Projektiver Beweis der absoluten Parallelenkonstruktion von Lobatschefskij

Autor(en): **Grossmann, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **95 (1912)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-90206

3. Prof. Dr. M. Grossmann (Zürich): *Projektiver Beweis der absoluten Parallelenkonstruktion von Lobatschefskij.*

Es sei A B C D ein ebenes Viereck, das bei A, B und D rechte Winkel hat. Dann ist der Winkel bei der vierten Ecke C ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel, je nachdem die Geometrie von *Lobatschefskij, Euklid* oder *Riemann* gelten soll, und gleichzeitig ist B C grösser, gleich oder kleiner als A D. Im ersten Falle schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $BC = r$ die Gerade C D in zwei Punkten S und T, und man kann auf trigonometrischem Wege zeigen, dass die Geraden A S und A T die *Parallelen* sind, die man durch den Punkt A zur Geraden B C ziehen kann.[1]

Es ist wiederholt versucht worden, diese Parallelenkonstruktion geometrisch zu beweisen; aber die bisherigen Beweise sind keineswegs einfach und bestehen überdies in einer nachträglichen Verifikation, welche die tieferen Zusammenhänge nicht erkennen lässt.[2]

Nun bietet aber die von *Cayley* und *Klein* entdeckte projektive Formulierung der Sätze der nichteuklidischen Geometrie, wonach die metrischen Eigenschaften einer ebenen Figur projektive Beziehungen derselben zum absoluten Kegelschnitt der Ebene sind, die Mittel zu einem sehr einfachen und anschaulichen Beweis.

Es sei in *Fig. 1* w der absolute Kegelschnitt, A irgend ein eigentlicher Punkt, k der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem beliebigen Radius r, und a die Abstandslinie zu einem beliebigen Durchmesser x des Kreises, d. h. der Ort aller Punkte, die von x den Abstand r haben.

Zwischen den drei Kegelschnitten w, k und a bestehen folgende Beziehungen: 1) w und k sind in doppelter Berührung in den imaginären Schnittpunkten mit der absoluten Polaren von A. 2) w und a sind in doppelter Berührung in den Schnitt-

[1] *Engel* und *Stæckel:* Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Bd. I. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. S. 256.

[2] Vgl. insbesondere *Engel:* Zur nichteuklidischen Geometrie, Leipzig, Ber. Ges. Wiss., 50, 181-191 (1898).
Schur: Ueber die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann. 55, 265-292 (1901).

punkten mit der Axe x der Abstandslinie. 3) k und a sind in doppelter Berührung in den Schnittpunkten mit dem Durchmesser y, der in A rechtwinklig zu x ist.

Nun sei C ein beliebiger Punkt der Abstandslinie a, B seine Normalprojektion auf den Durchmesser x, D seine Normalprojektion auf den Durchmesser y, S der Schnittpunkt von C D mit dem Kreis k. Dann gilt es zu beweisen, dass A S und B C

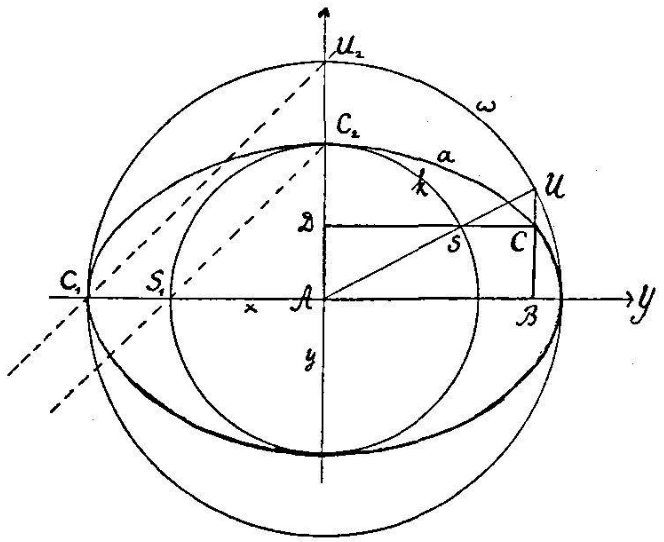

Fig. 1.

parallel sind, d. h. dass der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ein Punkt U des absoluten Kegelschnittes w ist.[1]

S und C sind entsprechende Punkte in der Kollineation C_{ka} die k in a überführt, den Durchmesser y als Axe und dessen absoluten Pol Y als Zentrum hat.

C und U sind entsprechende Punkte in der Kollineation C_{aw}, die a in w überführt, den Durchmesser x als Axe und dessen Pol X als Zentrum hat.

Es ist zu beweisen, dass S und U in gerader Linie mit A liegen, d. h. entsprechend sind in der Kollineation C_{kw}, die k in w

[1] Deutet man w als *Kreis der euklidischen Geometrie* und wählt man A im Mittelpunkt desselben, so wird k ein Kreis mit diesem Mittelpunkt, die Abstandslinie a aber eine Ellipse, für die w und k die Kreise über den Hauptaxen sind. Unsere Figur stellt dann die bekannte Konstruktion der Ellipse aus diesen beiden Kreisen dar.

