Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 79 (1896)

Vereinsnachrichten: Mathématiques

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Mathématiques.

Président : M. le Dr C.-F. Geiser, prof. à Zurich.
Secrétaire : M. le Dr F. Rudio, prof. à Zurich.

G. Oltramare. Le calcul de généralisation. — A. Hurwitz. Sur la théorie des maxima et des minima géométriques. — J. Franel. Sur une formule fondamentale de Kronecker. — J.-H. Graf. Dérivation des formules Besseliennes concernant le théorème d'addition.

M. G. Oltramare, professeur à l'Université de Genève, présente une note concernant *la définition du calcul de généralisation.*

Le *calcul de généralisation,* que nous considérons comme ne pouvant s'appliquer qu'aux fonctions uniformes d'un nombre quelconque de variables, a pour base la représentation de ces fonctions à l'aide d'une opération symbolique d'une nature telle qu'on puisse effectuer les principales opérations auxquelles elles sont soumises par de très simples calculs algébriques.

Pour donner une définition précise de cette opération que nous désignons sous le nom de *généralisation d'une fonction.*

Soit $\varphi\,(a,\ b,\ c,\ldots)$ une fonction quelconque uniforme d'une ou plusieurs variables $a,\ b,\ c,\ldots$ et cherchons à reconnaître s'il existe une opération distributive dont nous désignerons par G la caractéristique qui, appliquée à cette fonction, aurait pour effet d'éliminer les nouvelles variables $u,\ v,\ w,\ldots$ dans l'expression $e^{au+bv+cw+\cdots}$ de telle sorte qu'il en résulterait l'identité

$$Ge^{au+bv+cw+\cdots} = \varphi\,(a, b, c\ldots) \qquad (1)$$

Proposons-nous, en outre, de déterminer la valeur de l'expression symbolique

$$G\Psi\,(u, v, w\ldots) \tag{2}$$

en appliquant à la fonction uniforme $\Psi\,(u, v, w,\ldots)$ l'opération que nous aurons reconnue capable de satisfaire à l'égalité précédente.

Pour répondre à ces deux questions, désignons par x, y, z,... des quantités que nous considérerons comme de simples constantes et en substituant dans l'égalité (1) les valeurs $x + a$, $y + b$, $z + c$... à la place des variables a, b, c, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} Ge^{xu + yv + zw + \cdots} \times e^{au + bv + cw + \cdots} \\ = \varphi\,(x + a,\ y + b,\ z + c\ldots) \end{aligned} \tag{3}$$

Cela posé, si nous écrivons l'expression (2) sous la forme

$$Ge^{xu + yv + zw + \cdots}\ \Psi\,(u, v, w\ldots) \tag{4}$$

nous pourrons, à ces formules (3) et (4) substituer les formules plus simples

$$Ge^{au + by + cw + \cdots} = \varphi\,(x + a,\ y + b,\ z + c\ldots) \tag{5}$$

$$G\Psi\,(u, v, w\ldots) \tag{6}$$

en convenant et en admettant de la manière la plus expresse que, toutes les fois qu'on aura à effectuer l'opération G sur une fonction des variables u, v, w... on devra la considérer comme préalablement multipliée par le facteur $e^{au + yv + zw + \cdots}$ que selon les cas nous ferons figurer ou que nous supprimerons, puisque par convention la fonction est toujours censée multipliée pas ce facteur.

Pour déterminer en quoi consiste cette opération distributive G, nous développerons les deux membres de

l'identité (5) en séries ordonnées suivant les puissances des variables $a, b, c, \ldots$ en remarquant que dans le premier membre

$$e^{au+bv+cw+\cdots} = 1 + \frac{au+bv+cw+\ldots}{1} + \frac{(au+bv+cw+\ldots)^2}{1.2} + \ldots$$

et que la fonction du second membre se développe par la formule de Taylor étendue à une fonction de plusieurs variables.

Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} G(1 + au + \frac{a^2u^2}{1.2} + \ldots &= \varphi(x, y, z\ldots) + a\frac{d\varphi}{dx} + \frac{a^2}{1.2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \ldots \\ + bv + 2\frac{ab}{1.2}uv + \ldots &\qquad + b\frac{d\varphi}{dy} + 2\frac{ab}{1.2}\frac{d^2\varphi}{dxdy} + \ldots \\ + cw + \frac{b^2v^2}{1.2} + \ldots &\qquad + c\frac{d\varphi}{dz} + \frac{b^2}{1.2}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \ldots \\ + \ldots + \ldots\ ) &\qquad + \ldots \quad + \ldots \end{aligned}$$

En effectuant l'opération G sur chaque terme et en identifiant les coefficients des différentes puissances des variables on obtient:

$$G1 = \varphi(x, y, z\ldots)$$

$$\begin{aligned} Gu &= D_x\,\varphi(x, y, z\ldots) & Gu^2 &= D_x^2\,\varphi(x, y, z\ldots) \\ Gv &= D_y\,\varphi(x, y, z\ldots) & Guv &= D_x D_y\,\varphi(x, y, z\ldots) \\ Gw &= D_y\,\varphi(x, y, z\ldots) & Gv^2 &= D_y^2\,\varphi(x, y, z\ldots), \text{etc.} \end{aligned}$$

. . . . . .

