Sezione di Matematica

1. Sezione di Matematica

Seduta della Società elvetica matematica

Domenica e lunedì, 29 e 30 settembre 1940

Presidente : Prof. Dr. L. KOLLROS (Zurigo)
Segretario : Prof. Dr. G. DE RHAM (Losanna)

1. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). — *Sur les ensembles de distances.*

Voici quelques propositions concernant les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien $E^{(n)}$ (à un nombre fini quelconque n de dimensions).

Proposition 1. Quels que soient le nombre entier $n \geqq 1$ et le système $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$ de nombres réels positifs, l'ensemble $\{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est l'ensemble de distance d'un ensemble de points, d'ordre $n+1$, de l'espace $E^{(n)}$.

Proposition 2. Il existe un ensemble dénombrable de nombres réels non négatifs, comprenant 0, qui ne saurait être l'ensemble de distances d'un ensemble de points d'un espace euclidien à un nombre fini quelconque de dimensions.

Proposition 3. Quel que soit le nombre entier $n \geqq 1$, il existe un système fini, d'ordre $2n$, de nombres réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, tel que l'ensemble $\{0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$ n'est l'ensemble de distances d'aucun ensemble de points de l'espace $E^{(n)}$.

Proposition 4. Quel que soit le nombre entier $n \geqq 1$ et $\leqq 3$, il existe un système de $n+1$ nombres réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ tel que l'ensemble $\{0, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ n'est l'ensemble de distances d'aucun ensemble de points de l'espace $E^{(n)}$.

Proposition 5. Quel que soit l'ensemble infini A de points d'un espace $E^{(n)}$, les ensembles A et $D(A)$ ont la même puissance.

Proposition 6. La puissance de l'ensemble de tous les ensembles de nombres réels non négatifs qui sont des ensembles de distances d'ensembles de points d'un espace euclidien est $2^{2^{\aleph_0}}$.

Proposition 7. Soit n un nombre entier $\geqq 3$, soit $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ un système quelconque de nombres de la suite $1, 2, \ldots, n-1$, soit $K = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $K_1 = \underset{n-x}{E}\,[x \,\varepsilon\, D(K),\ x \neq 0]$ et soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des nombres réels non négatifs qui peuvent s'exprimer, dans le système de numération à base n, au moyen des seuls chiffres $0, a_1, a_2, \ldots, a_k$. Les deux ensembles $\mathfrak{A}$ et $D(\mathfrak{A})$ sont parfaits et si $D(\mathfrak{A})$ ne comprend pas tous les nombres réels non négatifs, cet ensemble est de mesure (lebesguienne) nulle, sauf si $a_k = n - 1 \,\overline{\in}\, D(K)$ et s'il existe deux nombres consécutifs de la suite $1, 2, \ldots, n - 2$ qui ne font pas partie de l'ensemble $D(K)$ alors que $D(K) + K_1 = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$, auquel cas $\mathit{mes}\, D(\mathfrak{A}) > 0$ et $\mathit{mes}\, [\langle 0, \infty) - D(\mathfrak{A})] > 0$.

2. ANDRÉ MERCIER (Berne). — *Sur le principe cosmologique d'Einstein-Milne.*[1]

Cette communication a présenté tout d'abord une comparaison entre l'axiomatique de la Théorie Cinématique de Milne et celle de la Relativité (Reichenbach, Carathéodory). La différence essentielle réside dans le fait que Milne introduit un ensemble de « particules-observateurs » susceptibles de convenir de la géométrie qu'ils veulent, alors qu'en Relativité il est d'emblée question d'un continuum de points et que la géométrie est prescrite. La Théorie Cinématique contient la Relativité Restreinte sous la forme d'un cas particulier se rapportant à ceux des observateurs qui se meuvent avec des vitesses relatives constantes (mouvement relatif que l'on peut définir). En ce point la Théorie Cinématique se distingue de la Relativité où la Relativité Restreinte apparaît non pas comme un cas particulier mais comme le cas limite où la gravitation est négligeable. C'est le postulat d'équivalence des observateurs qui fait que la Théorie Cinématique contient la Relativité Restreinte comme cas particulier, ce qui donne à la propriété d'équivalence définie par Milne beaucoup d'intérêt. A côté de la propriété d'équivalence, on en définit une seconde, qui est une espèce d'équivalence encore plus restrictive que la première. Pour appliquer la Théorie Cinématique à la cosmologie, il faut postuler que les galaxies ont à la fois les deux propriétés d'équivalence : c'est le principe cosmologique d'Einstein-Milne.

Un premier intérêt de la Théorie Cinématique est qu'elle montre qu'on peut fonder la Relativité Restreinte autrement qu'on ne l'a fait avant. Un second intérêt est qu'elle montre qu'on peut expliquer le déplacement des raies spectrales venant des galaxies lointaines par un effet Doppler dont l'origine est autre que celui imaginé dans la théorie de l'expansion de l'univers. Mais la Théorie Cinématique a certains inconvénients en rapport avec la gravitation et les possibilités expérimentales de la vérifier.

