Linea dei punti brillanti di sfere concentriche

PROF. GIOVANNI FERRI

Linea dei Punti brillanti di sfere concentriche

Letto alla Sezione di Matematica del Congresso della Società Elvetica di Scienze naturali, in Lugano, l'8 settembre 1919.

Sia il centro delle sfere 0, il punto luminoso A, il punto di vista A_1; il punto brillante M di una sfera; esso sarà nel piano AA_1O.

Coordinate ortogonali coll'origine in 0 e l'asse 0x per il punto di mezzo della AA_1. Le coordinate dei punti:

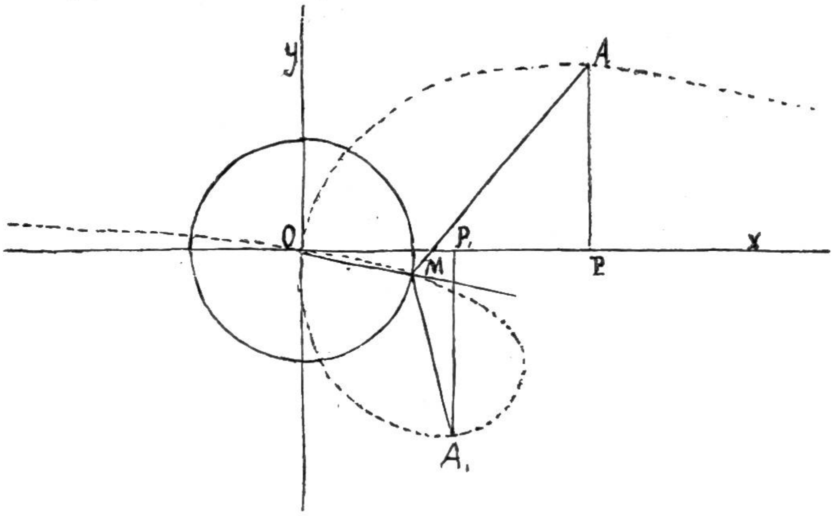
$M ; x , y$.— $A ; p , q$.— $A_1 ; p_1 , q_1$.— $p > p_1$

Le equazioni delle rette

(1) per AM ; $\quad y - q = a(x - p)$

(2) » A_1M ; $\quad y + q = a_1(x - p_1)$

(3) » OM ; $\quad y = n x$



In generale per due rette

$$y = a x + b$$
$$y = a_1 x + b_1$$

Le bisettrici dei loro angoli sono

$$\frac{y - a x - b}{\sqrt{1+a^2}} = \pm \frac{y - a_1 x - b_1}{\sqrt{1+a_1^2}}$$

ossia

$$y = \frac{a\sqrt{1+a_1^2} - a_1\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a_1^2} - \sqrt{1+a^2}}x + \frac{b\sqrt{1+a_1^2} - b_1\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a_1^2} - \sqrt{1+a^2}}$$

Nel nostro caso, la normale O M dovendo bisecare l'angolo delle due rette AMA_1 dovrà stare l'uguaglianza dei coefficienti di direzione; cioè

$$\frac{a\sqrt{1+a_1^2} - a_1\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a_1^2} - \sqrt{1+a^2}} = n$$

che equivale alla

$$(a+a_1)(1-n^2) - 2(1-aa_1)n = o$$

Ponendo i valori dei coefficienti (1), (2), (3)

$$a = \frac{y-q}{x-p} \quad ; \quad a_1 = \frac{y+q}{x-p_1} \quad ; \quad n = \frac{y}{x}$$

si giunge alla equazione del luogo dei punti brillanti delle sfere concentriche,

$$(p+p_1)(x^2+y^2)y-(p-p_1)(x^2-y^2)q-2(q^2+pp_1)xy=o$$

Disposizione della linea. Essa passa per A e per A_1 poichè l'equazione è soddisfatta per $x=p$ ed $y=q$ poi anche per $x=p_1$ ed $y=-q$

La linea passa nel centro O poichè posto $x=o$ l'equazione riducesi alla

$$\left[(p+p_1)y+(p-p_1)q\right]y^2=o$$

soddisfatta per $y=o$.

Poi anche dalla $(p+p_1)y+(p-p_1)q=o$ quindi un secondo valore:

$$y_1 = \frac{p_1-p}{p+p_1}q$$

indicante che la linea interseca l'asse O y anche nella sua parte negativa; essendo $p_1<p$.

Nel centro O si intersecano due rami della linea (punto multiplo) perchè differenziandone due volte successivamente l'equazione, e posto $x=o$ ed $y=o$ si giunge ad un trinomio completo del 2° grado rispetto alla derivata di y che conduce a due valori diversi di questa derivata e quindi a due diverse tangenti alla curva nel punto O.

Il polinomio è di terzo grado rispetto ad y e per un dato x, positivo o negativo, ammette tre valori d'y; dei quali uno sempre reale e positivo perchè l'ultimo termine del polinomio ordinato per y rimane negativo, contenendo x^2.

