Sezione di Matematica

1. Sezione di Matematica

Società elvetica matematica

Presidente : Prof. Dr. W. Scherrer (Berna)

1. W. Gruner (Bern). — *Einlagerung des regulären n-Simplex in den n-dimensionalen Würfel.*

Ein reguläres n-Simplex soll in einen n-dimensionalen Würfel eingelagert genannt werden, wenn seine Ecken einen Teil der Ecken des Würfels bilden. Bekanntlich kann ja ein Tetraeder in einen Würfel eingelagert werden; dagegen ist das Analogon im zweidimensionalen Fall unmöglich.

Als notwendige Bedingung für die Einlagerungsmöglichkeit im R_n gilt für die Zahl $n : n = 1$, oder $n \equiv 3 \pmod 4$. Man vermutet, dass diese Bedingungen hinreichend sind. Im übrigen sind bezüglich der hinreichenden Bedingungen schon verschiedene Ergebnisse bekannt, wir erwähnen als neuen Fall :

Die Einlagerung ist möglich, falls

$$n = p^\alpha \; q^\beta$$
$$q^\beta - p^\alpha = 2, \; q, \; p \text{ Primzahlen.}$$

$n = 323$ ist die kleinste dadurch gewonnene Zahl, die nicht schon in den früheren Ergebnissen inbegriffen ist.

Der Beweis stützt sich auf ähnliche Methoden, wie sie auch für die früher gefundenen Fälle angewandt wurden.

Was Literaturangaben und Beweise betrifft, sei auf eine demnächst in den Comm. Math. Helv. erscheinende Arbeit gleichlautenden Titels verwiesen.

2. Pierre Humbert (Lausanne). — *Théorie de la réduction des formes quadratiques dans un corps algébrique.*

La théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives à n variables de Minkowski peut se généraliser au cas où ces formes sont transformées par des substitutions unimodulaires dans un corps algébrique fini K. Une substitution est dite *unimodulaire dans K* si ses coefficients sont des entiers de K et son déterminant une unité de K. Ces substitutions forment un groupe, le groupe unimodulaire de degré n dans K.

Pour simplifier, supposons le corps K totalement réel, de degré g. On considère *un système* S de g formes quadratiques définies positives de matrices symétriques $\mathfrak{S}^{(1)} = (s_{ik}^{(1)}), \ldots, \mathfrak{S}^{(g)} = (s_{ik}^{(g)})$. Soit $\mathfrak{U}$ la matrice d'une substitution unimodulaire dans K. On dit que l'on transforme le système S par $\mathfrak{U}$ si l'on transforme les matrices $\mathfrak{S}^{(k)}$ respectivement par les substitutions $\mathfrak{U}^{(k)}$ conjuguées de $\mathfrak{U}$. Un problème qui se pose est la détermination d'un domaine fondamental pour les systèmes S relativement aux transformations du groupe unimodulaire dans K. La méthode employée pour résoudre ce problème généralise celle de Minkowski, avec une modification permettant de tourner la difficulté due au nombre des classes d'idéaux de K et à l'introduction simultanée de tous les conjugués de K (introduction qui paraît inévitable si l'on veut généraliser la méthode de Minkowski). Les grandes lignes de cette méthode m'ont été suggérées par M. Siegel. Voici en résumé les résultats obtenus :

1. *Il existe un domaine fondamental R dans l'espace des systèmes S relativement aux transformations unimodulaires, domaine formé par la réunion d'un ou plusieurs angles solides convexes limités chacun par un nombre fini d'hyperplans passant par l'origine.*

2. *Les substitutions unimodulaires transformant les uns dans les autres les systèmes S frontières du domaine R sont en nombre fini, c'est-à-dire que le domaine fondamental R touche un nombre fini seulement de domaines équivalents (transformés de R par des $\mathfrak{U}$).*

