Mathematische Sektion

I

Mathematische Sektion

zugleich Versammlung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Sitzung : Montag, den 9. September 1913

Einführender : Herr Prof. Dr K. Matter.
Präsident : » Prof. Dr H. Fehr.
Sekretär : » Prof. Dr M. Plancherel.
» Dr E. Chatelain.

---

1. M. le Prof. L. Crelier (Berne-Bienne). — *Sur les correspondances en géométrie synthétique.*

Dans diverses notes parues dans l'*Enseignement mathématique* en 1906, 1907 et 1908, l'auteur a essayé d'étendre quelque peu la théorie géométrique des correspondances *(m.n)*. En considérant principalement les correspondances (1.*n)*, il a pu simplifier et généraliser les résultats de Weyr et indiquer quelques constructions originales pour les cubiques à point double.

En continuant ses recherches, il a observé que l'emploi des correspondances (1.2) peut conduire à la construction des points d'inflexion et des tangentes d'inflexion dans les cubiques à point de rebroussement, ainsi qu'à la construction des tangentes et des points de rebroussement dans les courbes de 3me classe à tangente d'inflexion.

Dans ce cas, toutes les constructions sont réalisables avec la règle et le compas.

Le développement des constructions nécessaires peut être résumé dans la remarque dualistique suivante:

Une cubique C^3 à point de rebroussement S_2 étant donnée par les points nécessaires, la	*Une courbe de 3me classe K^3 à tangentes d'inflexion P_2 étant donnée par les éléments néces-*

ligne de jonction de S_2 avec chaque point S_1 est univoquement conjuguée avec la ligne de jonction de S_2 avec le point de tangence de la tangente de C^3 menée par S_1.

Ces droites forment deux faisceaux homographiques concentriques en S_2 dont les rayons doubles sont la tangente de rebroussement et la droite passant par le point d'inflexion.

saires, le point de coupe de P_2 avec chaque tangente simple P_1 est univoquement conjugué au point de coupe de P_2 avec la tangente de K^3 menée par le point d'intersection de P_1 avec K^3.

Ces points forment deux ponctuelles homographiques sur la même base P_2; les points doubles sont le point d'inflexion et le point de coupe de P_2 avec la tangente de rebroussement.

Les mêmes méthodes de recherches peuvent être appliquées aux cubiques crunodales, ainsi qu'aux courbes de 3^{me} classe à tangente double, avec points de tangence distincts ou imaginaires. Les constructions conservent la même valeur théorique, mais elles ne sont plus comme les précédentes, exclusivement réalisables par la règle et le compas. Elles nécessitent l'intersection d'une conique et d'un cercle dont un point commun est connu.

La remarque dualistique résumant les constructions prend la forme suivante :

Une cubique C^3 à point double S_2 est donnée par les éléments nécessaires; la ligne de jonction de S_2 avec chaque point S_1 de la courbe est conjuguée aux deux lignes de jonction de S_2 avec les points de tangence des deux tangentes de la courbe menées par S_1 et rencontrant C^3 en dehors de S_1.

Les droites considérées forment une correspondance (1.2) de rayons concentriques admettant un ou trois rayons doubles

Une courbe de 3^{me} classe K^3 à tangente double P_2 est donnée par les éléments nécessaires; le point de coupe de P_2 avec chaque tangente simple P_1 est conjugué aux deux points de coupe de P_2 avec les tangentes de K^3 menées par les points d'intersection de P_1 avec K^3.

Les points considérés forment une correspondance (1.2) de base P_2; les points doubles conjugués sont sur les tangentes *conjuguées réels. Ceux-ci passent ensuite par les points d'inflexion de la courbe.*

par les points de rebroussement. Il y a un ou trois points doubles réels.

Le développement des détails de construction permet d'établir qu'un des éléments doubles conjugués seul est réel dans le cas des cubiques crunodales et dans celui des courbes de 3^{me} classe dualistiques des cubiques crunodales.

Si le point double est isolé, ou si la tangente double est isolée, les éléments doubles conjugués des correspondances (1.2) sont tous les trois réels.