überführt, A als Zentrum und die absolute Polare von A, d. i. die Gerade X Y als Axe hat.

Die Kollineationen C_{ka} und C_{aw} sind nicht unabhängig von einander; denn einmal liegt das Zentrum jeder auf der Axe der andern, und dann sind die Charakteristiken beider einander gleich, da

$$1)\ YAS_1C_1 \;\overline{\wedge}\; XAC_2U_2,$$

weil die Geraden S_1C_2 und C_1U_2 sich auf XY schneiden.

Das Produkt der beiden Kollineationen C_{ka} und C_{aw} ist somit eine Kollineation für die A ein Doppelpunkt, XY eine Doppelgerade ist. Um nachzuweisen, dass die Kollineation in A ein Zentrum hat, hat man zu zeigen, dass XY eine Axe ist, d. h. dass jeder Punkt von XY ein Doppelpunkt ist.

In *Fig. 2* sei C_{ka} gegeben durch das Zentrum Y, die Axe y, das Paar S_1, C_1. Ferner C_{aw} durch das Zentrum X, die Axe x, das Paar C_2, U_2, so dass die Projektivität 1) erfüllt ist. S_3 sei ein beliebiger Punkt der Graden XY. Man konstruire C_3 mit-

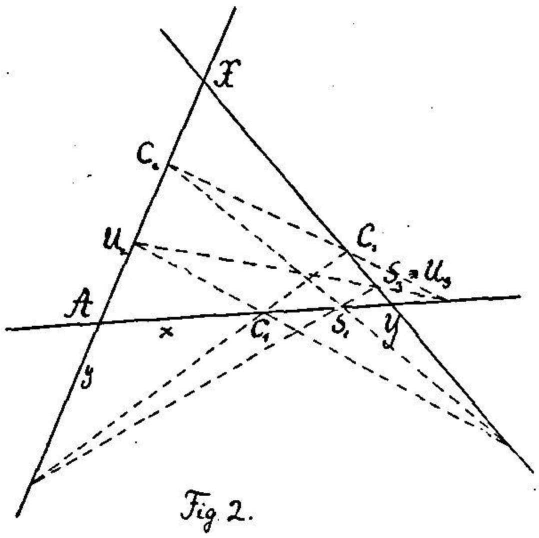

Fig. 2.

telst des Paares S_1, C_1, hierauf U_3 aus C_3 mittelst des Paares C_2, U_2, und findet $U_3 \equiv S_3$. Denn es ist nach den erwähnten Konstruktionen

$$YAS_1C_1 \;\overline{\wedge}\; YXS_3C_3,$$

$$XAC_2U_2 \;\overline{\wedge}\; XYC_3U_3,$$

also wegen 1) auch

$$YXS_3C_3 \;\overline{\wedge}\; XYC_3U_3 \;\overline{\wedge}\; YXU_3C_3,$$

woraus, nach dem *v. Staudt*'schen Fundamentalsatz der projektiven Geometrie

$$U_3 \equiv S_3.$$

4. M. le Prof. Dr D. Mirimanoff (Genève): *Sur quelques problèmes concernant le jeu de trente et quarante.*

La théorie du jeu de trente et quarante, donnée pour la première fois par Poisson en 1820, a été complétée en plusieurs points par Oettinger, dans un travail consciencieux qui semble avoir passé inaperçu. Bien que les déductions de Poisson et Oettinger présentent des lacunes, je n'aurais pas cru utile de revenir sur ce sujet, si Bertrand, en traitant l'un des problèmes du jeu, n'était arrivé à des résultats ne concordant pas entièrement avec ceux d'Oettinger et de Poisson; le désaccord n'est pas grand, mais il existe, et cela suffirait pour justifier une étude nouvelle.

Pour simplifier le problème, Bertrand a introduit une hypothèse qui modifie les conditions du jeu; il était facile de refaire ses calculs et je dirai tout de suite que plusieurs de ses résultats contiennent des décimales inexactes.

Bien plus difficile est l'étude des problèmes réels. Je montrerai comment on pourrait compléter l'analyse d'Oettinger. Quant à celle de Poisson, elle exigerait des développements trop longs pour trouver place dans cette communication.

1. Le jeu de trente et quarante se joue avec six jeux de 52 cartes. Le banquier abat une, deux, trois... cartes, jusqu'à ce que la somme des points ait dépassé trente (les figures valant dix). Cette première rangée est suivie par une seconde. Le joueur parie pour l'une des rangées et gagne, si le nombre des points de sa rangée est plus petit que celui de l'autre. Si les deux rangées ont 31 points chacune, le banquier a droit à la moitié des mises. Tel est le seul avantage du banquier. Pour le calculer, il suffit donc d'évaluer la probabilité d'abattre deux rangées de 31 points chacune. D'où le problème fondamental suivant: Quelle est la probabilité d'abattre une rangée de