also wegen 1) auch

$$YXS_3C_3 \overline{\wedge} XYC_3U_3 \overline{\wedge} YXU_3C_3,$$

woraus, nach dem *v. Staudt*'schen Fundamentalsatz der projektiven Geometrie

$$U_3 \equiv S_3.$$

4. M. le Prof. Dr D. Mirimanoff (Genève): *Sur quelques problèmes concernant le jeu de trente et quarante.*

La théorie du jeu de trente et quarante, donnée pour la première fois par Poisson en 1820, a été complétée en plusieurs points par Oettinger, dans un travail consciencieux qui semble avoir passé inaperçu. Bien que les déductions de Poisson et Oettinger présentent des lacunes, je n'aurais pas cru utile de revenir sur ce sujet, si Bertrand, en traitant l'un des problèmes du jeu, n'était arrivé à des résultats ne concordant pas entièrement avec ceux d'Oettinger et de Poisson; le désaccord n'est pas grand, mais il existe, et cela suffirait pour justifier une étude nouvelle.

Pour simplifier le problème, Bertrand a introduit une hypothèse qui modifie les conditions du jeu; il était facile de refaire ses calculs et je dirai tout de suite que plusieurs de ses résultats contiennent des décimales inexactes.

Bien plus difficile est l'étude des problèmes réels. Je montrerai comment on pourrait compléter l'analyse d'Oettinger. Quant à celle de Poisson, elle exigerait des développements trop longs pour trouver place dans cette communication.

1. Le jeu de trente et quarante se joue avec six jeux de 52 cartes. Le banquier abat une, deux, trois... cartes, jusqu'à ce que la somme des points ait dépassé trente (les figures valant dix). Cette première rangée est suivie par une seconde. Le joueur parie pour l'une des rangées et gagne, si le nombre des points de sa rangée est plus petit que celui de l'autre. Si les deux rangées ont 31 points chacune, le banquier a droit à la moitié des mises. Tel est le seul avantage du banquier. Pour le calculer, il suffit donc d'évaluer la probabilité d'abattre deux rangées de 31 points chacune. D'où le problème fondamental suivant: Quelle est la probabilité d'abattre une rangée de

i points? Désignons cette probabilité par p_i. Il est utile de réunir les rangées en groupes que j'appellerai *familles*. Je dirai que deux rangées appartiennent à une même famille, si elles se composent de cartes de même valeur. Désignons par n_i le nombre des familles de i points. J'ai calculé n_i pour tous les i ne dépassant pas 31. En particulier il existe 4231 familles de rangées ayant chacune 31 points.

Dans le jeu de trente et quarante les cartes ne sont pas remises dans le jeu; la probabilité p_i dépend donc du nombre et de la valeur des cartes sorties. Mais considérons le cas hypothétique où les cartes sorties seraient remises dans le jeu et soit P_i la probabilité d'abattre une rangée de i points dans cette hypothèse. Bertrand s'est borné à ce cas limite, déjà envisagé par Poisson et Oettinger, mais un certain nombre des valeurs des P_i calculées par lui contiennent des décimales inexactes. En particulier $P_{31} = 0{,}148061$ (plus exact. 0,14806086) et non 0,148218; par conséquent l'avantage du banquier dans cette hypothèse serait $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0219220$ et non $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0219686$.

2. C'est dans l'étude du problème réel que la notion de famille m'a été particulièrement utile. Pour évaluer la probabilité p_i il suffit de calculer le coefficient de t^i dans le développement de $(1+ut)^{x_1}(1+ut^2)^{x_2} \ldots (1+ut^{10})^{x_{10}}$, $x_1, x_2 \ldots x_{10}$ désignant le nombre des as, des deux, etc., au moment où l'on abat la rangée. Ce coefficient est un polynome de la forme $a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_k u^k$. Posons $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}$ et soit b_m le coefficient binomial $\binom{s}{m}$; la probabilité d'abattre une rangée de m cartes et de i points est égale à

$$\frac{a_m}{b_m}, \text{ d'où } p_i = \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m}.$$

Mais est-il nécessaire de calculer toutes ces fractions? Oettinger néglige celles dont l'indice est supérieur à une certaine limite. J'ai cherché à me rendre compte du degré d'approximation obtenu de cette manière, en décomposant $\frac{a_m}{b_m}$ en une somme de probabilités partielles relatives aux différentes familles de m cartes et de i points; or, il est facile de calculer la borne supérieure e_m de ces probabilités partielles; en la multipliant par le nombre des familles de m cartes on en déduit une borne pour $\frac{a_m}{b_m}$. J'ai réussi ainsi à justifier le procédé d'Oettinger, mais je n'ai pas eu le temps de vérifier ses calculs. On rencontre dans les mémoires d'Oettinger et de Poisson d'autres points obscurs qu'il serait utile de mettre en lumière. Je compte le faire prochainement.

5. Herr Prof. Dr. O. Spiess (Basel): *Ueber Gruppen algebraischer Funktionen.*

Ist $R_n(x)$ eine rationale Funktion n-ten Grades, so besitzt die Gleichung: (1) $R_n(y) - R_n(x) = o$ n algebraische Funktionen zu Wurzeln $y_o = x$, $y_1(x), \ldots y_{n-1}(x)$, die eine *Gruppe* bilden, indem $y_h(y_i) = y_k$. Umgekehrt sind alle Alg. Funktionen, die eine endliche Gruppe bilden, die sämtlichen Wurzeln einer Gleichung der Form (1). Betrachten wir z. B. eine Gruppe, die durch Iteration einer einzigen ν-deutigen Funktion entspringt (monogene Gruppe). Einem Punkt x der Zahlenebene entsprechen dann ν Punkte, diesen zusammen wieder ν^2 andere, die aber zum Teil koïnzidieren können u.s.w. Ist die Anzahl aller so aus x entspringenden Punkte endlich, so haben wir eben eine endliche Gruppe vor uns. Verbindet man jeden Punkt mit den ν ihm entsprechenden durch (mit Pfeilen versehene) Linien, so entsteht ein Liniennetz (Polygramm), als Bild der Gruppe. Da es bloss auf den Zusammenhang dieser Linien ankommt, kann man sie von der Ebene loslösen und in irgend welchen Räumen konstruiert denken. So sind z. B. die Kantenmodelle der regulären und halbregulären Polyeder solche Gruppenbilder.

Es entsteht das *Problem*, die allgemeinste Gleichung der Form (1) aufzustellen, die zu einem gegebenen Polygramm gehört. Indem man die Ecke x geschlossene Umläufe ausführen lässt und die Vertauschungen der andern Ecken betrachtet, lässt sich die Frage in manchen Fällen allgemein lösen. So gehört zum Oktaeder die Funktion des 6. Grades $R_6(x) = R_3\, S_2(x)$, wo $S_2(x)$ eine lineare Substitution vom Cyclus 2 gestattet. Diese