Le cas d'un seul élément double conjugué réel conduit à un intéressant groupement de triangles dans lesquels :

Les paires de côtés homologues sont les éléments conjugués de trois involutions de rayons dont les sommets sont des points fixes.

Les paires de sommets homologues sont les éléments conjugués de trois involutions de points dont les bases sont des droites fixes.

Les triangles sont liés involutivement dans chacune des constructions dualistiques.

Les sommets des triangles sont sur trois coniques passant par un seul point commun.

Les côtés des triangles enveloppent trois coniques n'admettant qu'une seule tangente commune.

Une étude plus approfondie de ces triangles conduit à un très grand nombre de propriétés fort intéressantes.

Les involutions supérieures J_1^{m+1} ou J_n^{m+1} peuvent être établies au moyen des courbes engendrées par les correspondances $(1.m)$ ou $(n.m-n+1)$.

J_1^{m+1} s'obtient en coupant la courbe d'une correspondance $(1.m)$ par un faisceau de droites issues d'un point extérieur et en joignant les points de coupe avec le point multiple d'ordre m. Chaque rayon ainsi obtenu n'appartient qu'à un seul groupe de $(m+1))$ rayons conjugués.

J_2^{m+1} s'obtient en coupant la courbe d'une correspondance

(1.m) comme précédemment et en joignant les points de coupe avec un point multiple d'ordre $m-2$. Chaque rayon appartient à deux groupes de $m+1$ rayons conjugués.

J_2^{m+1} s'obtient également avec la courbe d'une correspon-(2.$m-1$) coupée comme avant et en joignant les points de coupe avec le point multiple d'ordre $m-1$, dont l'existence est certaine. Chaque rayon appartient aussi à deux groupes de $m+1$ rayons conjugués.

On voit de suite par cet aperçu que l'étude des involutions supérieures est liée à celle des correspondances analogues.

Pour les cas faciles (1.1), (1.2), (1.3), (2.3), l'étude géométrique est relativement simple et conduit aisément aux propriétés des involutions J_1^2, J_1^3, J_2^3, J_1^4, J_2^4 et J_3^4.

2. R. Fueter: *Ueber algebraische Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe.*

Der Vortragende greift aus dem grossen Problem, zu einer gegebenen Gruppe eine zugehörige algebraische Gleichung zu finden, den speziellen Fall heraus, dass die Gruppe durch zwei unabhängige Substitutionen gegeben ist:

$$s^x S^y \quad , \quad \begin{cases} 0 \leqq x < 2 \\ 0 \leqq y < l^v \end{cases}$$

wo s zum Exponenten 2, S zum Exponenten l^v gehört, und l eine beliebige Primzahl ist. Aus der Gruppeneigenschaft folgt, dass auch

$$Ss = s^x S^y$$

oder, wegen: $s^{-1} = s$

$$S = s^x S^y s$$

sein muss. Wäre $x = 0$, so würde $s = S^{y-1}$ entgegen der Annahme, dass s und S unabhängig sind. Also $x = 1$, und es wird

$$S = sS^y s = s\left\{sS^y s\right\}^y s$$

Nun ist aber wegen $s^2 = 1$

$$\left\{sS^y s\right\}^2 = sS^y s . sS^y s = sS^{2y} s \ , \quad \left\{sS^y s\right\}^y = sS^{y^2} s$$

Somit ist

$$S = s.sS^{y^2}s\ s = S^{y^2}$$

oder

$$y^2 \equiv 1(l^v). \quad (1)$$

Wenn l *ungerade* ist, so ist $y \equiv \pm 1\ (l^v)$. Dem Fall $y \equiv +1\ (l^v)$ entsprechen Kreiskörper, dem Fall $y \equiv -1\ (l^v)$ Körper der komplexen Multiplikation.