Pour le cas général où le corps K possède g_1 conjugués réels et $2\,g_2$ conjugués imaginaires, on considère des systèmes S de g_1 formes quadratiques définies positives et de g_2 formes hermitiennes définies positives. L'existence éventuelle dans K de racines de l'unité différentes de ± 1 amène une petite complication, mais les résultats sont les mêmes. De l'énoncé 2 on peut déduire un théorème de Hurwitz : *Le groupe unimodulaire de degré n dans un corps algébrique fini K possède un nombre fini d'éléments générateurs.*

3. Ambrogio Longhi (Lugano). — *Sulle involuzioni di ordine n e specie $n-1$ in un campo binario.*

Considerando, sopra un ente razionale ∞^1, una involuzione I_n^{n-1} di ordine n e di specie $n-1$, l'autore chiama *coppie principali* di I_n^{n-1} le $\binom{n-1}{2}$ coppie di elementi ε_1, ε_2 tali che $(n-1)\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ e $(n-1)\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1$ siano entrambi gruppi della I_n^{n-1}; mentre chiama *inerente* alla I_n^{n-1} la serie algebrica γ_n^1, di ordine n e d'indice 2, i cui gruppi constano ciascuno di un elemento ε e degli $n-1$ elementi $(n-1)$-upli della involuzione I_{n-1}^{n-2} residua di ε rispetto alla I_n^{n-1}.

Valgono allora i teoremi seguenti :

a) *Le coppie principali della involuzione* I_n^{n-1} *(con* $n > 2$*) sono tutte neutre per una stessa involuzione* I_n^2*: contenuta o no totalmente nella* I_n^{n-1} *secondo che* n *è pari o dispari, e individuata da tre generici gruppi della serie* γ_n^1 *inerente alla* I_n^{n-1}.

b) *Quando* n *è dispari, le coppie principali della involuzione* I_n^{n-1} *sono tutte neutre per una medesima involuzione* I_n^1 *totalmente contenuta nella* I_n^{n-1}*; e individuata dai due gruppi che l'involuzione* I_n^{n-1} *ha in comune con la serie* γ_n^1 *ad essa inerente.*

c) *Date genericamente, in uno stesso campo binario, due diverse involuzioni d'ordine* n *e di specie* $n-1$*, le coppie principali di una qualunque di esse sono tutte neutre per una medesima involuzione d'ordine* n *e di prima specie contenuta nell' altra: e individuata dai due gruppi che questa ha comuni con la serie* γ_n^1 *inerente alla prima involuzione.*

La dimostrazione di tali teoremi, seguita da varie applicazioni, specialmente alle curve razionali d'ordine n dello spazio ad $n-1$ dimensioni, comparirà nei *Commentarii Mathematici Helvetici.*

4. Karl Merz (Chur). — *Einseitiges Achtflach.*

Die beiden Ränder eines Prismenmantels können nach innen miteinander durch zweiseitige oder einseitige Bänder verbunden werden. Für einseitige Bänder kann der einfachste Fall am Würfel hergestellt werden. Die vier Quadrate des Mantels eines Würfels, nach Weglassung seiner Grundflächen, bilden ein Möbiusband mit Hilfe einer Diagonalfläche, die von einer der Randkanten des Mantels zu deren Gegenkante geht. Die vier Diagonalflächen dieser Art und die vier Seitenflächen des Würfels bilden zusammen ein einseitiges Achtflach, mit zwei Pyramidentrichtern nach der Würfelmitte. Doch sind dabei die genannten Diagonalflächen nicht ganz als Rechtecke zu belassen, weil die vier Diagonalen des Würfels als Kanten zu nehmen sind und nicht als Doppelstrecken. Damit bleiben von den Rechtecken nur die von zwei Diagonalen eingeschlossenen beiden Scheiteldreiecke zwischen den Mantelrändern, welche aber je zusammen als nur eine Fläche gelten. Dies ergibt sich aus der Entstehung dieses einseitigen Achtflachs aus seinem Netz:[1] $f = 8$, $e = 8$, $k = 16$, $c = 0$. Der Schnittpunkt der vier Diagonalen zählt nicht als Ecke, er ist der Rest der Selbstdurchdringung, ein vierfacher Punkt. Damit vertritt unter den Polyedern dieses einseitige Achtflach die *Kleinsche Fläche* oder den einseitigen Schlauch. Durch Weglassung einer Würfelfläche daran, entsteht ein einseitiger Henkel, und mit solchen Henkeln lassen sich einseitige Roste zusammensetzen, entsprechend wie Brezelflächen.

