In Fig. 16 ist 111 auf einen Punkt reduziert. Bei Einengung aller Tetraederflächen auf einen Punkt ( $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1/3$ ) schält sich aus dem Ausgangskörper ein negatives Tetraederchen heraus, dessen Kanten gerade noch ein Drittel der in Fig. 1 dargestellten messen.

Am verzerrten Oktaeder treten drei-, vier-, fünf- und sechsseitige Flächen auf. Alle lassen sich aus dem regelmässigen Sechseck durch Variation der Kantenlängen unter Festhaltung der Winkel herleiten. Die Dreiecke sind immer gleichseitig. Die Vierecke sind sowohl Parallelogramme (die zu Rhomben werden können) wie auch, und zwar häufiger, gleichschenklige Trapeze. Die Fünfecke sind höchstens monosymmetrisch. Dafür kann die Ausbildung der Sechsecke, die im allgemeinen asymmetrisch sind, mono-, di-, tri- und hexasymmetrisch oder bloss digyrisch sein. In einer Polyederecke stossen bald drei, bald vier — seltener! — Kanten zusammen. Über die verschiedenen Möglichkeiten orientiert beistehende Tabelle. Aus ihr ist sofort ersichtlich, dass die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten die Oktaedergestalt, selbst wenn von den Längenverhältnissen ganz abgesehen wird, nicht eindeutig bestimmt. Die Zahlengruppe 8—12—18 dieser Begrenzungselemente kommt z. B. fünfmal vor; andererseits fehlen gewisse Tripel wie 5—5—8, 6—6—10 (entsprechend einer vier- bzw. fünfseitigen Pyramide mit Grundfläche, die als Oktaederverzerrungen unmöglich sind). Unbekannt dürfte sein, dass die  $(4 + n)$ -Flächner maximal  $4 + 2n$  Ecken haben. An den