Wenn *dagegen* $l = 2$, so gibt es ausser den Lösungen $y \equiv \pm 1$ (mod 2^v) noch die weitern

$$y \equiv \pm 1 + 2^{v-1} (\text{mod}\ 2^v) . (v > 2)$$

Während die ersten Lösungen wieder auf Kreiskörper bezw. Körper der singulären Moduln führen, fragt es sich, ob auch im letzten Fall Körper existieren. Das ist in der Tat der Fall, wie der Vortragende für $v = 3$ zeigt. Nimmt man

$$x = i = \sqrt{-1}\ ; \quad y = \sqrt[8]{2}$$

so hat x die Gruppe s, wo $s^2 = 1$. Geht man zum Körper K $(i, \sqrt[8]{2})$, so kann man, da die 8. Einheitswurzel durch $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ gegeben ist, die konjugierten von y so ausdrücken:

$$\begin{array}{llll}
y_1 = & \sqrt[8]{2} = & y & \text{oder wenn } S = \left(y : \dfrac{1+i}{y^3}\right)^0 \quad y_1 = y \\
y_2 = & \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt[8]{2} = & \dfrac{1+i}{y^3} & y_2 = Sy \\
y_3 = -i & \sqrt[8]{2} = & -iy & y_3 = S^2 y \\
y_4 = -i & \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt[8]{2} = & -i \dfrac{1+i}{y^3} & y_4 = S^3 y \\
y_5 = -y & & & y_5 = S^4 y \\
y_6 = - & \dfrac{1+i}{y^3} & & y_6 = S^5 y \\
y_7 = & iy & & y_7 = S^6 y \\
y_8 = & i \dfrac{1+i}{y^3} & & y_8 = S^7 y \\
& & & S^8 = 1
\end{array}$$

Somit ist $s^x S^y$ die Galois'sche Gruppe von K, und wegen

$$sSy = s \frac{1+i}{y^3} = \frac{1-i}{y^3} = y_4 = S^3 sy$$

wird

$$sS = S^3 s\ , \quad \text{oder} \quad y \equiv -1 + 4 \quad (\text{mod}\ 8).$$

3. M. le Prof. Gustave DUMAS (Zurich). — *Sur les singularités des surfaces.*

M. G. Dumas donne, en grands traits, un aperçu général de sa méthode de résolution des singularités des surfaces analytiques dans le voisinage d'un point donné. Faisant un parallèle entre la théorie des courbes et celles des surfaces, il en signale les analogies et les différences et montre comment se posent les problèmes dans le dernier de ces deux cas.

4. Andreas SPEISER (Strassburg.) — *Ueber die Zerlegung der algebraischen Formen.*

Im Mittelpunkt der Theorie der linearen quadratischen Formen steht bei Gauss der Begriff der *Composition.* Dieser Begriff gestattet eine viel weitergehende Verallgemeinerung als ihn selbst die Theorie der algebraischen Zahlen liefert.

Wir sagen: die Form $f(x_1 \ldots x_m)$ gestattet eine Composition mit sich selbst, wenn die Gleichung:

$$(fz_1 \ldots z_m) = f(x_1 \ldots x_m) f(y_1 \ldots y_m)$$

zur Identität wird durch die bilineare Substitution

$$z_l = \sum_i \sum_k a_{ikl} x_i y_k \qquad \text{(S)}$$

Ist die Form f unzerlegbar im Gebiet der rationalen Zahlen, so gelangt man zu den *algebraischen* Zahlen, indem man Zahlen $e_1 \ldots e_m$ definiert, welche die Eigenschaft haben, dass die Gleichung:

$$e_1 z_1 + \ldots + e_m z_m = (e_1 x_1 + \ldots + e_m y_m)(e_1 y_1 + \ldots + e_m y_m)$$

zur Identität wird durch die Substitution (S). Dazu müssen die Zahlen $e_1 \ldots e_m$ den Gleichungen genügen.

$$e_i e_k = \sum_l a_{ikl} e_l$$

Wenn diese Multiplication das *associative* und *communitative* Gesetz erfüllt, so ist das Zahlengebiet

$$e_1 x_1 + \ldots + e_m x_m .$$

wenn $x^1 \ldots x_m$ alle rationalen Zahlen durchlaufen, holoedrisch isomorph mit einem algebraischen Zahlkörper und seinen konjugierten Körpern.

Wenn die Multiplication dagegen nur das associative Gesetz erfüllt, so erhält man «hypercomplexe» Zahlen. Gewisse quaternäre Formen liefern in dieser Weise neue Zahlen, zu denen insbesondere die Quaternionen gehören, deren Zahlentheorie durch Herrn Hurwitz gegeben worden ist. Sie ist ein Spiegelbild der Zahlentheorie der zugehörigen quaternären Form.

