**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 56 (1873)

**Artikel:** Ueber die zum Beweise des Satzes [Formel] erforderlichen Voraussetzungen

**Autor:** Schwarz, H.A.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-89988

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Ueber die zum Beweise des Satzes

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

**erforderlichen Voraussetzungen.**

Weitere Ausführung einer der mathematischen Section in der Sitzung vom 19. August über denselben Gegenstand gemachten Mittheilung.

Von **H. A. Schwarz.**

Für den die Umkehrbarkeit der Differentiationsordnung betreffenden in der Ueberschrift angeführten Fundamentalsatz der Differentialrechnung ist seit der Entdeckung desselben eine nicht unbeträchtliche Anzahl von wirklichen und vermeintlichen Beweisen veröffentlicht worden, ohne dass jedoch mit Grund behauptet werden könnte, es sei auch nur einer dieser Beweise gegenwärtig zu allgemeiner Anerkennung gelangt*).

*) Man vergleiche hierüber

*P. H. Blanchet:* Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville. Liouville, Journal de mathématiques, t. VI, 1841, pag. 67—68.

*L. Lindelöf:* Remarques sur les différentes manières d'établir la formule $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Acta societatis scientiarum Fennicae. T. VIII, 1867, Pars I, pag. 205—213.

*A. Genocchi:* Intorno ad un teorema di calcolo differenziale. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. IV, 1869, pag. 327—331.

Nicht einmal über die zum Beweise dieses Satzes nothwendigen Voraussetzungen scheint unter den mathematischen Schriftstellern Uebereinstimmung zu bestehen.

Um zunächst womöglich zu einem vollständigen Systeme von einander unabhängiger Bedingungen zu gelangen, deren Erfüllung für die Geltung des erwähnten Satzes nothwendig ist, werde ich in dem Folgenden einige Beweise desselben in Beziehung auf die den letzteren zu Grunde liegenden Voraussetzungen untersuchen, wobei ich es jedoch dahingestellt sein lasse, ob nicht andere Beweise dieses Satzes der Anforderung an Strenge in gleichem Grade genügen und den hier zur Sprache kommenden vorzuziehen sind.

Der von Lagrange herrührende Beweis für den in der Ueberschrift erwähnten Lehrsatz ist dem Vorwurfe mangelnder Strenge, welcher in Bezug auf eine Anzahl angeblicher Beweise dieses Satzes mit Recht ausgesprochen worden ist, nicht ausgesetzt, wenn die Entwickelung der Differenz $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ nach Potenzen von $h$ und $k$, auf welche dieser Beweis sich stützt, bis zu den Gliedern der zweiten Dimension einschliesslich fortgesetzt und die Grösse des nach Abzug dieser Glieder übrig bleibenden Restes mittelst eines bekannten von Cauchy herrührenden Satzes geschätzt wird.

Zu diesem Beweise ist ausser der Stetigkeit der Function $f(x, y)$ selbst erforderlich die Voraussetzung der Existenz und der Stetigkeit*) der beiden ersten und der vier zweiten partiellen Ableitungen der Function $f(x, y)$, welche wie folgt bezeichnet werden mögen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = f_{11}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = f_{12}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = f_{21}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = f_{22}.$$

*) Man vergleiche die Anmerkung auf pag. 220—221 des 74. Bandes von Borchardt's Journal.

Entwickelt man unter Zugrundelegung dieser Voraussetzungen $f(x_0+h,\ y_0+k)$ nach Potenzen von $h$ und die einzelnen Glieder dieser Entwickelung nach Potenzen von $k$, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=f_1(x_0,\ y_0)\ h+f_2(x_0,\ y_0)\ k+$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\left(f_{11}(x_0,y_0)+\alpha\right)h^2+2\left(f_{12}(x_0,y_0)+\beta\right)hk+\left(f_{22}(x_0,y_0)+\gamma\right)k^2\right\}.$$

In dieser Gleichung bezeichnen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ drei Grössen, welche dem absoluten Betrage nach beziehlich nicht grösser sind als die grössten Werthe der drei Differenzen

$$f_{11}(x,y)-f_{11}(x_0,y_0),f_{12}(x,y)-f_{12}(x_0,y_0),f_{22}(x,y)-f_{22}(x_0,y_0),$$

vorausgesetzt, dass die Veränderlichkeit von $x$ auf das Intervall $x_0\ \ldots\ x_0+h$, die Veränderlichkeit von $y$ auf das Intervall $y_0\ \ldots\ y_0+k$ beschränkt wird.

