Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 117 (1936)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, 29. August 1936

Präsident: Prof. Dr. R. Wavre (Genève)
Aktuar: Prof. Dr. W. Scherrer (Bern)

1. Gustav Hunziker (Reinach). — *Nachweis von Fehlern in der euklidischen Parallelentheorie.*

In der neueren Geometrie, heute speziell ausgeprägt in der axiomatischen Hilberts, herrscht die Auffassung, ob parallele Gerade sich „im Unendlichen" treffen oder nicht, sei rein willkürlich festsetzbar und darum seien je nach der Wahl dieses Parallelenpostulates neben der euklidischen (parabolischen) Geometrie auch die beiden nicht-euklidischen (die sogesannte hyperbolische und die elliptische) möglich und alle drei gleichberechtigt. Und diese Wahlfreiheit ist bekanntlich und selbstverständlich nur unter der Voraussetzung möglich, dass dies Parallelenpostulat von den übrigen Axiomen unabhängig sei.

Ob diese Unabhängigkeit tatsächlich besteht, ist eine andere Frage.

Und mir scheint nun, etwa so, wie lange Zeit die Parallelentheorie Euklids für eine blosse, rein logische *Konsequenz* der vorausgehenden Axiome gehalten wurde und darum immer wieder daraus heraus zu beweisen versucht worden ist, mit ungefähr der gleichen „Selbstverständlichkeit" wird jetzt die *Unabhängigkeit* der jeweiligen Parallelenauffassung von den übrigen Axiomen angenommen (und damit die absolute Denkrichtigkeit der genannten Vielzahl von Geometrien) und sie, trotz dem Studium derselben, tatsächlich doch einfach vorausgesetzt! Denn ich muss diese Unabhängigkeit, gleichgültig ob gern oder ungern, bezweifeln und an deren Stelle, als dritte der drei Möglichkeiten, nun direkt die *Unvereinbarkeit* behaupten, da sich von den drei früher genannten, anfänglichen Möglichkeiten bezüglich der Wahl der Parallelenpostulate bei ganz scharfer und wirklich zu Ende gedachter Überlegung nur eine aufrecht erhalten lässt, nämlich die elliptische! — In dem kurzen Referat, auf das sich dieser Bericht bezieht, beschränkte ich mich aber darauf, Fehler in der euklidischen Geometrie nachzuweisen.

Die Unstimmigkeiten der einstweiligen Parallelentheorie liegen aber etwa nicht nur in der Unvereinbarkeit der euklidischen Parallelenauffassung mit den vorausgehenden Axiomen begründet, sondern, tiefer gesehen, darin, dass schon von jenen primitiveren Postulaten gewisse

unter sich unvereinbar sind. Nämlich *unendlich* (= ohne Ende) *und* doch *gerade* sein, diese zwei Grundeigenschaften der euklidischen Geraden, ihrer Länge nach, *schliessen sich* logisch *aus*.

Danach bedeutet jede Verbindung der zwei genannten Eigenschaften einen Selbstwiderspruch. Und mein Beispiel der zwei parallelen Geraden, mit dem ich im Referat operierte, und speziell ihr Verhalten im „physisch" (nicht aber logisch!) Unendlichen ist und diente mir lediglich als eine Stelle, wo man jenen Widerspruch verhältnismässig leicht und schon vom Boden der Anschauung aus erläutern kann, etwa so, wie wenn schon allein mit einer kurzen Neunerprobe von einer langen Rechnung nachgewiesen werden kann, dass sie falsch ist; womit dann ja freilich der Ursprung des Fehlers noch nicht bekannt ist. In der nachherigen Diskussion wurde mein Beweis dann zwar gerade auch wegen seines anschaulichen Charakters kritisiert und als nicht stichhaltig erklärt, gar als blosse Selbsttäuschung, da doch die Wahl des Parallelenpostulates unter seinen drei möglichen Formen rein willkürlich sei. Aber das ist ja gerade der springende Punkt, dass meiner Überzeugung nach jene Unabhängigkeit und Freiheit in der Wahl tatsächlich nicht vorhanden ist. — Freilich, es ist ja auch möglich, dass der Fehler nicht in der „Rechnung" selber, sondern in der „Neunerprobe" steckt. Aber dann müsste er dort doch mindestens auch nachgewiesen werden können, und zwar an Hand und mit den Mitteln der „Neunerprobe" selber!

2. René de Saussure (Bern). — *Le système linéaire des lignes de courant d'un fluide en état de mouvement dans l'espace.*

Soit M une molécule du fluide et D la tangente (affectée d'un sens) à la trajectoire de cette molécule: la figure *(MD)* est une *flèche*. Dans l'espace plan un fluide en état de mouvement détermine une bisérie (∞^2) de flèches, puisqu'il détermine une flèche en chaque point du plan. Le système linéaire des lignes de courant dans un plan est donc formé par les lignes de courant d'une bisérie linéaire de flèches *(couronoïde* de flèches), c'est-à-dire par un système de cercles tangents en un même point M_0 à une même droite D_0.

