

Zur Definition und Berechnung der optischen Orientierung von Plagioklasen

Autor(en): **Burri, Conrad**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen
= Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie**

Band (Jahr): **52 (1972)**

Heft 3

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40612>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zur Definition und Berechnung der optischen Orientierung von Plagioklasen

Von *Conrad Burri* (Zürich) *)

Mit 8 Figuren im Text

Zusammenfassung

Das Problem der Definition der optischen Orientierung der Plagioklasse wird unter besonderer Berücksichtigung seiner Lösung mit Hilfe der Euler-Winkel diskutiert. Ein vollständiges Schema zu deren Berechnung durch elementare Vektormethoden, welches auch die optischen Achsen berücksichtigt, wird gegeben. Die Methode wird am Beispiel des HT-Labradorites von Khuchiré (Iran) illustriert, für welchen die optische Orientierung bereits früher trigonometrisch berechnet wurde (diese Mitt. 48, 1968, 782–801). Es ergibt sich somit eine Vergleichsmöglichkeit der beiden Methoden.

English Summary

The problem of the Optical Orientation of the plagioclases is discussed, particular emphasis being laid on its solution by the method of the Eulerian Angles. A complete scheme for their calculation by elementary vector methods is given, which also includes the consideration of the optical axes. As an example the HT-labradorite of Khuchiré (Iran) is dealt with, the optical orientation of which has already been worked out by the usual trigonometrical methods. (This Bulletin 48, 1968, 781–801.) The reader is thus enabled to compare the two different methods of solving the problem.

Inhalt

I. Einleitung	498
II. Vektorielle Methodik zur Berechnung der optischen Orientierung von Plagioklasen	504
1. Die Ausgangsdaten und ihr Ausgleich	504
2. Die Berechnung der Euler-Winkel	506
a) Euler-Winkel I	506
b) Euler-Winkel II	508
c) Euler-Winkel III	508
d) Hilfswinkel	508
III. Beispiel	510
IV. Literatur	514

*) Institut für Kristallographie und Petrographie ETH, Sonneggstr. 5, CH-8006 Zürich.

I. EINLEITUNG

Unter der optischen Orientierung einer Kristallart versteht man definitionsgemäss die räumliche Lage ihrer optischen Indikatrix in bezug auf das morphologische Kristallgebäude. Dieses kann (L. WEBER, 1926) entweder durch das Flächennormalenbündel \mathfrak{F} oder durch das Zonenbündel \mathfrak{Z} dargestellt werden, wobei in beiden Fällen drei geeignete, nicht komplanare Richtungen als Achsen eines räumlichen Koordinatensystems zu wählen sind. Die beiden Systeme sind reziprok zu einander. Für welches man sich in einem bestimmten Falle entscheidet, hängt von den besonderen Gegebenheiten bzw. von der Problemstellung ab. In der klassischen, phänomenologischen Kristallographie überwiegt bekanntlich seit langem eine Betrachtungsweise, welche sich einseitig und sozusagen ausschliesslich auf das Zonenbündel \mathfrak{Z} stützt, obwohl sich für eine Reihe von Problemen unter Benützung des Flächennormalenbündels einfachere und elegantere Lösungen ergäben. Diese Situation ist historisch bedingt und ist eine Folge des überragenden Einflusses, welcher CHRISTIAN SAMUEL WEISS (1780–1856) auf die Entwicklung der Kristallographie ausübte. Erst die Strukturforschung stellte durch Einführung des reziproken Gitters (EWALD, 1921) wiederum ein gewisses Gleichgewicht für die kristallographische Betrachtungsweise her.

Bei höherer Symmetrie gelingt es die Bezugssysteme rechtwinklig zu wählen, während sie für die niedriger symmetrischen monoklinen und triklinen Kristalle notgedrungen schiefwinklig resultieren. Die Frage der optischen Orientierung ist jedoch gerade für sie von besonderem Interesse, weil durch die niedrige Symmetrie die Möglichkeit einer Lagendispersion der Indikatrix in Abhängigkeit von Temperatur, Wellenlänge und chemischer Zusammensetzung in Mischkristallreihen besteht. Dabei ist der letzterwähnte Fall von besonderer Wichtigkeit, denn er eröffnet bei quantitativer Kenntnis der gegenseitigen Lagebeziehungen die Möglichkeit einer Bestimmung der chemischen Zusammensetzung von Mischkristallen auf Grund rein optischer Untersuchungen. Das wichtigste Beispiel in dieser Hinsicht ist die mikroskopische Plagioklasbestimmung in Gesteinsdünnschliffen, wie sie ja für den Petrographen von grundlegender Bedeutung ist. Da jedoch für niedrigsymmetrische Kristalle, besonders für triklinen, das morphologische Bezugssystem, stütze es sich nun auf das Zonen- oder das Flächennormalenbündel, schiefwinklig ist, und sich zudem dessen Parameter in Mischkristallreihen in Abhängigkeit vom Chemismus ebenfalls ändern können, wie z. B. im Falle der Plagioklase, ergeben sich für die Definition der optischen Orientierung in bezug auf das Kristallgebäude erhebliche Schwierigkeiten. Glücklicherweise ergibt sich jedoch gerade für die so wichtigen triklinen Plagioklase (und für die triklinen Feldspate überhaupt) die Möglichkeit der Einführung eines rechtwinkligen Bezugssystems. Dessen Achsen entsprechen zwar, bezogen auf das konventionelle triklinen

kristallographische Achsenkreuz, z. T. irrationalen Richtungen, sie sind aber als Zwillingsachsen dreier häufig realisierter Zwillingsgesetze gut definiert und experimentell als solche auch gut feststellbar. Diese Achsen sind die folgenden (Fig. 1):

X-Achse: die Normale auf $[001]$ in der Fläche (010) , somit eine irrationale Kantennormale, welche als Zwillingsachse des Albit-Karlsbad-Komplexgesetzes (Roc-Tourné-Gesetz) bekannt ist.

Y-Achse: die Normale auf die Fläche (010) , welche in bezug auf das konventionelle \mathfrak{B} -System ebenfalls irrational ist, jedoch rational in bezug auf das \mathfrak{F} -System. Sie ist Zwillingsachse des häufigen Albit-Gesetzes.

Z-Achse: $[001]$, die konventionelle c -Achse, eine rationale Richtung in bezug auf das \mathfrak{B} -System, jedoch irrational im \mathfrak{F} -System. Sie ist Zwillingsachse des verbreiteten Karlsbad-Gesetzes.

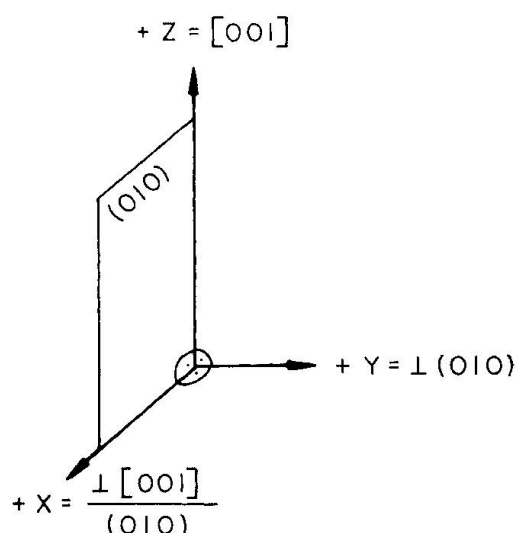


Fig. 1. Das rechtwinklige morphologische System XYZ . ($X = ZA$ des Albit-Karlsbad-Komplex- = Roc-Tourné-Gesetzes, $Y = ZA$ des Albit-Gesetzes, $Z = ZA$ des Karlsbad-Gesetzes.)