[1] Karl Merz, Vielflache aus Scheitelzellen und Hohlzellen. Kommissionsverlag F. Schuler, Chur 1939. Seite 156: Hohlblock, Henkel und Roste (erscheint nächstens).

5. Sophie Piccard (Neuchâtel). — *Sur les ensembles de distances des ensembles linéaires.*

Soient A et B deux ensembles linéaires. On appelle ensemble de distances entre les points de A et ceux de B et on désigne par $D\ (A, B)$ l'ensemble des nombres réels non négatifs d, tel qu'il existe au moins un élément a de A et au moins un élément b de B, dont la distance $a\,b = d$. Si $A = B$, posons $D\ (A, A) = D\ (A)$. C'est l'ensemble de distances entre les points de A que nous appellerons, pour abréger, l'ensemble de distances de A. Voici quelques propositions concernant les ensembles de distances des ensembles linéaires :

Proposition 1. L'ensemble de distances de tout ensemble linéaire de seconde catégorie de Baire, jouissant de la propriété de Baire, contient un intervalle dont l'une des extrémités est 0.

Proposition 2. La condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles linéaires *finis* A et B, dont chacun a avec n'importe laquelle de ses translations, au plus un point commun, aient le même ensemble de distances, c'est qu'ils soient congruents.

Proposition 3. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire E soit congruent à son complémentaire CE, c'est que l'ensemble $D\,(E) + D\,(CE)$ ne contienne pas tous les nombres réels positifs.

Proposition 4. Si un ensemble linéaire E congruent à son complémentaire contient un intervalle, l'ensemble M de tous les nombres positifs qui $\bar{\varepsilon}\, D\,(E)$ est dénombrable et ne contient aucune suite décroissante.

Proposition 5. Si E est un ensemble linéaire mesurable (L) ou jouissant de la propriété de Baire [donc en particulier, si E est un ensemble linéaire mesurable (B)], et si $E \cong CE$, il existe un nombre positif d, tel que tout multiple impair de d fait défaut dans l'ensemble $D\,(E)$ qui comprend, par contre, tous les autres nombres réels non négatifs.

Proposition 6. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire E congruent à son complémentaire, qui n'est pas mesurable (L), ne jouit pas de la propriété de Baire et tel que l'ensemble $< 0, \infty) - D\,(E)$ est dénombrable.

Proposition 7. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire E congruent à son complémentaire et tel que l'ensemble $< 0, \infty) - D\,(E)$ est indénombrable.

Proposition 8. Si un ensemble linéaire E est congruent à son complémentaire, l'ensemble $D(E)D(E,CE)$ est indénombrable.

Proposition 9. Si un ensemble linéaire E n'est pas congruent à son complémentaire CE, l'un au moins des ensembles $D\,(E), D\,(CE)$ est $= < 0, \infty)$.

Proposition 10. L'ensemble de distances d'un ensemble linéaire parfait et borné est parfait.

Proposition 11. Il existe deux ensembles linéaires parfaits P et Q, tels que mes $D(P) > 0$, mes $D(Q) > 0$, mes $D(P, Q) = 0$.

Proposition 12. Il existe deux ensembles linéaires parfaits R, S, tels que mes $D(R) = 0$, mes $D(S) = 0$, mes $D(R, S) > 0$.

Proposition 13. Quel que soit l'ensemble linéaire dénombrable (indénombrable) A, l'ensemble $D(A)$ a avec une infinité dénombrable (indénombrable) de ses translations une infinité dénombrable (indénombrable) de points communs.