Dans l'espace, un fluide en état de mouvement détermine en chaque point un *feuillet,* c'est-à-dire une figure formée par la molécule M qui se trouve en ce point, par la tangente D à la trajectoire de cette molécule et par le plan osculateur P de cette trajectoire. A chaque feuillet *(MDP)* est associé une quantité numérique (une *cote)* qui représente la vitesse de la molécule M; le fluide en état de mouvement définit donc une trisérie (∞^3) de *feuillets-cotés.* Par suite:

Le système linéaire des lignes de courant dans l'espace est formé par les lignes de courant d'une trisérie linéaire de feuillets-cotés, c'est-à-dire par les lignes de courant d'une tricouronne.

Il serait intéressant de déterminer la forme et la nature de ces lignes de courant.

3. Heinz Schilt (Zürich). — *Über isometrische Flächen, die sich nicht ineinander verbiegen lassen.*

1. Zwei Flächen heissen bekanntlich dann *isometrisch,* wenn sie sich längentreu aufeinander abbilden lassen, und die *Isometrie* ist die zugehörige Abbildung. Gelingt es ausserdem, zwischen zwei isometrischen Flächen eine stetige Schar isometrischer Flächen einzuschalten, so nennt man, nach einem Vorschlag von Voss, diese Flächen ineinander *verbiegbar,* und die Abbildung eine *Verbiegung.*

Es ist selbstverständlich jede Verbiegung eine Isometrie, dagegen entsteht die Frage, ob auch jede Isometrie eine Verbiegung sei.

2. Im Jahre 1908 hat E. E. Levi[1] für eine grosse Klasse von Flächen diese Frage im wesentlichen bejaht, indem er folgenden Satz bewies:

„Zwei isometrische Flächen mit negativer oder verschwindender Krümmung sind immer ineinander verbiegbar; während von zwei isometrischen Flächen mit positiver Krümmung immer die eine entweder in die andere, oder in deren Spiegelbild verbogen werden kann. Die Spiegelung zweier Flächen mit positiver Krümmung ist nie eine Verbiegung."

Dieser Satz enthält somit eine eindeutige Antwort auf die Frage der Verbiegung für alle Flächen, deren Krümmungsmass überall einerlei Vorzeichen hat.

3. Ich werde nun isometrische Flächen angeben, die sich nicht ineinander verbiegen lassen. Nach dem Satz von Levi können es nicht Flächen mit festem Vorzeichen der Krümmung sein; wir werden vielmehr von unseren Flächen folgendes voraussetzen: In einem Punkt des Flächenstückes soll die Krümmung verschwinden, in dessen Umgebung aber überall negativ sein.

Man kann leicht zeigen, dass eine Fläche, von der dies vorausgesetzt wird, aussieht wie ein Bergpass, in den eine gewisse Anzahl Bergrücken und dieselbe Anzahl Täler einmünden. Wenn diese Anzahl gleich n ist, so wollen wir den Punkt einen Sattel n-ter Ordnung nennen.

4. Es lassen sich nun folgende Sätze beweisen:

„Besitzt eine Fläche in einem Punkt keinen Flachpunkt, so ist dieser nur ein Sattel 2-ter Ordnung."

„Hat die eine von zwei isometrischen Flächen in einem Punkt einen Sattel der Ordnung n, die andere im entsprechenden Punkt einen Sattel der Ordnung $m \neq n$, so lassen sich die Flächen nicht ineinander verbiegen."

5. Solche Flächenpaare kann man in einfacher Weise konstruieren. Es sei F eine Fläche, die im Punkte O einen Sattel n-ter Ordnung habe, $n > 2$ (z. B. in Zylinderkoordinaten: $z = r^n \cos(n\varphi)$. Ich behaupte: Es gibt eine zu F isometrische Fläche F', die in dem entsprechenden Punkt O'

[1] E. E. Levi: Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestensibili. Atti della Accademia di Torino: 43 (1907—1908) p. 292—302).

einen Sattel 2-ter Ordnung hat. Da, wie oben bemerkt, ein Sattelpunkt, der nicht Flachpunkt ist, immer die Ordnung 2 besitzt, so ist die Existenz von F' durch folgenden allgemeinen Satz sichergestellt:

„Es sei O ein Punkt auf einer beliebigen Fläche F, dann gibt es immer ein Flächenstück F', das einer Umgebung von O isometrisch ist und keinen Flachpunkt enthält.“

Diesen Satz beweist man auf Grund der Existenzsätze der partiellen Differentialgleichungen angewandt auf eine gewisse Diff.-Gl. vom Monge-Ampèreschen Typus, von der das Problem der Isometrie abhängig ist.

4. Louis Kollros (Zurich). — *Sur les manuscrits de Steiner.*

Dans la préface du tome II des Oeuvres complètes de Steiner, Weierstrass disait déjà que, selon l'avis de Geiser, les manuscrits contenaient peu de choses nouvelles. Il y a, en effet, beaucoup de travaux préparatoires et de projets de rédaction des mémoires déjà imprimés.