Das so definierte System ergibt sich auch fast zwangsläufig, wenn man die stereographische Projektion auf die (irrationale) Ebene $\perp c$ benutzt, wie dies schon durch FEDOROW, MICHEL-LÉVY u. a. geschah, während BECKE vielfach (010) als Projektionsebene vorzog. Das so definierte Achsenkreuz ist nun zwar rechtwinklig, es verstösst aber gegen das Prinzip, wonach als kristallographische Bezugsrichtungen ausschliesslich entweder Elemente des Flächennormalen- oder des Zonenbündels gewählt werden sollen. Es ist daher nicht homogen in seinem Aufbau und eignet sich nicht zur Definition (Indizierung) von Flächen oder Zonen. Es ist jedoch in hervorragendem Masse für die Definition der optischen Orientierung geeignet, wofür es schon früh durch MICHEL-LÉVY, FEDOROW, BECKE, NIKITIN u. a. verwendet wurde. Es ist immer dann ein-

deutig definiert, sobald mindestens zwei der drei obgenannten Zwillingsgesetze realisiert sind, da sich die dritte Achse immer als Normale zu der durch die beiden andern aufgespannten Ebene konstruieren lässt. Es eignet sich in hervorragendem Masse für U-Tischuntersuchungen, da sich die genannten Zwillingachsen mit grosser Genauigkeit einmessen bzw. konstruieren lassen.

Was nun die Definition der Lage der optischen Indikatrix in bezug auf das eben eingeführte System anbelangt, so wurde hierfür bis vor kurzem fast ausschliesslich die Lage der optischen Achsen in bezug auf das eben definierte System XYZ benutzt, wie dies von MICHEL-LÉVY und BECKE vorgeschlagen worden war. Hierzu wird um seinen Ursprung eine Lagenkugel geschlagen, auf welcher die Achsenausstichpunkte durch Kugelkoordinaten festgelegt werden. Ist zusätzlich noch der optische Charakter bekannt, so ist die Lage der Indikatrix durch die Angabe der Achsenpositionen vollständig und eindeutig definiert: die beiden Achsen bestimmen die Achsenebene, zu welcher die optische Normale normal steht, während die beiden Bisektrizen definitionsgemäss die Winkelhalbierenden der Achsen sind. Deren relativer Charakter folgt aus der Angabe des optischen Charakters. Die Positionen der drei Hauptschwingungsrichtungen lassen sich somit sphärisch-trigonometrisch berechnen und können in Kugelkoordinaten angegeben werden. Besonders einfach und anschaulich gestalten sich diese Beziehungen in vektorieller Betrachtung. Ordnet man den beiden optischen Achsen A und B zwei Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zu, so erhält man die beiden Bisektrizen als $\mathfrak{A}_0 \pm \mathfrak{B}_0$, während sich die optische Normale als Vektorprodukt $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ ergibt. Da man zur Festlegung der Achsenpositionen auf der Lagenkugel je zwei Koordinaten benötigt, braucht es somit zur Charakterisierung der Indikatrixlage durch diese Methode 4 Zahlenwerte, wozu noch die Angabe des optischen Charakters kommt.

Zur experimentellen Feststellung der optischen Orientierung von Plagioklassen nach dieser Methode benötigt man grössere, homogene und frische, gut ausgebildete Kristalle, welche die Anfertigung orientierter Präparate gestatten, an welchen die Achsenlagen nach den Methoden von BECKE oder WÜLFING konoskopisch ermittelt werden können. Solche sind jedoch, wie die Erfahrung zeigt, nur in beschränktem Masse erhältlich. Es drängen sich somit andere Methoden auf, wenn unsere Kenntnisse von der optischen Orientierung der Plagioklasse in Abhängigkeit von deren chemischen Zusammensetzung erweitert werden sollen. Dies ist jedoch, ganz abgesehen vom rein wissenschaftlichen Interesse, welches die Kenntnis der optischen Eigenschaften von Mischkristallreihen an sich bietet, auch deshalb sehr wünschenswert, weil sie die Unterlage für die für den Petrographen so wichtigen mikroskopischen Plagioklasbestimmungsmethoden darstellen.

Eine Methode, welche in dieser Hinsicht geradezu als prädestiniert erscheint, ist die Fedorow- oder U-Tischmethode. Sie liefert jedoch, im Gegensatz zu den konoskopischen Methoden, die Positionen der optischen Achsen nur ganz

ausnahmsweise mit einer Genauigkeit, welche für die Definition der Indikatrixlage ausreichend ist. Sehr oft können die optischen Achsen überhaupt nicht eingemessen werden, nämlich immer dann, wenn sie gegenüber der Schliiffnormale zu stark geneigt sind. In diesem Falle hilft oft die Messung des Achsenwinkels mit Hilfe einer indirekten Methode, z. B. derjenigen der «Charakteristischen Funktion der Doppelbrechung» von BEREK (BEREK 1924, RINNE-BEREK 1953). Da die Plagioklase jedoch niedrig doppelbrechend sind, muss, bei Verwendung von Dünnschliffen normaler Dicke, die Messung der Gangunterschiede gemäss den Vorschlägen von MOSEBACH (1948, 1949, 1949 a) vorgenommen werden. Hierzu benötigt man allerdings Beleuchtung mit homogenem Licht von einer gewissen Intensität, verbunden mit der Möglichkeit eines raschen Wechsels zwischen weissem und homogenem Licht. Dies stellt jedoch angesichts der heute zur Verfügung stehenden Interferenzfilter weiter kein Problem dar. Wenn auch die Einmessung der optischen Achsen mit Hilfe der U-Tischmethoden verschiedentlich Schwierigkeiten bereitet, so liefern diese dafür, im Gegensatz zu den konoskopischen Methoden von BECKE und WÜLFING, die Lage der optischen Symmetrieebenen und der Symmetrieachsen der Indikatrix (Hauptschwingungsrichtungen), welche normal dazu stehen bzw. sich als deren Schnittgeraden konstruieren lassen, mit relativ grosser Genauigkeit. Die heute üblichen U-Tischmethoden basieren deshalb auf der Einmessung der Symmetrieebenen der Indikatrix. Diese Operation steht am Ausgang aller U-Tischuntersuchungen. Historisch ist vielleicht von Interesse, dass auch FEDOROW mit seinem ersten U-Tischmodell, welches nur zwei Drehachsen aufwies, zuerst darauf ausging, die Positionen der optischen Achsen zu erfassen, um aus diesen nach dem w. o. geschilderten Verfahren die Lage der Indikatrix abzuleiten. Er tat dies, und zwar im parallelen Licht, indem er die erste Achse als Schnittpunkt einer Schar von Kurven gleicher Auslöschung bestimmte, während die zweite, wenn sie nicht auf gleiche Weise ermittelt werden konnte, aus der Auslöschungsschiefe des Präparates unter Verwendung der Position der ersten Achse mit Hilfe der FRESNELSchen Konstruktion erhalten wurde. Da diese Methode jedoch eher mühsam und auch nicht sehr genau war, wurde sie von FEDOROW bald aufgegeben. Durch Einführung einer dritten Drehachse wurde die Möglichkeit zur direkten Einmessung der optischen Symmetrieebenen bzw. der dazu normal stehenden Hauptschwingungsrichtungen geschaffen, womit die U-Tischmethode ihre heutige Gestalt erhielt.