In Folge der vorausgesetzten Stetigkeit der Functionen $f_{11}, f_{12}, f_{22}$ haben also die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Eigenschaft, unendlich klein zu werden, wenn $h$ und $k$ unendlich klein werden. Entwickelt man hingegen unter Zugrundelegung derselben Voraussetzungen $f(x_0+h,\ y_0+k)$ nach Potenzen von $k$ und die einzelnen Glieder dieser Entwickelung nach Potenzen von $h$, so ergibt sich

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=f_1(x_0,y_0)\ h+f_2(x_0,\ y_0)\ k+$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\left(f_{11}(x_0,y_0)+\alpha'\right)h^2+2\left(f_{21}(x_0,y_0)+\beta'\right)hk+\left(f_{22}(x_0,\ y_0)+\gamma'\right)k^2\right\},$$

wo $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ analoge Bedeutung haben wie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Durch Vergleichung beider Ergebnisse erhält man, wenn man noch $k=h$ setzt

$$\left(f_{12}(x_0,y_0)-f_{21}(x_0,\ y_0)\right)h^2=h^2\,(h),$$

wo $(h)$ eine Grösse bezeichnet, welche unendlich klein wird, wenn $h$ unendlich klein wird. Hieraus folgt, dass die Differenz

$f_{12}(x_0, y_0) - f_{21}(x_0, y_0)$, deren Werth von $h$ nicht abhängt, keinen von Null verschiedenen Werth haben kann.

Es lässt sich nicht in Abrede stellen, dass dieser Beweis, gegen dessen Strenge, wie mir scheint, kein Einwand zu machen ist, an einer Unvollkommenheit leidet, dass derselbe nämlich die Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit der beiden partiellen Ableitungen $f_{11}$ und $f_{22}$ erfordert, während doch der zu beweisende Lehrsatz nur auf die beiden Ableitungen $f_{12}$ und $f_{21}$ unmittelbar Bezug hat. Es lassen sich aber sehr wohl Functionen von zwei Variablen $x$ und $y$ bilden, für welche unbeschadet der übrigen Voraussetzungen partielle Ableitungen, denen die Bezeichnung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ zukommen würde, nicht existiren, und es entsteht daher die Frage, ob die Voraussetzung der Existenz und der Stetigkeit der beiden Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ für die Geltung des Lehrsatzes $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ nothwendig ist oder nicht?

Diese Frage kann durch folgende Beweisanordnung beantwortet werden.

Es sei $f(x, y)$ eine für alle innerhalb eines gewissen Gebietes liegenden Werthe der beiden reellen Variablen $x$ und $y$ eindeutig erklärte, endliche und stetige Function derselben. Ebenso seien für das betrachtete Gebiet die folgenden vier partiellen Ableitungen dieser Function, nämlich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1,\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_2,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial y} = f_{12},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x} = f_{21}$$

endliche, stetige und eindeutige Functionen ihrer beiden Argumente.

Ein beliebiges innerhalb des betrachteten Gebietes liegendes Werthepaar der beiden Variablen $x$, $y$ werde mit $x_0$, $y_0$ bezeichnet. Es mögen $h$ und $k$ zwei so kleine von Null verschiedene positive Grössen bedeuten, dass alle

Werthepare $x$, $y$, für welche gleichzeitig die beiden Bedingungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + h, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_0 + k$$

erfüllt sind, ebenfalls dem betrachteten Gebiete angehören, auch möge für die folgenden Betrachtungen die Veränderlichkeit von $x$ und $y$ auf solche Werthepaare beschränkt werden, welche diesen beiden Bedingungen genügen.

Die grössten Werthe, welche die absoluten Beträge der Differenzen $f_{12}(x, y) - f_{12}(x_0, y_0)$ und $f_{21}(x, y) - f_{21}(x_0, y_0)$ unter der angegebenen Voraussetzung annehmen können, mögen beziehlich mit $\eta$ und $\eta'$ bezeichnet werden. Dann ergibt sich aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Functionen $f_{12}$ und $f_{21}$, dass man durch hinreichend kleine Wahl von $h$ und $k$ über die Kleinheit von $\eta$ und $\eta'$ gebieten kann.