Ferner gilt die Tatsache, dass die Form, welche die Composition gestattet, in zwei Faktoren zerfällt, deren einer durch $e_1 x_1 + \ldots + e_m x_m$ gebildet wird.

Ebenso gestattet die *Gruppendeterminante* eine Composition. Sie bildet die Grundlage für die tiefgehenden Untersuchungen von Herrn Frobenius. Insbesondere führt die Zerlegung des zugehörigen Systems hyperkomplexer Zahlen in Teilsysteme, wobei das Produkt zweier Zahlen aus verschiedenen Systemen verschwindet, auf die Gruppencharaktere.

In allen Fällen wird sich jeder hyperkomplexen Zahl eine *Norm* zuordnen, welche die Eigenschaft hat, dass das Produkt der Normen zweier Zahlen gleich der Norm des Produktes der beiden Zahlen ist.

5. Prof. L. Bieberbach (Basel). — *Ueber eine neue Methode der konformen Abbildung.*

Sei $f(x)$ eine im Kreise von Radius R um den Koordinatenanfangspunkt reguläre Funktion mit $f(o) = o$ u. $f'(o) \doteq 1$ also

$$f(x) = x + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots$$

so wird dadurch der Kreis auf einen Bereich abgebildet, für dessen (inneren) Flächeninhalt man den Ausdruck $\iint f'\overline{f}'dxd\overline{x}$ erhält, das Doppelintegral über jenen Kreis erstreckt (x und $\overline{x}$ $\frac{df}{dx} = f'$ und $\overline{f}'$ je konjugiert imaginär.) Setzt man $x = re^{i}\varphi$, so wird dies $\int\limits_o^R dr \int\limits_o^{2\pi} d\varphi r f'\overline{f}'$ oder nach leichter Ausrechnung

$$\pi R^2 + \frac{4a_2\overline{a}_2R^4}{4} + \frac{3^2a_3\overline{a}_3R^6}{6} + \ldots + \frac{n^2a_n\overline{a}_nR^{2n}}{2n} 1 \ldots$$

und dies ist grösser als πR^2, also grösser als der Inhalt unseres Kreises. *Bei konformer Abbildung eines Kreises durch eine* *in seinem Inneren reguläre Funktion* f(x) *mit* f(o) = 0, f′(o) = 1, *wird also der Flächeninhalt vergrössert.* Diejenige Funktion also, die einen gegebenen Bereich auf einen Kreis abbildet und dabei einen gegebenen Punkt festlässt und daselbst das Vergrösserungsverhältnis 1 besitzt, ist als Lösung des Variationsproblemes $\iint f'\bar{f}' dt\, d\bar{x}$ = Min charakterisiert.

Die Anwendung dieses Prinzips erlaubt es sehr elementar, die Abbildbarkeit eines beliebigen einfach zusammenhängenden Bereiches auf einen Kreis nachzuweisen. Nachdem der Vortragende noch einen sehr kurzen Beweis des Caratheodoryschen Satzes von der stetigen Aenderung der Abbildungsfunktion bei stetiger Aenderung des Bereiches gegeben hat, der auf einer Bemerkung über die Konvergenz der Umkehrungsfunktionen einer konvergenten Reihe analytischer Funktionen beruht, führt er ein einfaches Rechenverfahren zur wirklichen Bestimmung der Abbildungsfunktion vor. Dabei muss, wenn das Resultat gelten soll, die Beschränkung auf solche Gebiete Platz greifen, deren Komplementärmenge selbst ein Gebiet ist, das mit dem abzubildenden die volle Grenze gemein hat. Das Verfahren besteht in der Approximation der Abbildungsfunktion durch diejenigen Polynome n-ten Grades, die unter allen des gleichen Grades dem Bereich einen möglichst kleinen Inhalt erteilen $f(o) = 0\ f'(o) = 1$. Die Berechnung dieser eindeutig bestimmten Polynome läuft jedesmal auf die Auflösung eines eindeutig lösbaren Systems linearer Gleichungen hinaus.