Wie die drei Achsen XYZ des früher beschriebenen morphologischen Bezugssystems, bilden auch die drei Symmetrieachsen der Indikatrix ein rechtwinkliges System. Das Problem der optischen Orientierung der Plagioklase reduziert sich somit auf dasjenige der gegenseitigen Orientierung zweier rechtwinkliger, kartesischer Systeme mit gemeinsamem Ursprung, ein Problem für welches die analytische Geometrie des Raumes schon lange verschiedene

Lösungen kennt. Als besonders geeignet erweist sich für den vorliegenden Fall die Methode der sog. Euler-Winkel (LEONHARD EULER 1748). Die Achsen der beiden Systeme bilden zusammen insgesamt 9 Winkel, welche jedoch nicht unabhängig von einander sind. Es bestehen vielmehr zwischen ihren \cos 6 Systeme von Gleichungen und es genügen daher zur Festlegung der gegenseitigen Orientierung der beiden Systeme 3 Winkel. Statt nun aus den 9 Winkeln, welche die beiden Systeme mit einander bilden, drei beliebige auszuwählen, wählt man nach EULER drei spezielle, welche wie folgt definiert sind. Sind die beiden Systeme (Fig. 2) XYZ und $X'Y'Z'$, und definiert man die

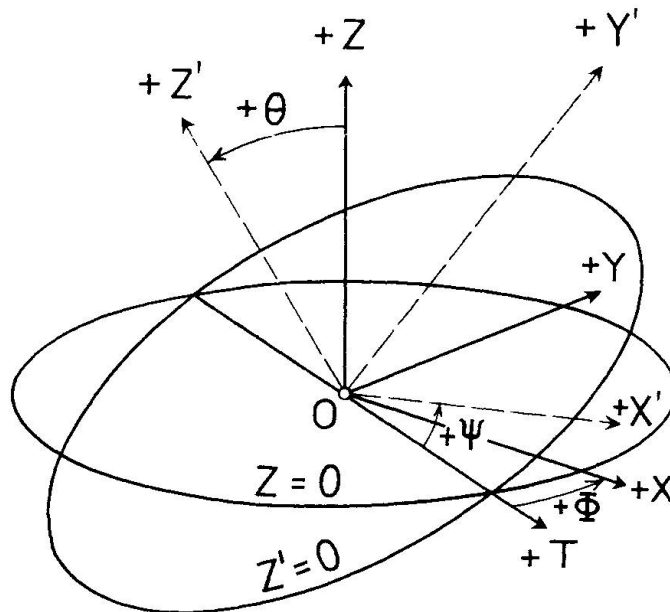


Fig. 2. Zur Definition der Euler-Winkel.

Schnittgerade der Ebene XY ($Z=0$) des ersten Systems mit der Ebene $X'Y'$ ($Z'=0$) des zweiten als Knotenlinie T , welcher man in willkürlicher Weise eine Richtung zuschreibt, so sind die drei sog. EULER-Winkel wie folgt bestimmt: $\Phi = (+T, +X)$, $\Psi = (+T, +X')$ und $\Theta = (Z, Z')$. Die drei Winkel entsprechen drei Drehungen, durch welche das eine System in das andere übergeführt wird. Für Einzelheiten sei auf die Lehrbücher der analytischen Geometrie des Raumes oder der Mechanik, oder auch auf BURRI (1956) oder BURRI, PARKER und WENK (1967) verwiesen. Nimmt man das früher definierte morphologische Bezugssystem, dessen Achsen den Zwillingsachsen der Gesetze Roc Tourné, Albit und Karlsbad entsprechen als XYZ und die drei Symmetrieachsen der Indikatrix (Hauptschwingungsrichtungen) als $X'Y'Z'$, so ergeben sich für das letztere drei Möglichkeiten der Zuordnung der Hauptschwingungsrichtungen zu den drei Koordinatenachsen $X'Y'Z'$, wie das folgende Schema zeigt. Die entsprechenden Euler-Winkel werden als Euler-Winkel I–III unterschieden.

Euler-Winkel	I	II	III
X'	$[n_\beta]$	$[n_\gamma]$	$[n_\alpha]$
Y'	$[n_\gamma]$	$[n_\alpha]$	$[n_\beta]$
Z'	$[n_\alpha]$	$[n_\beta]$	$[n_\gamma]$

Fig. 4, 6 und 7 zeigen die entsprechenden Verhältnisse für einen Labrador in stereographischer Projektion auf die Ebene $\perp [001]$. Von BURRI (1956) wurde anlässlich der erstmaligen Anwendung dieser Betrachtungsweise nur Fall I berücksichtigt, während die Fälle II und III in der Folge durch PARKER (PARKER 1961, BURRI, PARKER, WENK 1967) erstmals in Betracht gezogen wurden. Besonders Fall II erwies sich als wichtig, da es PARKER auf diesem Wege gelang, auch die optischen Achsen mit zu berücksichtigen. Diese waren von BURRI zuerst vernachlässigt worden, da das Problem der Darstellung der optischen Orientierung der Plagioklase mit Hilfe der Euler-Winkel I auch ohne deren Berücksichtigung gelöst werden konnte. Ihre Einbeziehung wird jedoch unumgänglich, sobald die FRESNELSche Konstruktion zur Bestimmung von Auslösungsschiefen angewandt werden soll. Auf Grund der Euler-Winkel II wurde von PARKER auch eine elegante Ausgleichsmethode gegeben, für den Fall, dass die eingemessenen Schwingungsrichtungen nicht genau normal zu einander stehen. Im folgenden soll gezeigt werden, wie sich die optischen Achsen auch bei alleiniger Verwendung der Euler-Winkel I berücksichtigen lassen.

Von BURRI wurden seinerzeit für die Berechnung der Euler-Winkel I elementare Vektormethoden vorgeschlagen, welche vor allem den Vorteil grosser Anschaulichkeit besitzen (BURRI 1957). Durch PARKER wurde in der Folge (PARKER 1961, BURRI, PARKER und WENK 1967) die sphärisch-trigonometrische Berechnung vorgezogen, wobei ein detailliertes Formelsystem zur Berechnung der Euler-Winkel I–III, sowie zu ihrer gegenseitigen Umrechnung aufgestellt wurde. Die den Vektormethoden innewohnende Anschaulichkeit, sowie der Umstand, dass sie im Mathematikunterricht für Naturwissenschaftler an den Hochschulen in zunehmendem Masse berücksichtigt werden, rechtfertigt es jedoch nach Ansicht des Verfassers, dass sie in vermehrtem Masse auch für kristallographische Berechnungen herangezogen werden. Es soll daher im folgenden gezeigt werden, wie sich auch die Euler-Winkel II und III auf sehr einfachem Wege durch Vektormethoden ergeben, sowie, wie auch die optischen Achsen durch sie mitberücksichtigt werden können. Es soll auch gezeigt werden, wie der notwendige Ausgleich bei nicht erfüllter Orthogonalität der Hauptschwingungsrichtungen mit elementaren Vektormethoden ebenfalls sehr einfach bewerkstelligt werden kann, sowie dass auch gewisse durch PARKER eingeführte Hilfswinkel, welche wertvolle Kontrollmöglichkeiten bieten, ebenfalls auf einfache Weise erhältlich sind.