Nun ist nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = f_{12}(x, y).$$

Also ist die Aenderung, welche die Function $f_1(x, y)$ beim Uebergange von $y$ aus dem Werthe $y_0$ in den Werth $y_0 + k$ erfährt, während $x$ hierbei ungeändert bleibt, gleich dem Producte aus der Aenderung $k$ des Argumentes und einem gewissen Mittelwerthe zwischen dem kleinsten und dem grössten unter denjenigen Werthen, welche die Ableitung $f_{12}(x, y)$ in diesem Intervalle annimmt. Bezeichnet man diesen Mittelwerth mit $f_{12}(x_0, y_0) + \varepsilon$, so ist $\varepsilon$ eine Grösse, deren Werth im Allgemeinen von $x$ abhängt, deren absoluter Betrag aber die Grösse $\eta$ jedenfalls nicht überschreitet. Man erhält hiernach

$$f_1(x, y_0 + k) - f_1(x, y_0) = k f_{12}(x_0, y_0) + k\varepsilon.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung ist gleich $\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)\right)$.

Also ist die Aenderung, welche die Function

$$f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$$

dadurch erfährt, dass $x$ aus dem Werthe $x_0$ in den Werth $x_0 + h$ übergeht, gleich dem Producte aus $h$ und einem gewissen Mittelwerthe zwischen dem kleinsten und dem grössten Werthe, den der Ausdruck $k f_{12} (x_0\ y_0) + k \varepsilon$ in dem betrachteten Intervalle annimmt. Dieser Mittelwerth kann jedenfalls in die Form $k f_{12} (x_0, y_0) + k (\eta)$ gesetzt werden, wo $(\eta)$ eine Grösse bezeichnet, deren absoluter Betrag die Grösse $\eta$ nicht überschreitet.

Auf diese Weise erhält man

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0) = \\ = h k f_{12} (x_0, y_0) + h k (\eta),$$

und durch ganz analoge Schlüsse, wenn man von der Gleichung

$$\frac{\partial f_2 (x, y)}{\partial x} = f_{21} (x, y)$$

ausgeht

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) = \\ = hk\ f_{21} (x_0, y_0) + hk (\eta'),$$

wo $(\eta')$ eine Grösse bezeichnet, deren absoluter Betrag die Grösse $\eta'$ nicht überschreitet.

Da die linken Seiten der beiden gewonnenen Gleichungen übereinstimmen, so ergibt sich

$$f_{12} (x_0, y_0) - f_{21} (x_0, y_0) = (\eta') - (\eta)$$

und hieraus folgt, da man über die Kleinheit des Ausdruckes auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung durch gehörig kleine Annahme von $h$ und $k$ verfügen kann, während die auf der linken Seite stehende Differenz von den Grössen $h$ und $k$ unabhängig ist, dass

$$f_{12} (x_0, y_0) = f_{21} (x_0, y_0).$$

Dieses sollte bewiesen werden.

Der vorstehende Beweis hat eine gewisse Analogie mit demjenigen Beweise, den Herr Serret in seinem Cours de

calcul différentiel et intégral*) für den in Rede stehenden Satz gegeben hat und dessen Autorschaft derselbe Herrn Ossian Bonnet zuschreibt. Entgegen der Formulirung des bezüglichen Satzes in dem Lehrbuche des Herrn Serret scheint mir jedoch die Voraussetzung der Stetigkeit der beiden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, deren Gleichheit bewiesen werden soll, für die Gültigkeit dieses Beweises nicht entbehrt werden zu können, da eine bei dem erwähnten Beweise angewendete Schlussfolgerung die Stetigkeit dieser beiden Ableitungen implicite zur Voraussetzung hat.

Diese Voraussetzung ist aber nicht bloss bei der Ossian Bonnet'schen und der oben angedeuteten Anordnung des Beweises unentbehrlich, sondern es ist überhaupt der Satz, welcher aussagt, dass die beiden Ausdrücke

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} f_1(x_0, y)\right]_{y=y_0} \text{ und } \left[\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y_0)\right]_{x=x_0}$$

vorausgesetzt, dass dieselben eine bestimmte Bedeutung haben, dem Werthe nach mit einander übereinstimmen, nicht mehr allgemein richtig, wenn die Voraussetzung fallen gelassen wird, dass die beiden Ableitungen $f_{12}$ und $f_{21}$ in der Umgebung des Werthepaares $x_0, y_0$ stetige Functionen ihrer beiden Argumente sind.