Assintoto. — Se dividesi il polinomio per x^2 e si pone poi $x=\infty$, rimane $(p+p_1)\,y-(p-p_1)\,q=o$ ossia

$$y=\frac{p-p_1}{p+p_1}\,q$$

retta assintota parallela $O\,x$, dalla parte positiva.

Il polinomio è di secondo grado rispetto ad x e per un dato valore d'y ammette due valori d'x: però reali soltanto fino a quando i coefficienti d'x^2 e d'x soddisfano alla nota condizione $B^2-4\,A\,C\geq o$, che nel nostro caso corrisponde a $(q^2+pp_1)^2\geq(p+p_1)^2\,y^2-(p-p_1)^2\,q^2$ ossia alla

$$y_m\leq\frac{\pm\sqrt{(p^2+q^2)\,(p_1^{\,2}+q^2)}}{p+p_1}=\frac{\pm OA\times OA_1}{p+p_1}$$

Quando $A\,A_1$ fossero equidistanti da O, cioè $p=p_1$ l'equazione si riduce:

$$\left[p(x^2+y^2)-(p^2+{}_1^{\,2})\;x\right]y=o$$

Soddisfatta da $y=o$, cioè la linea riducesi all'asse $O\,x$. Poi anche dalla

$$x^2+y^2-\frac{p^2+q^2}{p}\,x=o$$

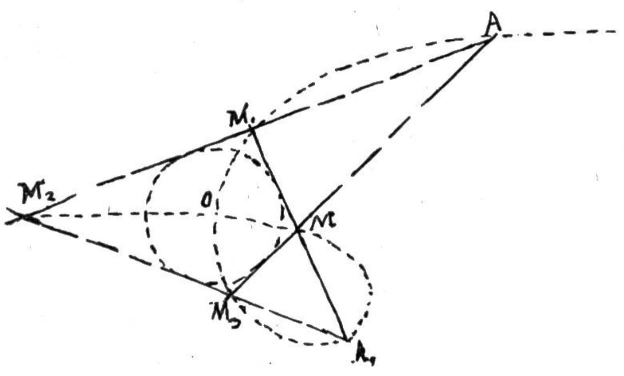
cioè la circonferenza col centro sulla $O\,x$, e che passa nel centro O.

Quando A è a distanza infinita (raggi luminosi paralleli) $p=\infty$ e la equazione del luogo dei punti brillanti si riduce alla

$$(y-q)x^2-2\,p_1\,x\,y+(q+y)\,y^2=o$$

che ha come assintoto $y=q$ parallela $O\,x$.

Costruzione grafica della linea. — Mediante le tangenti per A e per A_1 alle circonferenze concentriche in O. Per ogni

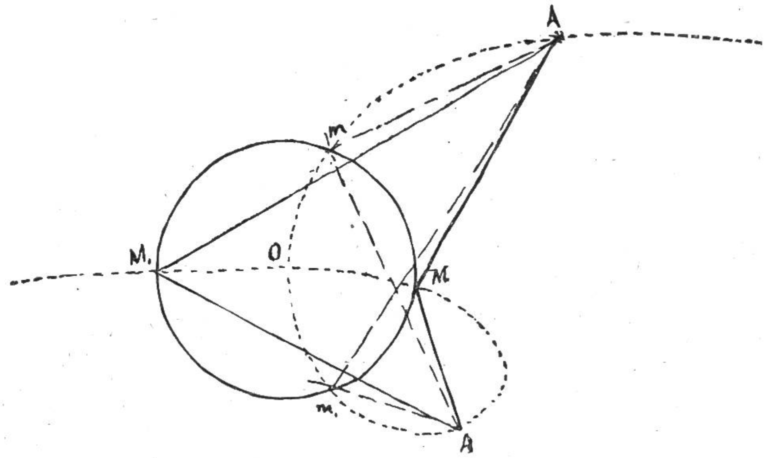


circonferenza si hanno due coppie di tangenti per i punti A ed A_1 e quattro punti di intersecazione M M_1 M_2 M_3 che sono punti del luogo dei punti brillanti.

Punti brillanti di una sfera data. — Si otterranno colla intersecazione della linea dei punti brillanti colla circonferenza della sfera nel piano dei tre punti O A A_1 cioè risolvendo le equazioni simultanee

$$(p+p_1)(x^2+y^2)y-(p-p_1)(x^2-y^2)q-2(q^2+pp_1)x\,y=o$$
$$x^2+y^2=r^2$$

Si giunge a delle funzioni di 4° grado sia per x che per y, quindi a quattro coppie di coordinate, che potranno essere tutte, oppur due sole, coppie reali determinanti quattro



punti oppure soltanto due, sulla sfera a seconda del raggio di questa.

Si noti però che soltanto due dei punti (M M_1) corrispondono a punti di riflessione dei raggi fisici, l'uno sulla parte convessa M l'altro sulla concava M_1 della sfera.

Gli altri due punti m m_1 rispondono soltanto alla condizione geometrica della bisezione degli angoli supplementari delle rette per A ed A_1 fatta dalle normali rispettive per il centro O.