6. M. le Dr E. Marchand (Neuchâtel). — *Sur la règle de Newton, dans la théorie des équations algébriques.*

Newton a publié, dans son « Arithmetica universalis » (1707), une règle pour la détermination du nombre des racines positives, négatives et imaginaires d'une équation algébrique à coefficients réels, qui permet de préciser les résultats obtenus par l'application de la règle des signes de Descartes. Newton n'a pas jugé à propos d'en donner la démonstration. C'est à Sylvester (1865) que revient l'honneur d'avoir trouvé le principe d'une démonstration, en même temps qu'une généralisation[1].

Les travaux de Newton et de Sylvester, ainsi que leur exposé dans les traités d'algèbre supérieure de Petersen[2] et de H. Weber[3], renferment bien des lacunes que j'ai essayé de combler, sur le conseil de M. le Prof. Dr Hurwitz. Il s'agissait avant tout de trouver une démonstration *complète* de la règle de Newton, démonstration qui embrasse tous les cas possibles.

Voici l'énoncé que je propose pour la règle de Newton:

Règle de Newton.

Soit $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, une équation à coefficients réels du n^{me} degré ($a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$).

Formons la différence

$$A_i = \frac{i(n-i)}{(i+1)(n-i+1)} a_i^2 - a_{i-1}a_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

et considérons, au point de vue des signes, la double suite (I):

$$\left.\begin{array}{l} a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n-2}\ ,\ a_{n-1}\ ,\ a_n \\ +\ ,\ A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots\ ,\ A_{n-2}\ ,\ A_{n-1}\ ,\ + \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Désignons par

vP, le nombre total des variations-permanences[4] de (I), par
pP, » » » permanences-permanences[4] de (I), et par
V, » » » variations que présente la série

$$+\ ,\ A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots\ A_{n-2}\ ,\ A_{n-1}\ ,\ +$$

avec les conventions suivantes au sujet des zéros qui peuvent se présenter dans (I):

1° Si $a_{i-1} \neq 0 \quad a_i = a_{i+1} = \ldots = a_{i+i'-1} = 0 \quad a_{i+i'} \neq 0$, i étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, (n-1)$, et i', l'un des nombres $1, 2, \ldots (n-i)$, on donnera aux zéros représentant a_i, a_{i+i}, $\ldots$, $a_{i+i'-1}$, le même signe que celui de a_{i-1}.

2° Si $A_{k-1} \neq 0 \ A_k = A_{k+1} = \ldots = A_{k+k'-1} = 0 \ A_{k+k'} \neq 0$,

[1] J.-J. Sylvester, *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 24, 1871. J.-J. Sylvester, *Philosophical Magazine*, 4me sér., vol. 31, p. 214.
[2] Jul. Petersen, *Theorie der algebraischen Gleichungen*, 1878, p. 203.
[3] Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 1895, t. 1, p. 304.
[4] Voir H. Weber, *loc. cit.*

k étant l'un des nombres $(1, 2, n - 1)$ et k', l'un des nombres $1, 2, \ldots, (n - k)$, on donnera, en général,

au zéro représentant A_k, le signe contraire de celui de A_{k-1},
» » A_{k+1}, le même signe que » A_{k-1},

etc., en variant toujours les signes ; sauf toutefois dans le cas où les a_k correspondants sont tels que

$$a_{k-1} \neq 0 \quad a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{k+k'-1} = 0 \quad a_{k+k'} \neq 0 \quad \text{et} \quad a_{k-1} \cdot a_{k+k'} < 0$$

Il faut alors que le zéro représentant $A_{k+k'-1}$ ait le même signe que $A_{k+k'}$.

Il y a encore un cas d'exception, celui ou $f(x) \equiv (x - a)^n = 0$; dans ce cas $A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = 0$; ces zéros-là doivent tous être considérés comme des quantités positives.

La règle de Newton s'exprime alors par les formules :

$$N_+ = \nu P - 2\lambda_1 \quad , \quad N_- = pP - 2\lambda_2 \quad , \quad I = V + 2\lambda_3$$

N_+, N_- et J désignant les nombres de racines positives, négatives et imaginaires de $f(x) = 0$, chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. λ_1, λ_2 et λ_3 sont des nombres entiers non négatifs [1].