Nous devrons donc admettre comme conséquence des considérations dans lesquelles nous venons d'entrer que:

Si l'on avait à représenter la valeur de l'expression symbolique $G\Psi(u, v, w\ldots)$ *en posant comme équation de définition de la fonction* φ

$$Ge^{au+bv+cw+\cdots} = \varphi(x+a,\ y+b,\ z+c\ldots) \qquad (7)$$

il suffirait de remplacer dans cette expression u *par* D_x, v *par* D_x, w *par* D_z, *etc. et de déterminer la valeur de l'expression*

$$\Psi(D_x, D_y, D_z \ldots)\varphi(x, y, z \ldots) \qquad (8)$$

lorsqu'on conçoit cette fonction Ψ *développée en série suivant les puissances des caractéristiques* D_x, D_y, D_z..., *envisagées comme de simples variables et qu'on effectue tous les coefficients différentiels indiqués.*

Cela admis, le calcul de généralisation, effectué sur une fonction $\Psi(u, v, w...)$, aura pour but de rechercher la valeur de cette expression (8), valeur qu'on peut considérer comme complètement déterminée à l'aide de l'équation (7) lors même que la fonction Ψ ne paraîtrait pas développable.

Pour nous convaincre qu'une fonction quelconque uniforme peut, dans tous les cas, être considérée comme développable suivant les puissances de ses variables, soient α, β, γ... des constantes, en posant $u - a = p$, $v - \beta = q$, $w - \gamma = r$..., nous pourrons écrire l'identité

$$\Psi(u, v, w \ldots) = \Psi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r \ldots)$$

Si, maintenant, nous développons le second membre de cette égalité par le théorème de Taylor et si nous remplaçons dans le résultat p, q, r... par leurs valeurs la fonction $\Psi(u, v, w...)$ ou $\Psi(D_x, D_y, D_z...)$ pourra être considérée comme développée suivant les puissances de ses variables u, v, w...

La représentation d'une fonction à l'aide de l'opération symbolique G qui nous permet de poser pour toute fonction $\varphi(a, b, c...)$

$$\varphi(x + a, y + b, z + c \ldots) = Ge^{au + bv + cw + \cdots}$$

présente le grand avantage d'exprimer, sous cette même forme généralisatrice, non seulement la fonction elle-même, mais encore tout coefficient différentiel et toute intégrale par rapport aux variables a, b, c..., ou x, y, z... par une opération algébrique qui consiste à multiplier le second membre, sous le signe G. par certaines puissances positives ou négatives de u, v, w...

On déduit en effet de l'égalité précédente

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{G}ue^{au+bv+cw+\ldots} \qquad \frac{d\varphi}{db} = \frac{d\varphi}{dy} = \mathrm{G}ve^{au+bv+cw+\ldots}$$

$$\int \varphi dx = \mathrm{G}\frac{1}{u}e^{au+bv+cw+\ldots} \qquad \iint \varphi dxdy = \mathrm{G}\frac{1}{uv}e^{au+bv+cw+\ldots}$$

et généralement

$$\frac{d^{m+n}\varphi\cdots}{da^m db^n\ldots} = \frac{d^{m+n}\varphi\cdots}{dx^m dy^n\ldots} = \mathrm{G}u^m v^n e^{au+bv+cw+\ldots}$$

$$^m\int^n\int \varphi dx^m dy^n = \mathrm{G}\frac{1}{u^m v^n}e^{au+bv+cw+\ldots}$$

On comprend ainsi facilement qu'en passant par la forme généralisatrice on pourra considérablement simplifier le calcul et parvenir à des résultats qui, transformés et présentés sous la forme ordinaire, donneront les solutions que l'on cherche et auxquelles on ne serait arrivé que difficilement et peut-être auxquelles on ne serait pas parvenu sans l'emploi de ce nouveau mode de représentation.

M. le prof. A. Hurwitz, de Zurich, fait une communication *sur la théorie des maxima et minima géométriques.* L'auteur remarque que les méthodes simples employées autrefois par les géomètres, en particulier par L'Huillier

et Steiner, pour traiter les questions de maximum et de minimum donnent prise à la même critique que le principe de Dirichlet, en ce sens que ces méthodes supposent implicitement l'existence du maximum et respectivement du minimum. Toutefois, à l'aide d'une proposition de Weierstrass, la preuve d'existence qui faisait défaut peut être donnée et il en résulte que les considérations de L'Huillier et de Steiner reprennent leur valeur au moyen d'un complément qui devient nécessaire dans la plupart des cas. L'auteur précise ces remarques générales par quelques exemples simples et en particulier par la donnée suivante: « Parmi tous les polygones de n côtés ayant une même surface donnée, déterminer celui pour lequel la somme des λ^{emes} puissances des côtés devient un minimum, où λ exprime une constante réelle et positive ». Le minimum a toujours lieu pour le polygone régulier de n côtés, si $\lambda \geqq 1$. Le cas de $\lambda < 1$ présente des difficultés insurmontables. On peut montrer dans ce cas que déjà pour $n=5$ par un choix convenable de λ, ce n'est point le polygone régulier de 5 côtés qui parmi tous les polygones de 5 côtés donne lieu à la moindre somme des λ^{emes} puissances des côtés.