Parmi les manuscrits de Küsnacht 2 seuls étaient prêts pour l'impression: ceux qui ont été publiés à la fin des O. c.; et parmi ceux de Berne, il y avait l'œuvre de jeunesse préparée depuis 1826 et imprimée il y a 5 ans.

On a trouvé en outre les solutions de quelques problèmes posés dans les O. c., tome I, p. 127—128, 157—158, 177, 224 et tome II, p. 467; mais il n'y a nulle part la démonstration de la solution élégante du problème de Malfatti (I, p. 37), ni les solutions des problèmes proposés à la fin de la „Systematische Entwicklung“ (I, p. 440 à 458). La formule de la page 329 du tome II n'est démontrée que dans le cas du cercle. Les derniers manuscrits sont souvent inachevés.

J'ai déjà indiqué (Comm. mat. helv., vol. 6, p. 154) la généralisation de la droite de Simson et la découverte en 1824 des théorèmes de Miquel (1845) et de Clifford (1870). Le théorème de Faure (1860): „Les sphères harmoniquement circonscrites à une quadrique en coupent orthogonalement la sphère orthoptique“ avait été trouvé par Steiner en 1845 sous sa forme projective la plus générale. Dans plusieurs manuscrits il démontre et développe un théorème que Jacobi lui avait proposé; mais ses résultats ont été retrouvés en 1872 par Darboux dans une étude intitulée: „Sur les théorèmes d'Ivory relatives aux quadriques homofocales.“

Les travaux sur les propriétés générales des courbes algébriques (II, p. 493—500) comptent parmi les plus importants. Steiner avait l'intention de publier quelque chose d'analogue sur les surfaces algébriques avec l'aide de Schläfli. Il est regrettable que ce projet n'ait pas pu se réaliser. Presque tout ce qui a été trouvé à ce sujet dans les manuscrits est compris dans les travaux de Cremona (Op. mat., I, p. 317 . . ., II, p. 281 . . .).

Quelques questions générales sur les courbes et les surfaces algébriques que Steiner s'était posées n'ont été traitées ni par Cremona, ni par ses successeurs. Un de mes assistants, M. Pauli, en a trouvé la solution. Sa thèse paraîtra prochainement.

5. Georges de Rham (Lausanne). — *Sur la détermination de certains invariants topologiques.*

Etant données une variété V et une transformation topologique g de V en elle-même, sans point fixe et dont la puissance p-ième se réduit à l'identité, en assimilant à un point unique les p points de V qui se déduisent de l'un d'eux par la transformation g et ses puissances, on obtient une nouvelle variété W. L'objet de la présente communication était d'indiquer un moyen simple de déterminer les nombres de Betti et les coefficients de torsion de W, dans le cas où V est une variété close sans torsion et p un nombre premier. Ce procédé a été appliqué aux exemples qu'on obtient en prenant pour V soit une sphère, soit le produit topologique de deux sphères à un nombre quelconque de dimensions.

6. Rolin Wavre (Genève). — *Sur le potentiel complexe.*

Paraîtra sous une autre revue.

7. Max Gut (Zürich). — *Über Erweiterungen von unendlichen algebraischen Zahlkörpern.*

Es gibt algebraische Zahlkörper k von unendlich hohem Grade mit der Eigenschaft, dass für alle Primideale von k der absolute Grad und die absolute Ordnung endlich sind. Zu diesen Körpern gehört z. B. das Kompositum aller absolut zyklischen Körper von einem festen Primzahlgrade.

Für solche Körper k kann man unabhängig von der allgemeinen Theorie der Erweiterungen der unendlichen algebraischen Zahlkörper, wie sie *Herbrand* aufgestellt hat, auf einfachste Weise die Theorie der Erweiterungen von endlichem Grade entwickeln und dabei neue Sätze gewinnen. Es gilt nämlich mutatis mutandis die arithmetische Theorie, die Herr *Ore* über Erweiterungen endlichen Grades von gewöhnlichen algebraischen Zahlkörpern aufgestellt hat in den Math. Ann., Bd. 96, S. 313 (1926) und Bd. 97, S. 569 (1927). Insbesondere gelten der Zerlegungssatz für die Primideale von k, der Satz über die Lückenzahlen der relativen Supplementzahlen, der Existenzsatz über Erweiterungskörper von endlichem Grade, in denen endlich viele Primideale von k vorgeschriebene mögliche Zerlegungen und relative Supplementzahlen haben, und der schöne Satz über den maximalen Beitrag eines Primideales von k zur Relativdiskriminanten bei festgehaltenem Erweiterungsgrad. Ferner bleibt das Kriterium über gemeinschaftliche ausserwesentliche Relativdiskriminantenteiler erhalten.

Die Arbeit wird in den „Commentarii Mathematici Helvetici“ erscheinen.

8. Pierre Dive (Clermont-Ferrand). — *Difficultés dans l'interprétation Einsteinienne d'espace et de temps relatif.*

Pas reçu de manuscrit.

9. Fridolin Bäbler (Göttingen). — *Ein Satz aus der Theorie der Graphen.*

Kein Manuskript eingegangen.