7. M. le D^r^ D. Mirimanoff (Genève). — *Sur quelques points de la théorie des ensembles.* (En l'absence de l'auteur, le mémoire est déposé sur le bureau de la présidence.)

M. Mirimanoff donne, en se bornant aux ensembles linéaires, une démonstration nouvelle du théorème de Cantor-Bendixson : tout ensemble fermé F se compose d'un ensemble dénombrable D et d'un ensemble parfait P. Cette démonstration peut être rapprochée de celles de W. H. Young, F. Bernstein, L. E. J. Brouwer dans lesquelles la partie dénombrable de F est détachée à l'aide d'un ensemble d'intervalles auxiliaires convenablement choisis. Les intervalles auxiliaires de M. Mirimanoff, qu'il appelle *crochets,* ont pour extrémités les milieux (ou des points intérieurs quelconques) des intervalles contigus à F et deux points arbitraires pris sur les demi-droites extérieures à F.

[1] La démonstration complète de la règle complète de Newton paraîtra dans la *Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences naturelles*, t. 40 ; 1912-1913.

8. M. le Prof. Dr W. H. Young, F. R. S. (Liverpool et Genève). — *L'intégrale de Stieltjes et sa généralisation.* (En l'absence de l'auteur, son mémoire est déposé sur le bureau de la présidence.)

L'intégrale de Stieltjes est une limite formée de la même manière que l'intégrale d'une fonction continue. C'est la limite d'une somme de termes de la forme $f(x_i)\Delta g(x_i)$, $(\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i))$, $g(x)$ étant une fonction non décroissante.

Lebesgue a montré que l'intégrale de Stieltjes se ramène à l'intégrale de Lebesgue d'une fonction bornée et il a indiqué la possibilité de prolonger l'opération de l'intégrale de Stieltjes à tout le champ des fonctions continues. Il se sert pour cela d'un changement de variable élégant, mais d'application difficile. Il remarque encore que procéder d'une autre manière à cette extension ne lui paraît guère possible.

Cette dernière remarque ne paraît pas fondée pour celui qui examine la théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée, telle que la développe M. Young. Cette théorie n'exige pas la connaissance des théories modernes de l'intégration, mais procède uniquement par la considération de suites monotones de fonctions. Le principe est le suivant :

On dira qu'une fonction f (x) *possède une intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante* g (x), *si elle peut s'exprimer comme limite d'une suite monotone de fonctions* f_1, f_2, ... *dont les intégrales par rapport à* g (x) *sont déjà définies, pourvu que la limite des intégrales de toute suite ayant ces propriétés soit la même et ait une valeur finie. Cette limite s'appelle l'intégrale de* f (x) *par rapport à* g (x).

En partant de fonctions constantes à l'intérieur (au sens étroit) d'un nombre fini d'intervalles, on obtient au moyen de suites monotones de fonctions des fonctions de classes *l, u, lu, ul, lul, ulu,* ... etc, ... et des fonctions qui n'appartiennent à aucune de ces classes. Après avoir démontré l'unicité du problème d'intégration pour les fonctions de classes *l, u, lu* et *ul,* on se sert ensuite du théorème suivant :

Etant donnée une fonction f (x), *bornée et représentable analytiquement, on peut trouver une fonction* lu *qui ne dépasse pas* f (x) *et une fonction* ul *qui n'est pas moindre que* f(x), *ces deux fonctions auxiliaires ayant la même intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante* g(x).

Par conséquent, toute fonction bornée représentable analytiquement a une intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante. L'extension aux fonctions non bornées se fait sans nouvelles difficultés et le passage à intégration par rapport à une fonction à variation bornée est immédiate.