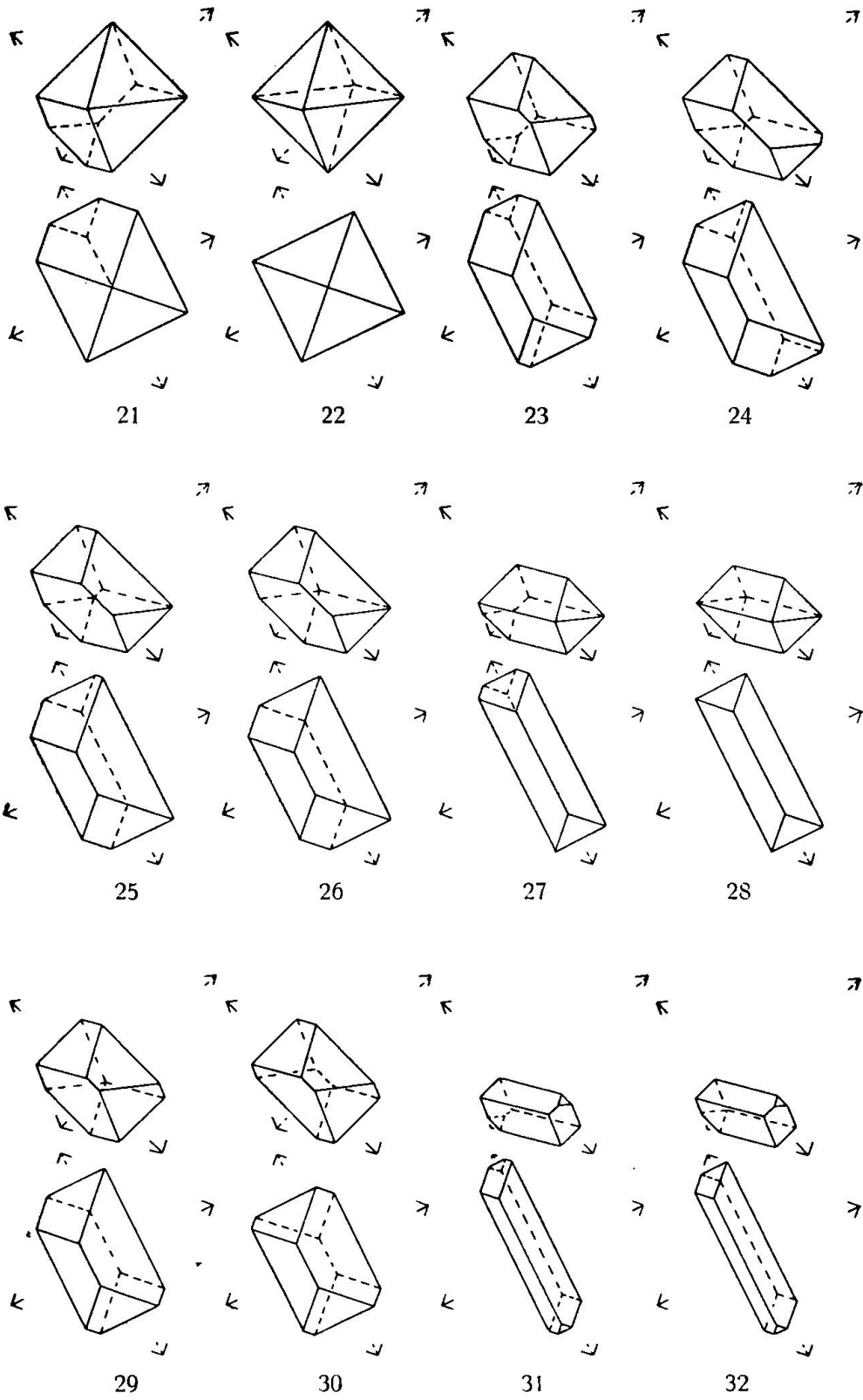


Fig. 21—32

achteckigen Oktaederverzerrungen treten, wie am idealen Oktaeder selber, keine Rhomben auf. Häufigstes Begrenzungselement ist das gleichseitige Dreieck; es fehlt nur an vier der 33 verschiedenen Verzerrungen.

*Die Flächen-, Ecken- und Kantenzahl der geschlossenen Oktaederverzerrungen*

Nr. der Figur	Zahl der Flächen					total	Zahl der Ecken		total	Zahl der Kanten
	3-Eck	Trap.	Parall.	5-Eck	6-Eck		3-kant.	4-kant.		
1	4	—	—	—	—	4	4	—	4	6
2	2	3	—	—	—	5	6	—	6	9
3	2	2	—	2	—	6	8	—	8	12
4	2	2	2	—	—	6	6	1	7	11
5	—	4	2	—	—	6	8	—	8	12
16	—	—	6	—	—	6	8	—	8	12
6	3	—	—	3	1	7	10	—	10	15
7	3	—	1	3	—	7	8	1	9	14
8	3	1	2	1	—	7	6	2	8	13
9	4	—	3	—	—	7	4	3	7	12
10	1	2	1	3	—	7	10	—	10	15
11	1	3	2	1	—	7	8	1	9	14
12	2	2	3	—	—	7	6	2	8	13
13	—	3	2	2	—	7	10	—	10	15
14	1	2	3	1	—	7	8	1	9	14
15	1	—	3	3	—	7	10	—	10	15
17	4	—	—	—	4	8	12	—	12	18
18	4	—	—	2	2	8	10	1	11	17
19	4	1	—	2	1	8	8	2	10	16
20, F, G	4	3	—	—	1	8	6	3	9	15
21	5	—	—	3	—	8	6	3	9	15
22	8	—	—	—	—	8	—	6	6	12
23, A	1	3	—	3	1	8	12	—	12	18
24, C	2	2	—	2	2	8	12	—	12	18
25, B	2	3	—	2	1	8	10	1	11	17
26	2	5	—	—	1	8	8	2	10	16
27	3	2	—	3	—	8	8	2	10	16
28	4	4	—	—	—	8	4	4	8	14
29, E	1	5	—	1	1	8	10	1	11	17
30	—	6	—	—	2	8	12	—	12	18
31	2	—	—	6	—	8	12	—	12	18
32, D	2	2	—	4	—	8	10	1	11	17
33	2	4	—	2	—	8	8	2	10	16

Durch Zahl und Art der entwickelten Flächen sind nicht nur Ecken- und Kantenzahl bestimmt, sondern es ist auch der drei- oder