M. le prof. Franel, de Zurich, fait une communication *sur une formule fondamentale de Kronecker*. Soient a, b, c des quantités imaginaires telles que la partie réelle de l'expression $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (x et y étant réels), soit une forme positive et

$$F(s) = \Sigma \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}, \qquad (1)$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de m et de n, le système $m = o$, $n = o$ excepté. La fonc-

tion $F(s)$ est développable en série toujours convergente de la forme

$$\frac{A_{-1}}{s-1} + A_0 + A_1(s-1) + \ldots;$$

il s'agit d'exprimer le coefficient A_0 au moyen des fonctions ϑ d'argument 0. A cet effet, faisons

$$F_m(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}, \quad F_0(s) = \frac{1}{c^s}\zeta(2s),$$

on aura

$$F(s) = 2\left[\frac{\zeta(2s)}{c^s} + \sum_{m=1}^{m=\infty} F_m(s)\right]. \qquad (2)$$

Désignons maintenant par $\Psi_m(s)$ la différence

$$F_m(s) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2 + 2bmx + cx^2)^s} =$$

$$= F_m(s) - \frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(s-\frac{1}{2}).\,c^{s-1}}{\Gamma(s).\,(\sqrt{D})^{2s-1}.\,m^{2s-1}}.$$

De la formule (2) résultera

$$F(s) - 2\,\frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(s-\frac{1}{2})\,.\,c^{s-1}}{\Gamma(s)(\sqrt{D})^{2s-1}}\,.\,\zeta(2s-1) =$$

$$= 2\,\frac{\zeta(2s)}{c^s} + a\sum_{m=1}^{m=\infty} \psi_m(s).$$

Or le second membre converge uniformément dans toute région finie du plan situé à droite de la parallèle à l'axe des y d'abscisse $\frac{1}{2}$. Ce second membre peut donc se développer en série de la forme $B_0 + B_1(s-1) + \ldots$ et le calcul de B_0 conduit immédiatement à la formule de Kronecker.

M. le prof. Dr J.-H. Graf, de l'Université de Berne, démontre une *dérivation des formules Besseliennes concernant le théorême d'addition*[1]. D'après son ancien maître, l'illustre Schläfli (mort 1895), on pose

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\,xy \cos\varphi},\ pgh = gx - hy,\ p = hx - gy$$

et en partant de l'expression

$$\overset{a}{\mathrm{J}}(p) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(-\mathrm{N},\,o)} e^{\frac{1}{2}p(t-\frac{1}{t})}\, t^{-a-1}\, dt$$

où (N, o) signifie le chemin d'intégration non fermé partant de $-\infty$ en sens positif par zéro et retournant à $-\infty$,

on obtient

$$\overset{a}{\mathrm{J}}(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} \overset{a+\lambda}{\mathrm{J}}(x)\, \overset{\lambda}{\mathrm{J}}(y) \left(\frac{g}{h}\right)^{\lambda}.$$

Comme

$$p^2 = x^2 + y^2 - \frac{g^2 + h^2}{gh}\, xy,\ \frac{g}{h} = e^{i\varphi}$$

$$\overset{a}{\mathrm{J}}(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} \overset{a+\lambda}{\mathrm{J}}(x)\, \overset{\lambda}{\mathrm{J}}(y)\, e^{i\lambda\varphi}$$

$$\overset{a}{\mathrm{J}}(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} \overset{a+\lambda}{\mathrm{J}}(x)\, \overset{\lambda}{\mathrm{J}}(y) \cos\lambda\varphi.$$

Remplaçant

$$g \text{ par } \frac{1}{g},\ h \text{ par } \frac{1}{h},\ \lambda \text{ par } -\lambda,\ a \text{ par } -a,$$

on obtient

$$\overset{-a}{\mathrm{J}}(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda}\, \overset{-a-\lambda}{\mathrm{J}}(x)\, \overset{\lambda}{\mathrm{J}}(y) \cos\lambda\varphi$$

et enfin par la relation Schläflienne

[1] Consultez les travaux de C. Neumann, E. Lommel, P. Sonine, L. Gegenbauer et E. Heine.

$$\overset{a}{\mathrm{K}}(p) = \operatorname{cotg} a\,\pi.\ \overset{a}{\mathrm{J}}(p) - \frac{1}{\sin a\pi}\ \overset{-a}{\mathrm{J}}(p)$$

$$\overset{a}{\mathrm{K}}(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} \overset{a+\lambda}{\mathrm{K}}(x)\ \overset{\lambda}{\mathrm{J}}(y) \cos \lambda\varphi.$$

M. Graf parle ensuite de la *Correspondance de Schläfli et J. Steiner*, qu'il vient de publier.