Un exemple de l'utilité de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée nous est donnée dans la théorie des séries trigonométriques. De même que l'intégrale de Lebesgue a élargi le champ des séries trigonométriques maniables en étendant la signification de l'expression *série de Fourier,* l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée a permis à M. Young d'agrandir encore plus ce champ en remplaçant la classe des séries de Fourier par la classe plus étendue des séries obtenues par dérivation terme à terme des séries de Fourier des fonctions à variation bornée. Parmi les propriétés des séries de Fourier qui restent vraies pour cette classe plus étendue, M. Young en cite deux : 1° les coefficients d'une série impaire (paire) de cette classe, introduits comme multiplicateurs dans une série de Fourier (dans sa série alliée), engendrent la série de Fourier d'une fonction de même sommabilité que celle de la fonction associée à la première série de Fourier; 2° une telle série converge (C_1) ou $(C\delta)$ $(0<\delta<1)$ presque partout vers la dérivée de la fonction à variation bornée attachée à cette série.

Le mémoire se termine par une démonstration en quelques lignes et n'employant que des théorèmes bien connus d'un résultat établi jadis par M. Young au moyen d'un raisonnement long et difficile faisant usage du changement de variable indiqué par Lebesgue.

9. Prof. Rudio (Zürich) berichtet kurz *über den Stand der Eulerausgabe.*

Bis jetzt sind 9 Bände erschienen (Herr Prof. *Matter* hatte die Freundlichkeit, die Bände aus der Kantonsbibliothek herbeizuholen und der Versammlung vorzulegen.) Schon letztes Jahr war in Altdorf darauf hingewiesen worden, dass die Gesamtzahl der Bände wesentlich höher bemessen werden müsse, als ursprünglich vorgesehen war, und dass dem entsprechend auch die Gesamtkosten grösser sein werden. Der Referent macht nun die Mitteilung, dass eine *Leonhard Euler-Gesellschaft* gegründet worden sei, die sich die Aufgabe gestellt habe, dem grossen Unternehmen als Hilfsgesellschaft zur Seite zu stehen. Diese Gesellschaft hat, trotz der Kürze ihres Bestehens, bereits eine recht erfreuliche Entwicklung genommen. Der Vortragende richtet die dringende Bitte an alle schweizerischen Mathematiker, dieser Gesellschaft beizutreten und tatkräftig mitzuwirken, dass die Schweiz. Naturforschende Gesellschaft die mit der Eulerausgabe übernommene Ehrenpflicht in würdiger Weise zu erfüllen vermöge.

10. Prof. D^r A. Einstein. — *Gravitationstheorie.*

Eines der merkwürdigsten und am exaktesten geprüften Naturgesetze ist dasjenige von der Identität der *trägen* und *schweren* Masse der Körper; dasselbe äussert sich darin, dass die Fallbeschleunigung in einem Schwerfelde unabhängig ist vom Material des fallenden Körpers. Dies Gesetz legt die Auffassung nahe, dass in einem beschleunigten Bezugssystem alles so vor sich gehe wie in einem Gravitationsfelde. Man erhält durch diese Auffassung (Aequivalenzhypothese) ein Mittel, um Eigenschaften des Schwerefeldes auf theoretischem Wege abzuleiten. Als Hauptergebnis findet man so eine Krümmung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld, die für einen an der Sonne vorbeistreichenden Lichtstrahl 0,84″ betragen, also in den Bereich des Beobachtbaren fallen soll.

Dies Ergebnis steht mit der jetzigen Relativitätstheorie nicht im Einklang, weil es zu einer Abhängigkeit der Vakuumlichtgeschwindigkeit vom Gravitationspotential führt. Mit Herrn Grossmann zusammen habe ich aber gezeigt, dass man die Relativitätstheorie derart verallgemeinern kann, dass man mit jener Aequivalenzhypothese im Einklang bleibt.

Nach dieser Theorie ist das Gravitationsfeld durch einen symmetrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ mit 10 Komponenten definiert. An Stelle des Linienelementes

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

der gewöhnlichen Relativitätstheorie tritt das allgemeinere

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

als fundamentale Invariante auf.

Die Beziehungen des vierdimensionalen Vektolkalküls gehen in die des absoluten Differentialkalküls über. Jedes physikalische Gleichungssystem enthält nach dieser Verallgemeinerung den Einfluss, den das Gravitationsfeld auf die dem Gleichungssystem entsprechende Phänomengruppe ausübt.