Proposition 14. Quel que soit l'ensemble linéaire fermé, borné, dénombrable F, il existe un ensemble ordonné de nombres réels positifs A, tel que la somme des éléments de chaque segment de A est un nombre de $D(F)$, tout nombre de $D(F)$ pouvant être obtenu de cette façon.

Proposition 15. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, quel que soit l'ensemble (non vide) M de nombres réels positifs de mesure nulle (de première catégorie de Baire), il existe un ensemble linéaire E, tel que $D(E) = \langle 0, \infty) - M$.[1]

6. Willy Scherrer (Bern). — *Über retardierte Wechselwirkung.*

Die Berücksichtigung der Retardierung bei der Wechselwirkung zweier Teilchen mit den Massen M und m und den Ladungen E und e ist theoretisch von prinzipiellem Interesse, da eine Vernachlässigung dieser Retardierung für Kerndimensionen möglicherweise nicht mehr statthaft ist.

Da nun allgemein die spezielle Relativitätstheorie als ein Fortschritt angesehen wird, ist es nur konsequent, die für die Atomhülle übliche unretardierte Berechnungsweise als angenäherte Darstellung des exakten relativistischen Kraftausdrucks zu interpretieren. Dieser Ausdruck wird bekanntlich oft als „Minkowski-Kraft" bezeichnet und ist in der Literatur zu finden.[2] [3] Eine Bestätigung dieser Auffassung erhält man unmittelbar in dem Falle $M = \infty$, $E = -Ze$. Dann ergeben sich nämlich gerade diejenigen Kräfte, welche die Grundlage der Sommerfeldschen Theorie der Feinstruktur bilden.

Wenn man nun die Grössen M, m, E und e beliebig vorgibt, wird die Auswertung des erwähnten Kraftansatzes so kompliziert, dass an die Aufstellung einer allgemeinen Lösung kaum zu denken ist. Dies gilt sogar für den speziellen Fall gleicher Massen und entgegengesetzt gleicher Ladungen. Um trotzdem wenigstens eine gewisse Orientierung zu gewinnen, kann man spezielle Bahnformen vorgeben und untersuchen, ob für dieselben Gleichgewicht besteht. So wird man im Falle $M = m$, $E = -e$ ohne weiteres vermuten, dass sich die beiden Teil-

---

[1] Voir à ce sujet notre travail : « Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace enclidien », Collection des Mémoires de l'Université de Neuchâtel, fascicule 13, 1939.

[2] In Komponentenschreibweise bei W. Pauli, Relativitätstheorie, S. 644 ff., Enzyklopädie der math. Wissenschaften.

[3] In rektorieller Schreibweise bei W. Scherrer, Helvetica Physica Acta, Bd. 10, Heft 5, 1937, S. 395.

chen auf Kreisbahnen gleichförmig um ein ruhendes Zentrum bewegen können. Unter diesen Voraussetzungen findet man ja bei allen in Betracht kommenden unretardierten Kraftwirkungen Gleichgewicht.

Die Durchführung der Berechnung liefert aber das überraschende Resultat, dass gerade die genaue Retardierung das Bestehen eines derartigen Gleichgewichts verhindert. Die Situation wird noch merkwürdiger durch die Feststellung, dass bei Mitberücksichtigung der Reaktionskraft der Strahlung das Gleichgewicht wieder hergestellt wird. Im klassischen Falle $M = \infty$ liegen die Dinge bekanntlich gerade umgekehrt. Die Vermutung, dass die genaue Retardierung einen Hinweis auf die notwendige Massenungleichheit von Elementarteilchen enthalte, wäre wohl noch verfrüht. Auf jeden Fall aber können die unretardierten Kräfte nicht schlechthin als Näherungen für die retardierten angesehen werden.

7. Louis Kollros (Zurich). — *Sur les travaux scientifiques d'Ernst Meissner.*

Voir derrière, dans la partie consacrée aux nécrologies, la biographie et la liste des publications d'Ernst Meissner.