II. VEKTORIELLE METHODIK ZUR BERECHNUNG DER OPTISCHEN ORIENTIERUNG VON PLAGIOKLASEN

1. Die Ausgangsdaten und ihr Ausgleich

Zur Formulierung der für die optische Orientierung massgebenden Richtungen als Vektoren benötigt man die Kenntnis ihrer Richtungswinkel bzw. Richtungscosinus in bezug auf das System XYZ . Die Richtungswinkel sind identisch mit den FEDOROW-Winkeln F_x, F_y, F_z (Kleinkreiskoordinaten auf der Lagenkugel), wie sie sich bei U-Tischuntersuchungen ergeben, und wie sie auf besonders einfache Weise, ohne jede Einmessung von morphologischen Bezugselementen wie Spaltbarkeiten etc. durch die Halbierung der über die Zwillingsachse gemessenen KÖHLER-Winkel für die Hauptschwingungsrichtungen von Zwillingen nach den Gesetzen Roc Tourné, Albit und Karlsbad erhalten werden. Man kann sie auch aus eventuell gegebenen (φ, ρ) -Werten nach GOLDSCHMIDT berechnen.

Die Richtungswinkel müssen, wenn erforderlich, auf $\sum \cos^2 F_i = 1$ ausgeglichen werden. Hierzu wird der Winkelwert, welcher der Differenz ihrer \cos^2 -Summe gegen 1 entspricht gleichmässig, auf die drei Winkel aufgeteilt und zu ihnen addiert bzw. von ihnen subtrahiert (BURRI, PARKER, WENK 1967, p. 143). Da die Richtungscosinus den Komponenten des betreffenden Einheitsvektors entsprechen, kann dieser für eine beliebige Richtung R wie folgt geschrieben werden:

$$\mathfrak{R}_0 = (\cos F_x) \mathbf{i} + (\cos F_y) \mathbf{j} + (\cos F_z) \mathbf{k}.$$

Der diesem Ortsvektor auf der Lagenkugel (Einheitskugel) entsprechende Pol kann sofort in eine stereographische Projektion eingetragen werden, indem man die Richtungswinkel F_x, F_y, F_z einer Funktionstabelle¹⁾ entnimmt. Diese entsprechen Kleinkreiskoordinaten in bezug auf die X -, Y -, bzw. Z -Achse, wobei das Vorzeichen zu beachten ist. Die Kleinkreise müssen sich in einem Punkte schneiden.

Man kann aus den F_i auch die (φ, ρ) -Werte der Richtung R auf der Einheitskugel zugeordneten Pols bestimmen. Man bildet hierzu, zunächst ohne Berücksichtigung des Vorzeichens, $\cos F_x / \cos F_y = \operatorname{tg} \Delta$, wobei Δ ein Hilfswinkel, eingeschlossen von Y -Achse und radius vector ist. φ ergibt sich dann wie folgt:

¹⁾ Empfehlenswert sind die Tafeln von C. A. ATTWOOD, Six-Figure Trigonometrical Functions of Angles in Hundreths of a Degree. Practical Tables Series No. 2, Pergamon (1965).

X	Y	φ
+	+	Δ
+	-	$180^\circ - \Delta$
-	-	$180^\circ + \Delta$
-	+	$360^\circ - \Delta$

Die Zentraldistanz $\rho = \arccos F_z$.

Mit dem U-Tisch lassen sich immer mindestens zwei Symmetrieachsen der Indikatrix direkt einmessen. Falls die dritte der direkten Einmessung nicht zugänglich ist, lässt sie sich konstruieren. Liegen nun die Positionen der drei Symmetrieachsen (Hauptschwingungsrichtungen) vor, so muss zunächst geprüft werden, ob sie normal zu einander stehen. Diese Prüfung ist besonders immer auch dann vorzunehmen, wenn Literaturdaten verwendet werden. Man bildet hierzu die skalaren Produkte von je zwei der drei Vektoren, welche sämtlich den Wert Null ergeben müssen. Ist dies nicht der Fall, so muss ein Ausgleich erfolgen, da die Berechnung der Euler-Winkel die Orthogonalität beider Systeme voraussetzt. Eine Ausgleichsmethode, welche den drei Symmetrieachsen das gleiche Gewicht zuteilt, wurde von PARKER beschrieben (BURRI, PARKER und WENK 1967, p. 135). Da es jedoch eine jedem U-Tischpraktiker wohl bekannte Erfahrungstatsache ist, dass die Einmessung der optischen Achsenebene mit einem grösseren Fehler behaftet ist als die beiden andern Symmetrieebenen, empfiehlt es sich nach BURRI (1968, p. 798) die beiden Bisektrizen bevorzugt zu berücksichtigen und die optische Normale rein rechnerisch durch das Vektorprodukt der beiden Bisektrizen festzulegen. Auf diese Weise erreicht man, dass die Winkel $([n_\alpha], [n_\beta])$ und $([n_\gamma], [n_\beta])$ 90° betragen, so dass sich für sie ein Ausgleich erübrigt. Für den Winkel $([n_\alpha], [n_\gamma])$ muss jedoch nachgeprüft werden, ob dies ebenfalls der Fall ist, was am besten durch Bildung des skalaren Produktes geschieht. Weicht der Winkel von 90° ab, so muss ein Ausgleich erfolgen, indem die Differenz gleichmässig auf beide Bisektrizen verteilt wird.

Hierzu bestimmt man zunächst die Winkelhalbierenden H und K der beiden schief zu einander stehenden Richtungen. Bezeichnet man die $[n_\alpha]$ und $[n_\gamma]$ zugeordneten Vektoren vorerst mit a' und c' (indem man die ungestrichelten Symbole für die definitiven, ausgeglichenen Richtungen reserviert), so ist (Fig. 3a) $\mathfrak{S} = a'_0 + c'_0$ bzw. $\mathfrak{K} = a'_0 - c'_0$, wobei H und K normal zueinander stehen. Bestimmt man nun erneut die Winkelhalbierenden von H und K (Fig. 3b), so stehen diese wiederum normal zueinander und entsprechen den gesuchten, ausgeglichenen Lagen der Hauptschwingungsrichtungen $[n_\alpha]$ und $[n_\gamma]$, wobei die ursprüngliche Abweichung vom rechten Winkel gleichmässig auf die beiden Richtungen aufgeteilt ist. Es ist somit $\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{K}_0 = c$ bzw. $\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{K}_0 = a$, woraus durch Normierung a_0 und c_0 erhalten werden.