Jene verallgemeinerten Gleichungen sind allgemein kovariant. Dagegen erweist es sich als logisch unmöglich, Gleichungen zur Bestimmung des Gravitationsfeldes (d. h. der $g_{\mu\nu}$) aufzustellen, die bezüglichen beliebigen Substitutionen kovariant sind. Wir gelangen, ausgehend von den Erhaltungssätzen des Impulses und der Energie, dazu, das Bezugssystems (auf welches die raumzeitlichen «Koordinaten» x, y, z, t bezogen werden) derart zu wählen, dass *nur* mehr lineare, aber im Gegensatz zur gewöhnlichen Relativitätstheorie *beliebige* lineare Substitutionen die Gleichungen kovariant lassen. Bei dieser Einschränkung des Bezugssystems gelangt man zu ganz bestimmten Gleichungen der Gravitation, die allen Bedingungen genügen, die wir an Gravitationsgleichungen stellen dürfen.

Insbesondere ergibt sich aus den Gleichungen die Auffassung, dass die Trägheit der Körper nicht eine Eigenschaft der einzelnen beschleunigten Körper allein, sondern eine Wechselwirkung, d. h. ein Widerstand gegen eine Relativbeschleunigung der Körper gegenüber den andern Körpern sei — eine Auffassung, die bereits von *Mach* und anderen mit erkenntnistheoretischen Gründen vertreten wurde.

11. Prof. Dr Marcel GROSSMANN (Zürich). *Mathematische Begriffsbildungen, Methoden und Probleme zur Gravitationstheorie.*

Zur Ueberwindung der mathematischen Schwierigkeiten der

Gravitationstheorie von *Einstein* hat es sich als notwendig erwiesen, die Vektoranalysis auf eine allgemeinere analytische Basis zu stellen. Denkt man sich die in Betracht fallende Mannigfaltigkeit auf ein beliebiges krummliniges Koordinatensystem bezogen, so hat das Linienelement die Form

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \quad ; \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

Führt man beliebige neue Koordinaten ein gemäss den Formeln

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

so dass

$$dx_i = \sum_k \frac{dx_i}{dx^{k'}} dx'_k = \sum_k p_{ik} dx'_k$$

oder

$$dx'_i = \sum_k \frac{dx'_i}{dx_k} dx_k = \sum_k \pi_{ki} dx_k$$

ist, so transformieren sich die Koëffizienten g_{ik} nach den Formeln

$$g'_{rs} = \sum_{ik} p_{ik} p_{ks} g_{ik}$$

wenn *ds* ein Skalar sein soll. Unter einem *kovarianten Vektor* A verstehen wir den Inbegriff von vier Funktionen $A_i(x_1 x_2 x_3 x_4)$, die sich transformieren nach den Formeln

$$A'_i = \sum_k p_{ki} A_k$$

Dagegen sei A ein *kontravarianter Vektor,* wenn seine Komponenten A_i sich transformieren nach den Formeln

$$A'_i = \sum_k \pi_{ki} A_k \, .$$

Bildet man aus den Komponenten A_i, B_k zweier kovarianten Vektoren die 16 Produkte

$$T_{ik} = A_i B_k$$

so erhält man die Komponenten eines *kovarianten Tensors* (zweiten Ranges), die sich transformieren nach den Formeln

$$T'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir} p_{ks} T_{ik}$$

Die Grössen g_{ik} bilden demnach einen kovarianten Tensor zweiten Ranges, während die adjungierten Unterdeterminanten j_{ik} einen kontravarianten Tensor zweiten Ranges bilden.

Es wird an einigen Beispielen gezeigt, wie die allgemeine Vektoranalysis ihre Begriffe und Sätze nach invarianten-theoretischer Methode bildet.

12. *Partie administrative de la Société mathématique.* M. H. Fehr, président, rappelle d'abord le souvenir du professeur H. Weber (Strasbourg), membre honoraire, décédé au mois de juin dernier; puis il présente le rapport annuel. Sur la proposition des vérificateurs des comptes, la Société approuve le rapport du caissier. Le nombre des membres s'élève à 132.

Sur la proposition de son Comité, l'Assemblée décide d'adhérer à la *Société Léonhard Euler ;* « elle engage ses membres et le public scientifique à s'associer aux efforts faits dans le monde entier pour élever un monument impérissable à l'un des plus illustres savants suisses. »