Hiervon kann man sich durch folgendes Beispiel überzeugen. Setzt man

$$f(x, y) = y^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} - x^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

mit der Bestimmung, dass stets derjenige Zweig der Function arcus tangens zu wählen ist, dessen Werth zwischen

*) Paris 1868, Tome I, pag. 76—78.

$-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist diese Function nebst ihren beiden ersten partiellen Ableitungen

$$f_1(x, y) = y - 2x \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad f_2(x, y) = -x + 2y \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$$

für jeden ganz im Endlichen liegenden Bereich endlich, stetig und eindeutig.

Für diese Function ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(0, y) = +1, \text{ dagegen } \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, 0) = -1.$$

Es haben also in diesem Falle die beiden Ausdrücke

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} f_1(0, y)\right]_{y=0} \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, 0)\right]_{x=0}$$

nicht denselben Werth.

Auch bei dem vorliegenden Beispiele sind die beiden Functionen

$$f_{12}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) \text{ und } f_{21}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y)$$

für jedes bestimmte Werthepaar $x$, $y$ eindeutig erklärt; wenn $x$ und $y$ nicht gleichzeitig den Werth Null haben, erhält man

$$f_{12}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} = f_{21}(x, y)$$

während

$$f_{12}(0, 0) = +1, \quad f_{21}(0, 0) = -1 \text{ ist.}$$

Keine der beiden Functionen $f_{12}$ und $f_{21}$ ist aber in der Umgebung des Werthepaares $x = 0, y = 0$ eine stetige Function ihrer beiden Argumente, denn es ist z. B., wenn

$x \gtrless 0$ ist $f_{12}(x, 0) = -1$, während $f_{12}(0, 0) = +1$ ist.

Das angeführte Beispiel zeigt also, dass die Voraussetzung der Existenz und Eindeutigkeit der beiden Ableitungen $f_{12}$ und $f_{21}$ allein nicht hinreicht, um für ein bestimmtes

Werthepaar $x_0$, $y_0$ den Schluss $f_{12}(x_0, y_0) = f_{21}(x_0, y_0)$ machen zu können.

Wenn aber von den im Vorhergehenden*) angegebenen Voraussetzungen bloss die auf eine der beiden Ableitungen $f_{12}$, $f_{21}$, z. B. die auf die Ableitung $f_{21}$ sich beziehenden fallen gelassen werden, so ergibt sich mit Hülfe der Formel

$$f(x,y) - f(x,y_0) - f(x_0,y) + f(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} f_{12}(x,y)\, dy$$

aus dem Lehrsatze über die Umkehrbarkeit der Integrationsordnung bei einem Doppelintegrale die Existenz und Stetigkeit der Ableitung $f_{21}$ als eine nothwendige Folge der übrigen Voraussetzungen. Wenn nämlich nach der Umkehrung der Integrationsfolge in Bezug auf $y$ differentiirt wird, so ergibt sich

$$f_2(x,y) - f_2(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} f_{12}(x,y)\, dy,$$

folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = f_{12}(x,y).$$

Von der Richtigkeit der vorhin ausgesprochenen Behauptung, dass die auf die Functionen $f$, $f_1$, $f_2$, $f_{12}$ sich beziehenden Voraussetzungen bereits ausreichen, um die Existenz der Ableitung $f_{21}$ und deren Uebereinstimmung mit der Ableitung $f_{12}$ zu schliessen, kann man sich aber auch überzeugen, ohne einen der Integralrechnung angehörenden Lehrsatz zu benutzen und zwar auf folgende Weise.

Das Werthepaar $x,y$ möge der Bedingung unterworfen werden, dem Gebiete

$$x_0 \leqq x \overline{\overline{<}} x_0 + h, \quad y_0 \leqq y \overline{\overline{<}} y_0 + k$$

anzugehören. Man bezeichne mit $h', k', k''$ beziehungsweise

*) pag. 262.

die Maxima der absoluten Beträge derjenigen Werthe, welche die drei Differenzen

$f_{12}(x,y_0)-f_{12}(x_0,y_0)$, $f_{12}(x,y)-f_{12}(x,y_0)$, $f_2(x,y)-f_2(x,y_0)$

unter der angegebenen Voraussetzung annehmen können, so kann man in Folge der Voraussetzung, dass die beiden Functionen $f_{12}$ und $f_2$ stetige Functionen ihrer beiden Argumente sind, durch gehörig kleine Wahl von $h$ über die Kleinheit der Grösse $h'$ und durch gehörig kleine Wahl von $k$ über die Kleinheit der Grössen $k'$ und $k''$ gebieten.