Das skalare Produkt $(a_0 c_0)$ bietet eine Kontrolle über das Bestehen der

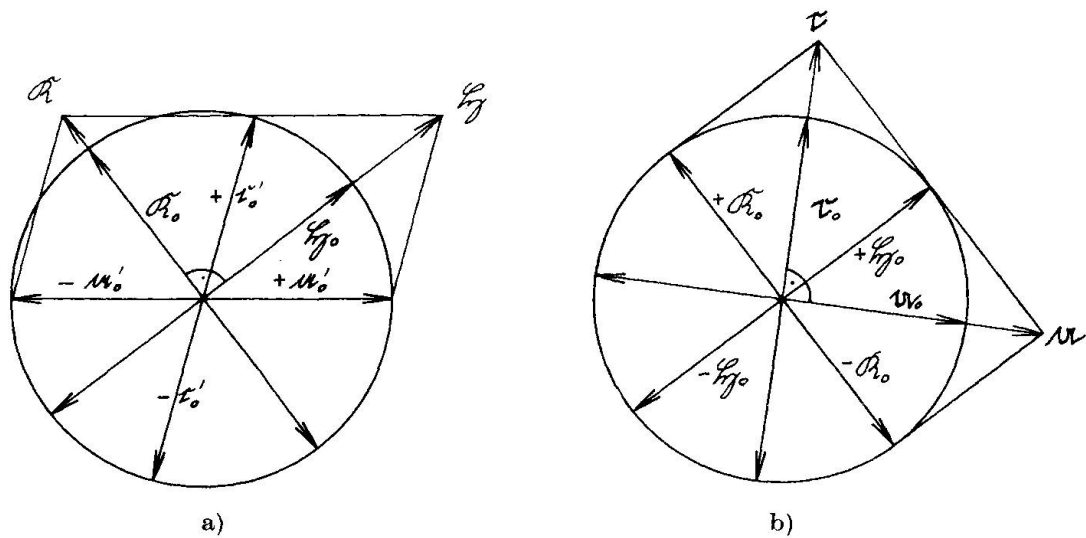


Fig. 3. Ausgleich der nicht normal zu einander stehenden Schwingungsrichtungen α' und γ' hinsichtlich Orthogonalität.

- a) Konstruktion der Winkelhalbierenden ξ und η der beiden Schwingungsrichtungen. Diese stehen normal zu einander.
- b) Die Winkelhalbierenden von ξ und η stehen ihrerseits ebenfalls normal zu einander und entsprechen den gesuchten ausgeglichenen Schwingungsrichtungen α und γ .

angestrebten Orthogonalität und das Vektorprodukt $[\alpha_0 \gamma_0] = \mathfrak{b}_0$ liefert die Position von $[n_\beta]$. Damit verfügt man über das hinsichtlich Orthogonalität ausgeglichene System $X' Y' Z'$ der drei Hauptschwingungsrichtungen, bezogen auf das morphologische System $X Y Z$ und es kann an die Berechnung der Euler-Winkel herangetreten werden.

2. Die Berechnung der Euler-Winkel

a) Euler-Winkel I

Die Knotenlinie t (Fig. 4) ist Schnittgerade der Ebene $\perp [n_\alpha]$ mit der Ebene $\perp Z$ (Projektionsebene). Bezeichnet man die Einheitsvektoren in Richtung von X, Y, Z mit i, j, k , so ist $t = [a_0 k]$, woraus durch Normierung der Einheitsvektor t_0 folgt. Die gesuchten Euler-Winkel I erhält man aus den skalaren Produkten:

$$\cos \Phi = (t_0 i), \quad \cos \Psi = (t_0 \mathfrak{b}_0), \quad \cos \Theta = (a_0 k).$$

Positionen der optischen Achsen.

Wie Fig. 5 zeigt, erhält man die beiden den optischen Achsen A und B entsprechenden Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} als $a_0 a \mp \mathfrak{x}$, wobei $\mathfrak{x} = c_0 \operatorname{tg} V_\alpha$ ist. V ist der Achsenwinkel in bezug auf die entsprechende Bisektriz. Durch Normierung erhält man die Einheitsvektoren \mathfrak{A}_0 und \mathfrak{B}_0 , aus welchen die (φ, ρ) -Werte oder

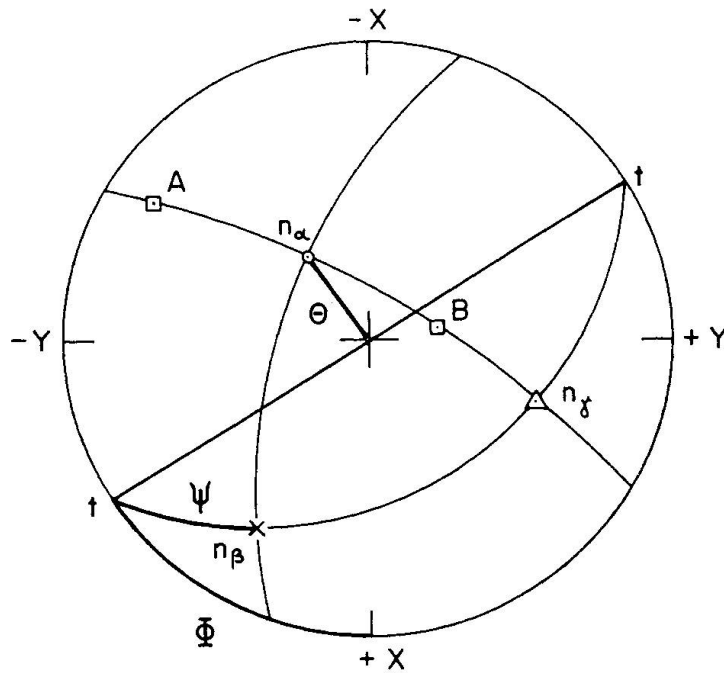


Fig. 4. Optische Orientierung von HT-Labradorit An_{62} . Stereographische Projektion auf die Ebene $\perp [001]$ mit Angabe der Euler-Winkel I.

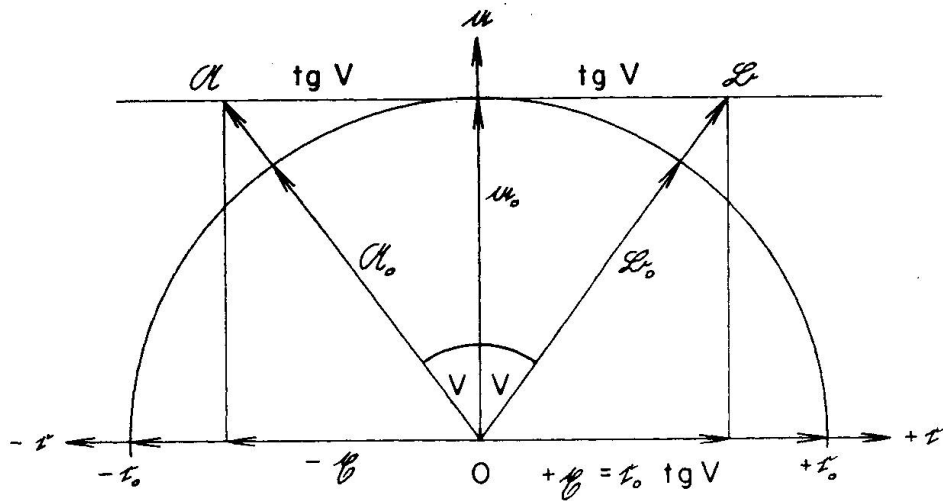


Fig. 5. Zur Berechnung der Vektoren der optischen Achsen $\mathcal{A} = \alpha_0 - \gamma$ und $\mathcal{B} = \alpha_0 + \gamma$.

die sphärischen Koordinaten nach BECKE berechnet werden können. Das skalare Produkt $(\mathcal{A}_0 \mathcal{B}_0) = \cos 2V$ dient zur Kontrolle.

Es ist somit möglich, die vollständige optische Orientierung eines Plagioklasses durch 4 Zahlenwerte eindeutig auszudrücken, nämlich durch die drei Euler-Winkel I , Φ , Ψ , Θ und den Achsenwinkel V .

b) Euler-Winkel II

Die Knotenlinie u (Fig. 6) ist Schnittgerade der Ebene $\perp [n_\beta]$ mit der Ebene $\perp Z$. Es ist somit $u = [b_0 \bar{k}]$, woraus durch Normierung u_0 folgt.