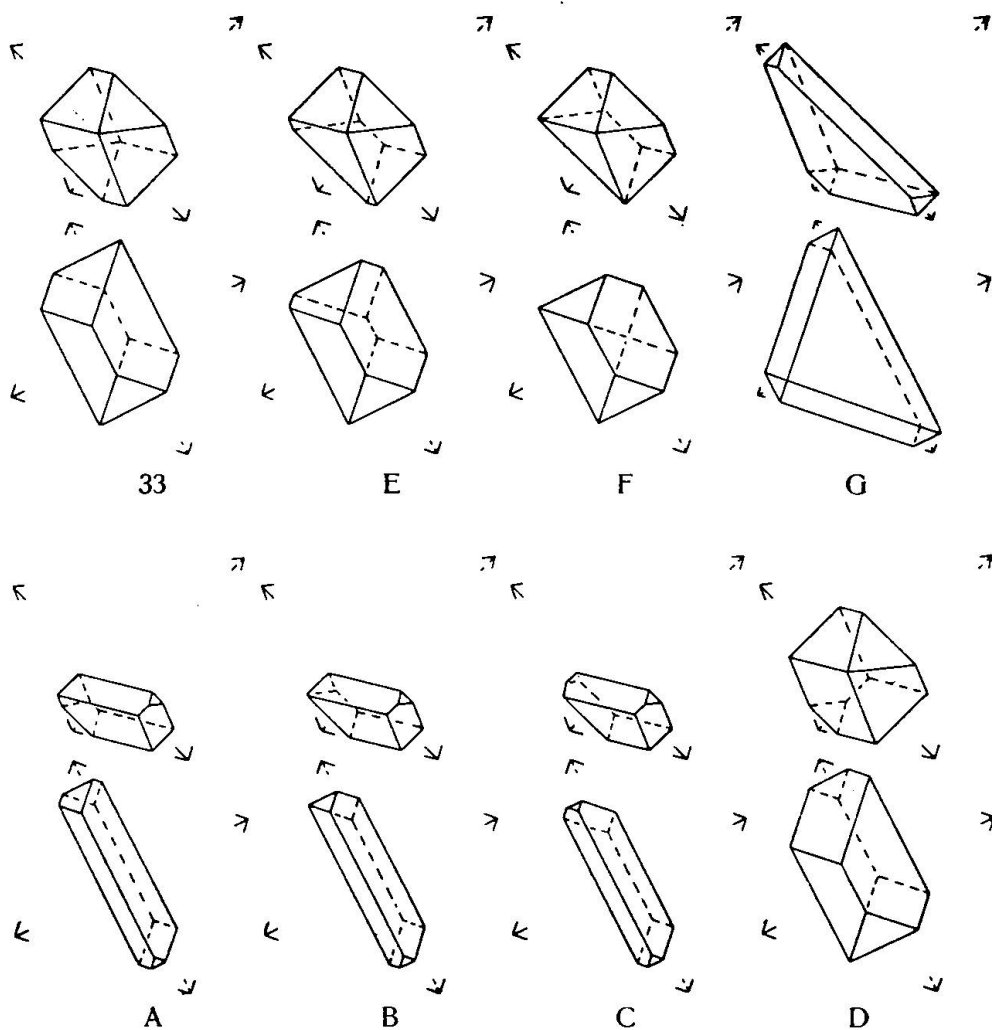


Fig. 33, A—G

vierkantige Charakter dieser Ecken festgelegt. Sei entsprechend der vorstehenden Tabelle  $v, w, x, y, z$  die Zahl der dreieckigen, trapezförmigen, parallelogrammatischen, fünf- und sechsseitigen Begrenzungsflächen, so ist

$$F = \text{Flächenzahl} = v + w + x + y + z$$

$$E = \text{Eckenzahl} = \frac{v + 2w + 2x + 3y + 4z + 4}{2}$$

$$U_3 = \text{Zahl der dreikantigen Ecken} = -v + y + 2z + 8$$

$$U_4 = \text{Zahl der vierkantigen Ecken} = \frac{3v + 2w + 2x + y - 12}{2}$$

$$K = \text{Kantenzahl} = \frac{3v + 4w + 4x + 5y + 6z}{2}$$

Der diesen Ausführungen zugrunde liegende Koordinatenanfangspunkt fällt mit dem Zentrum des Ausgangstetraeders zusammen. Mit dem sogen. Keimpunkt des Kristalls hat er im allgemeinen nichts zu tun. Da er in vielen Fällen ausserhalb des verzerrten Oktaeders liegt (z. B. Fig. 5<sup>2</sup>, 15, 16, 31, 32, G), so könnte er nur unter der Voraussetzung Keimpunkt sein, dass sich an der Gestaltung der wachsenden Kristallform aufbauende und abtragende Kräfte beteiligen (lokale Über- bzw. Untersättigung der Lösung). Ebenso stehen die Konstanten  $a_i$  ( $i = 5, 6, 7, 8$ ) mit den Flächenwachstumsgeschwindigkeiten in keiner unmittelbaren Beziehung. Keimpunkt und Flächenwachstumsgeschwindigkeit bestimmen natürlich die Endgestalt des Kristalls eindeutig. Einer gegebenen Kristallgestalt können aber unendlich viele Lagen des Keimpunktes zugeschrieben werden. Es wäre eine reizende Aufgabe, aus Keimpunkt und Wachstumsgeschwindigkeiten die Oktaederendform rechnerisch oder zeichnerisch zu finden. Sie würde aber nicht in den Rahmen dieser kleinen Arbeit passen und soll an anderer Stelle behandelt werden.

Eingegangen: 9. Dezember 1947.