Nun ist der absolute Betrag von $f_{12}(x, y)-f_{12}(x_0, y_0)$ nicht grösser als $h'+k'$, also ist der absolute Betrag von $f_1(x, y_0+k)-f_1(x, y_0)-f_{12}(x_0, y_0)k$ nicht grösser als $kh'+kk'$. Hieraus ergibt sich, dass die Grösse

$$A=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)+ \\ +f(x_0, y_0)-f_{12}(x_0, y_0)hk$$

dem absoluten Betrage nach nicht grösser ist als $hkh'+hkk'$.

Ebenso ergibt sich, dass die beiden Ausdrücke

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)-f_2(x_0+h, y_0)k$$

und

$$f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)-f_2(x_0, y_0)k$$

einzeln dem absoluten Betrage nach nicht grösser sind als $kk''$, dass daher ihre Differenz

$$B=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0+k)+ \\ +f(x_0, y_0)-f_2(x_0+h, y_0)k+f_2(x_0, y_0)k$$

dem absoluten Betrage nach nicht grösser ist als $2kk''$.

Setzt man nun $A-B=kC$, so ergibt sich, dass der absolute Betrag der Grösse

$$C=f_2(x_0+h, y_0)-f_2(x_0, y_0)-f_{12}(x_0, y_0)h$$

die Grösse

$$hh'+hk'+2k''$$

nicht überschreitet.

Dieser Schluss gilt, wie klein man auch die von Null verschiedene Grösse $k$ annehmen möge.

Da man nun durch gehörig kleine Wahl von $k$ über

die Kleinheit von $k'$ und $k''$ und somit auch über die Kleinkeit von $hk'+2k''$ zu gebieten vermag, so folgt hieraus, dass die Grösse C, deren Werth von der Wahl der Grösse $k$ unabhängig ist, dem absoluten Betrage nach nicht grösser als $hh'$ sein kann.

Ueber die Kleinheit von $h'$ kann man aber durch hinreichend kleine Annahme von $h$ gebieten.

Unter den angegebenen Voraussetzungen besteht also, da für negative Werthe von $h$ analoge Schlüsse gelten, eine Gleichung von der Form

$$f_2\,(x_0+h, y_0) - f_2\,(x_0, y_0) = f_{12}\,(x_0, y_0)\,h + h\,(h)$$

und zwar bezeichnet in dieser Gleichung $(h)$ eine Grösse, welche unendlich klein wird, wenn $h$ unendlich klein wird.

Hieraus folgt, da die vorstehenden Schlüsse für alle Werthepaare $x_0, y_0$ gelten, für welche die Voraussetzungen erfüllt sind, dass die Function $f_2\,(x, y)$ in Beziehung auf $x$ eine partielle Ableitung $f_{21}\,(x, y)$ besitzt und dass diese Ableitung mit der Ableitung $f_{12}\,(x, y)$ übereinstimmt. Dieses sollte gezeigt werden.

Die Voraussetzungen, von denen bei dem zuletzt besprochenen Beweise Gebrauch gemacht wird, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

»Eine für alle Werthepaare zweier stetig veränderlichen reellen Variablen, $x$, $y$, welche einer stetigen zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit angehören, eindeutig erklärte Function $f\,(x, y)$ besitzt zwei partielle Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial f\,(x,y)}{\partial x} = f_1\,(x,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f\,(x,y)}{\partial y} = f_2\,(x,y)$$

und eine partielle Ableitung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial f_1\,(x,y)}{\partial y} = f_{12}\,(x,y).$$

Jede dieser drei Ableitungen ist eine eindeutige und stetige Function ihrer beiden Argumente.«

Die Gesammtheit dieser Voraussetzungen hat die Geltung des Satzes

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

zur Folge. Wird hingegen die Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitung $f_{12}(x, y)$ fallen gelassen, so kann aus den übrigen Voraussetzungen allein die Geltung des erwähnten Satzes nicht mehr geschlossen werden.