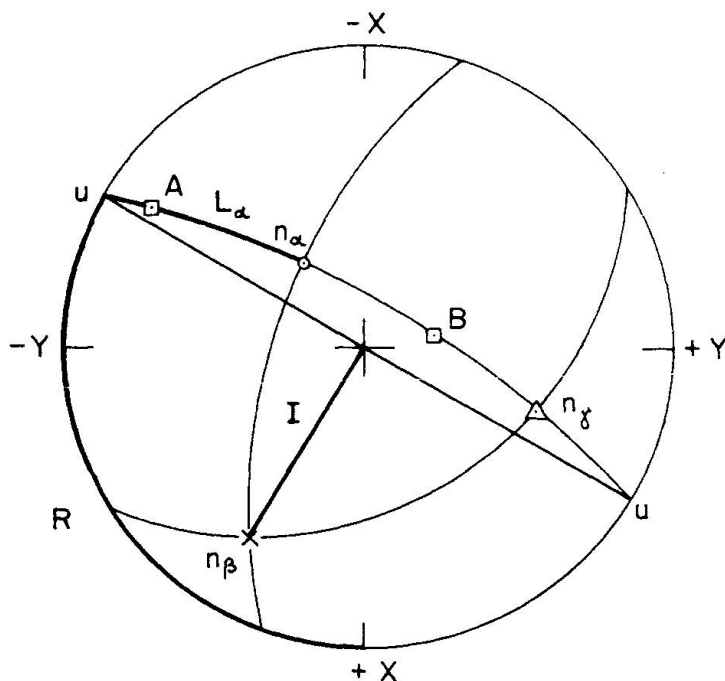


Fig. 6. Optische Orientierung von HT-Labradorit An_{62} . Stereographische Projektion auf die Ebene $\perp [001]$ mit Angabe der Euler-Winkel II.

Die gesuchten Euler-Winkel II erhält man aus den skalaren Produkten:

$$\cos R = (u_0 i), \quad \cos I = (b_0 \bar{k}), \quad \cos L_\alpha = (u_0 a_0).$$

In bezug auf die optischen Achsen wird wie unter a) angegeben verfahren.

c) Euler-Winkel III

Die Knotenlinie w (Fig. 7) ist Schnittgerade der Ebene $\perp [n_\gamma]$ mit der Ebene $\perp Z$. Es ist somit $w = [c_0 \bar{k}]$, woraus durch Normierung w_0 folgt.

Die gesuchten Euler-Winkel III folgen aus den skalaren Produkten:

$$\cos D = (w_0 i), \quad \cos N = (c_0 \bar{k}), \quad \cos K_\alpha = (w_0 a_0).$$

In bezug auf die optischen Achsen wird wie unter a) angegeben verfahren.

d) Hilfswinkel

Von PARKER wurden (BURRI, PARKER, WENK 1967, p. 124) gewisse Hilfswinkel eingeführt und von ihm einheitlich mit Δ bezeichnet. Sie treten in der stereographischen Projektion (Fig. 8) am Grundkreis als Seiten von Scheitel-

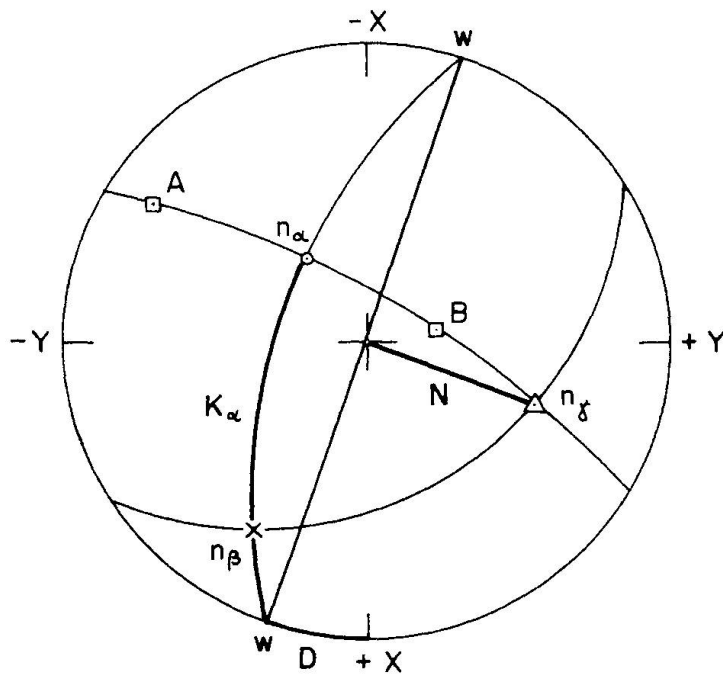


Fig. 7. Optische Orientierung von HT-Labradorit An_{62} . Stereographische Projektion auf die Ebene $\perp [001]$ mit Angabe der Euler-Winkel III.

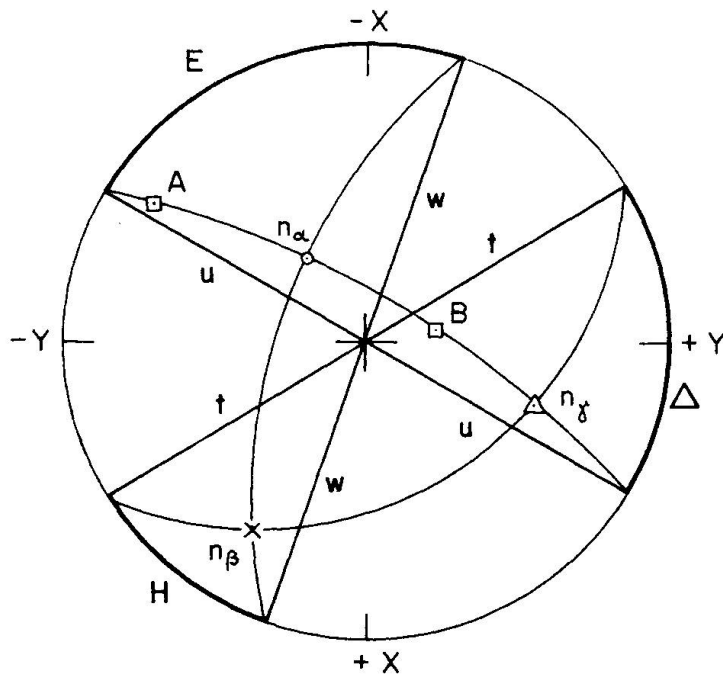


Fig. 8. Zur Berechnung der Parkerschen Hilfswinkel Δ , E und H für HT-Labradorit An_{62} .

dreiecken zum Grunddreieck $[n_\alpha]-[n_\beta]-[n_\gamma]$ auf. Sie treten zugleich als Seiten in Dreiecken auf, deren beide andere Seiten durch je zwei der drei Knotenlinien gebildet werden. Die Hilfswinkel spielen eine Rolle bei der Umrechnung der Euler-Winkel I–III nach den von PARKER gegebenen sphärisch-trigono-

metrischen Formeln und können auch sehr gut zu Kontrollzwecken verwendet werden. Ihre Berechnung gestaltet sich sehr einfach durch Bildung der entsprechenden skalaren Produkte. Nennt man die Winkel gemäss Fig. 9 Δ , E , H , so gilt:

$$\cos \Delta = (t_0 u_0), \quad \cos E = (t_0 w_0), \quad \cos H = (u_0 w_0).$$

Von TURNER (1947) und unabhängig davon durch DEBENEDETTI (1960) wurde vorgeschlagen, die Winkel zwischen den Symmetrieachsen der Indikatrix und den Zwillingsachsen häufiger Zwillingsgesetze bzw. zwischen Symmetrieebenen und Zwillingssebenen zur Bestimmung des An-Gehaltes zu verwenden. Von beiden Autoren wurden diesbezügliche Diagramme gegeben. Auch diese Winkel lassen sich im Anschluss an die hier benützte Darstellung der optischen Orientierung sehr einfach gewinnen. Die cos der Winkel zwischen den Hauptschwingungsrichtungen $[n_\alpha]$, $[n_\beta]$ und $[n_\gamma]$ und den Zwillingsachsen ergeben sich für die Zwillingsgesetze Roc Tourné (RT) Albit (AB) und Karlsbad (KB) als skalare Produkte gemäss folgendem Schema:

	RT	AB	KB
$[n_\alpha]$	$(a_0 i)$	$(a_0 j)$	$(a_0 k)$
$[n_\beta]$	$(b_0 i)$	$(b_0 j)$	$(b_0 k)$
$[n_\gamma]$	$(c_0 i)$	$(c_0 j)$	$(c_0 k)$

III. BEISPIEL

Zur Illustrierung der eben dargelegten Methode soll die optische Orientierung des HT-Labradorites An_{62} von Khuchiré (Iran) auf Grund von U-Tischmessungen berechnet werden. Es handelt sich um das gleiche Vorkommen, welches bereits früher (BURRI 1968) untersucht wurde. Da die Berechnungen damals sphärisch-trigonometrisch durchgeführt wurden, können somit die beiden Methoden schrittweise miteinander verglichen werden. Die bereits w. o. gegebenen stereographischen Projektionen Fig. 4, 6, 7 und 8 beziehen sich auf dieses Beispiel und dienen daher auch zur Erläuterung der folgenden Ausführungen.

1. Die Ausgangswerte und ihr Ausgleich

a) Die Messwerte

Mit Hilfe des U-Tisches wurden an je 10 Zwillingen nach den Gesetzen Roc Tourné, Albit und Karlsbad die Köhler-Winkel für die Hauptschwingungsrichtungen $[n_\alpha]$ und $[n_\gamma]$ gemessen, aus welchen durch Halbierung und Mittelwertbildung die folgenden Fedorow-Winkel (Richtungswinkel) erhalten wurden:

$$\left. \begin{array}{l} F_x = -61,70^\circ \\ F_y = -71,95^\circ \\ F_z = +35,30^\circ \end{array} \right\} [n_\alpha], \quad \left. \begin{array}{l} F_x = +72,55^\circ \\ F_y = +35,05^\circ \\ F_z = +59,80^\circ \end{array} \right\} [n_\gamma],$$

Nach Ausgleich auf $\sum \cos^2 F_i = 1$ erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} F_x = -61,38^\circ \\ F_y = -71,63^\circ \\ F_z = +34,98^\circ \end{array} \right\} [n_\alpha], \quad \left. \begin{array}{l} F_x = +72,87^\circ \\ F_y = +35,37^\circ \\ F_z = +60,12^\circ \end{array} \right\} [n_\gamma].$$

Den beiden Bisektrizen $[n_\alpha]$ und $[n_\gamma]$ werden die beiden Vektoren α'_0 und c'_0 zugeordnet:

$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= -(\cos 61,38^\circ) i - (\cos 71,63^\circ) j + (\cos 34,98^\circ) f, \\ &= -0,47810 i - 0,31515 j + 0,81935 f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'_0 &= +(\cos 72,87^\circ) i + (\cos 35,37^\circ) j + (\cos 60,12^\circ) f, \\ &= +0,29454 i + 0,81543 j + 0,49818 f. \end{aligned}$$

b) Prüfung auf Orthogonalität

Hierzu bildet man das skalare Produkt $(\alpha'_0 c'_0) = 0,01012 = \cos 89,4^\circ$. Es ist somit ein Ausgleich notwendig. Hierzu bildet man die Winkelhalbierenden der beiden Bisektrizen:

$$\begin{aligned} \alpha'_0 + c'_0 &= \mathfrak{S} = -0,18356 i + 0,50028 j + 1,31753 f, \\ \alpha'_0 - c'_0 &= \mathfrak{R} = -0,77264 i - 1,13058 j + 0,32117 f. \end{aligned}$$

woraus durch Normierung die Einheitsvektoren folgen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &= -0,12916 i + 0,35201 j + 0,92704 f, \\ \mathfrak{R}_0 &= -0,54931 i - 0,80377 j + 0,22833 f. \end{aligned}$$

Die ausgeglichenen Schwingungsrichtungen erhält man durch erneute Bildung der Winkelhalbierenden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{R}_0 &= \alpha = -0,67847 i - 0,45176 j + 1,15537 f, \\ \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{R}_0 &= c = +0,42015 i + 1,15578 j + 0,69867 f. \end{aligned}$$

Daraus folgen wiederum die Einheitsvektoren, aus welchen man die (φ, ρ) -Werte erhält:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -0,47984 i - 0,31949 j + 0,81712 f, & \varphi_\alpha &= 236,34^\circ, & \rho_\alpha &= 35,20^\circ, \\ c_0 &= +0,29705 i + 0,81716 j + 0,49397 f, & \varphi_\gamma &= 19,98^\circ, & \rho_\gamma &= 60,40^\circ. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle der angestrebten Orthogonalität bildet man wiederum das skalare Produkt $(\alpha_0 c_0) = 0,00002 = \cos 90,0^\circ$. Diese ist somit erreicht.

2. Berechnung der Position der optischen Normale

Ordnet man $[n_\beta]$ den Vektor \mathfrak{b} zu, so erhält man aus $\mathfrak{b}_0 = [\mathfrak{a}_0 \mathfrak{c}_0]$

$$\mathfrak{b}_0 = + 0,82555 \mathfrak{i} - 0,47976 \mathfrak{j} + 0,29721 \mathfrak{k}, \quad \varphi_\beta = 120,16^\circ, \quad \rho_\beta = 72,71^\circ.$$

3. Berechnung der Positionen der optischen Achsen

Gemessen wurde im Mittel $(+) 2V_\gamma = 78,8^\circ$, woraus $V_\alpha = 50,6^\circ$. Der Hilfsvektor \mathfrak{x} berechnet sich zu $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}_0 \operatorname{tg} 50,6^\circ$ zu

$$\mathfrak{x} = + 0,36163 \mathfrak{i} + 0,99482 \mathfrak{j} + 0,60137 \mathfrak{k}.$$

Ordnet man den beiden optischen Achsen A und B die Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zu, so wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{x} = - 0,84147 \mathfrak{i} - 1,31431 \mathfrak{j} + 0,21575 \mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{x} = - 0,11821 \mathfrak{i} + 0,67533 \mathfrak{j} + 1,41849 \mathfrak{k}.$$

Normiert: $\mathfrak{A}_0 = - 0,53411 \mathfrak{i} - 0,83429 \mathfrak{j} + 0,13695 \mathfrak{k}$, $\varphi_A = 212,63^\circ$, $\rho_A = 82,08^\circ$,

$$\mathfrak{B}_0 = - 0,07513 \mathfrak{i} + 0,42918 \mathfrak{j} + 0,90012 \mathfrak{k}, \quad \varphi_B = 350,07^\circ, \quad \rho_B = 25,83^\circ.$$

Zur Kontrolle: Berechnung von $2V_\gamma$ aus den eben errechneten Achsenpositionen

$$(\mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_0) = 0,19466 = \cos 78,8^\circ, \text{ wie gemessen.}$$

4. Berechnung der Euler-Winkel I (Fig. 4)

Knotenlinie t $t = [\mathfrak{a}_0 \mathfrak{k}] = \mp 0,31949 \mathfrak{i} \pm 0,47984 \mathfrak{j} + 0 \mathfrak{k}$.

Normiert: $t_0 = \mp 0,55421 \mathfrak{i} \pm 0,83238 \mathfrak{j} + 0 \mathfrak{k}$.

$$\cos \Phi = (t_0 \mathfrak{i}) = 0,55421, \quad \Phi = 56,34^\circ,$$

$$\cos \Psi = (t_0 \mathfrak{b}_0) = 0,85680, \quad \Psi = 30,88^\circ,$$

$$\cos \Theta = (\mathfrak{a}_0 \mathfrak{k}) = 0,81712, \quad \Theta = 35,20^\circ.$$

5. Berechnung der Euler-Winkel II (Fig. 6)

Knotenlinie u $u = [\mathfrak{b}_0 \mathfrak{k}] = \mp 0,47976 \mathfrak{i} \mp 0,82555 \mathfrak{j} + 0 \mathfrak{k}$.

Normiert: $u_0 = \mp 0,50246 \mathfrak{i} \mp 0,86460 \mathfrak{j} + 0 \mathfrak{k}$.

$$\cos R = (u_0 \mathfrak{i}) = 0,50246, \quad R = 120,16^\circ,$$

$$\cos I = (\mathfrak{b}_0 \mathfrak{k}) = 0,29721, \quad I = 72,71^\circ,$$

$$\cos L_\alpha = (u_0 \mathfrak{a}_0) = 0,51734, \quad L_\alpha = 58,85^\circ.$$

6. Berechnung der Euler-Winkel III (Fig. 7)

Knotenlinie w $w = [c_0 \mathfrak{f}] = \pm 0,81716 i \mp 0,29705 j + 0 \mathfrak{f}$.

Normiert: $w_0 = \pm 0,93982 i \mp 0,34164 j + 0 \mathfrak{f}$.

$$\begin{aligned} \cos D &= (w_0 i) = 0,93982, & D &= 19,98^\circ, \\ \cos N &= (c_0 \mathfrak{f}) = 0,49397, & N &= 60,40^\circ, \\ \cos K_\alpha &= (w_0 a_0) = 0,34182, & K_\alpha &= 109,99^\circ. \end{aligned}$$

7. Parkersche Hilfswinkel (Fig. 8)

$$\begin{aligned} \cos \Delta &= (u_0 t_0) = 0,44121, & \cos E &= (w_0 u_0) = 0,17683, & \cos H &= (t_0 w_0) = 0,80524, \\ \Delta &= 63,82^\circ, & E &= 79,82^\circ, & H &= 36,37^\circ. \end{aligned}$$

8. Zusammenstellung der Resultate

Vektoren der Hauptschwingungsrichtungen (ausgeglichen)

$$\begin{aligned} a_0 &= -0,47984 i - 0,31949 j + 0,81712 \mathfrak{f}, \\ b_0 &= +0,82555 i - 0,47976 j + 0,29721 \mathfrak{f}, \\ c_0 &= +0,29705 i + 0,81716 j + 0,49397 \mathfrak{f}. \end{aligned}$$

Positionen der Hauptschwingungsrichtungen

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= 236,3^\circ, & \varphi_\beta &= 120,2^\circ, & \varphi_\gamma &= 20,0^\circ, \\ \rho_\alpha &= 35,2^\circ, & \rho_\beta &= 72,7^\circ, & \rho_\gamma &= 60,4^\circ. \end{aligned}$$

Vektoren der optischen Achsen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= -0,53411 i - 0,83429 j + 0,13695 \mathfrak{f}, \\ \mathfrak{B}_0 &= -0,07513 i + 0,42918 j + 0,90012 \mathfrak{f}. \end{aligned}$$

Positionen der optischen Achsen

$$\begin{aligned} \varphi_A &= 212,6^\circ, & \varphi_B &= 350,1^\circ, \\ \rho_A &= 82,1^\circ, & \rho_B &= 25,8^\circ, & (+) 2V_\gamma &= 78,8^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Euler-Winkel I:} & \quad \Phi = 56,3^\circ, & \Psi &= 30,9^\circ, & \Theta &= 35,2^\circ, \\ \text{Euler-Winkel II:} & \quad R = 120,2^\circ, & I &= 72,7^\circ, & L_\alpha &= 58,8^\circ, \\ \text{Euler-Winkel III:} & \quad D = 20,0^\circ, & N &= 60,4^\circ, & K_\alpha &= 110,0^\circ. \end{aligned}$$

IV. LITERATUR

SMPM = Schweiz. Mineralog. u. Petrogr. Mitteilungen

- BEREK, M. (1924): Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehtischmethoden. Berlin, Bornträger.
- BURRI, C. (1956) Charakterisierung der Plagioklasoptik durch drei Winkel und Neuentwurf des Stereogramms der optischen Orientierung für konstante Anorthit-Intervalle. SMPM 539–592.
- (1968): Die optische Orientierung von HT-Labradorit aus Andesit von Khuchiré (Iran), zugleich ein Beitrag zur U-Tischmethodik. SMPM 48, 781–801.
- BURRI, C., PARKER, R. L. und WENK, E. (1967): Die optische Orientierung der Plagioklasse. Basel, Birkhäuser.
- DEBENEDETTI, A. (1960): La misura diretta di angoli diedri tra piani principali dell'indicatrice e piani cristallini per la determinazione dei plagioclasasi. Period. Min. 29, 47–71.
- EULER, L. (1748): *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne.
- EWALD, P. (1921): Das «Reziproke Gitter» in der Strukturtheorie. Z. Krist. 56, 129–156.
- MOSEBACH, R. (1948): Das Messen optischer Gangunterschiede mit Drehkompensatoren. Heidelberger Beitr. Min. Petr. 1, 515–528.
- (1949): Eine Differenzmethode zur Erhöhung der Messgenauigkeit und Erweiterung des Messbereiches normaler Drehkompensatoren. Ibid. 2, 167–171.
- (1949a): Ein einfaches Verfahren zur Erhöhung der Messgenauigkeit kleiner optischer Gangunterschiede. Ibid. 2, 172–175.
- PARKER, R. L. (1961): Betrachtungen über die Wahl von Winkeln zur Charakterisierung der Plagioklasoptik. SMPM 41, 433–442.
- RINNE, F. und BERK, M. (1953): Anleitung zu optischen Untersuchungen mit dem Polarisationsmikroskop. 2. Aufl. Stuttgart, Schweizerbart.
- TURNER, F. J. (1947): Determination of plagioclase with the four-axis Universal Stage. Amer. Mineral. 32, 389–410.
- WEBER, L. (1924): Vektoranalytische Behandlung kristallographischer Aufgaben. In: P. Niggli, Lehrbuch der Mineralogie. I, 2. Aufl. 107–120. Berlin, Bornträger.

Manuskript eingegangen am 15. Juni 1972.