3. RUD. FUETER (Zürich). — *Die Funktionentheorie der Diracschen Gleichungen.*

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in vier Dimensionen kann man die Diracschen Gleichungen bei Einführung von zwei geeigneten Systemen von hyperkomplexen Grössen ersetzen durch die Bedingung,

---

[1] Un exposé complet doit paraître dans les Helv. Phys. Acta.

dass das entsprechende Integral über jede zweiseitige geschlossene Hyperfläche, in deren Innern die Funktionen überall stetig und stetig differentierbar sind, null wird. Die Arbeit wird ausführlich in den „Commentarii Mathematici Helvetici“ erscheinen.

4. Heinz Hopf (Zürich). — *Zur Topologie der Lieschen Gruppen.*

Eine Mannigfaltigkeit W, welche durch eine Liesche Gruppe G transitiv in sich transformiert wird, heisst ein „Wirkungsraum“ („espace homogène“) von G; ist G geschlossen, so ist auch W geschlossen. Unter der Eulerschen „Charakteristik“ einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M versteht man bekanntlich die Zahl $\Sigma\,(-1)^r\, a_r$, wobei a_r die Anzahl der r-dimensionalen Zellen einer Zerlegung von M bezeichnet.

Satz I. Die Charakteristik eines Wirkungsraumes einer geschlossenen Lieschen Gruppe ist positiv oder Null.

Diejenigen Transformationen von G, welche einen Punkt o von W festhalten, bilden eine Untergruppe von G, die sogenannte „Isotropiegruppe“; (sie ist im wesentlichen unabhängig von o). Unter dem „Rang“ einer geschlossenen Lieschen Gruppe G soll die Dimension der höchstdimensionalen Abelschen Untergruppen von G verstanden werden. Der Satz I lässt sich folgendermassen präzisieren :

Satz II. Die Charakteristik von W ist positiv oder Null, jenachdem die Isotropiegruppe den gleichen Rang wie G oder kleineren Rang als G hat.

Der Beweis beruht auf der Betrachtung von Fixpunkten.

Die Sätze und Beweise stammen von Herrn H. Samelson und dem Vortragenden gemeinsam. Eine ausführliche Darstellung wird bald an anderer Stelle erscheinen.

5. Georges de Rham (Lausanne). — *Sur l'homéomorphie des rotations de la Sphère à n dimensions.*

Deux rotations R_1 et R_2 de la Sphère à n dimensions S^n sont dites homéomorphes, s'il existe une transformation topologique T de S^n en elle-même qui transforme R_1 en $R_2 : R_2 = T\, R_1\, T^{-1}$. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que R_1 puisse être transformée en R_2 par une rotation, *c'est que R_1 et R_2 aient les mêmes racines caractéristiques.* Or, *cette condition est aussi nécessaire et suffisante pour l'homéomorphie de R_1 et R_2.* Par des moyens élémentaires, on peut reconnaître que deux rotations homéomorphes ont les mêmes racines caractéristiques qui ne sont pas racines de l'unité, et, pour tout entier h, le même nombre de racines caractéristiques qui sont racines h-ièmes de l'unité, et la démonstration de la proposition générale ci-dessus est ramenée à sa démonstration dans le cas où les rotations R_1 et R_2 sont d'ordre fini (cas où toutes leurs racines caractéristiques sont des racines de l'unité). La démonstration dans ce cas utilise des moyens difficiles. Un exposé complet sera publié dans un autre recueil.

6. Louis Kollros (Zurich). — *Une propriété des variétés du second ordre.*

Cette propriété est une généralisation dans l'espace à n dimensions du théorème suivant que Steiner a énoncé sans démonstration pour $n = 2$ (O. c. II, p. 341) : « Si l'on trace un cercle c tangent à une conique en l'un de ses points P et orthogonal à son cercle orthoptique, le diamètre de c est égal au rayon de courbure de la conique en P. »

Pour $n = 3$, elle s'énonce ainsi : « Le diamètre de la sphère tangente à une quadrique Q en l'un quelconque de ses points P et orthogonale à la sphère orthoptique de Q est égal à la somme des deux rayons de courbure principaux de la quadrique en P (donc aussi égal à la somme des rayons de courbure des sections normales de Q menées par deux diamètres conjugués quelconques de l'indicatrice de Q en P).»

Dans le cas général, le diamètre en question est la somme des $(n—1)$ rayons de courbure principaux de l'hyperquadrique au point considéré.

Cette propriété caractérise les variétés du second ordre : Si (pour $n = 2$) on donne un cercle fixe c dans le plan et si l'on cherche toutes les courbes planes telles que — P étant un point quelconque de la courbe, M le centre de courbure en P, et P' le symétrique de M par rapport à P — le cercle de diamètre PP' soit orthogonal au cercle donné c, on trouve une équation différentielle dont les intégrales sont les équations des coniques dont c est le cercle orthoptique. Cette équation différentielle est particulièrement simple si l'on considère la courbe comme enveloppe de la droite $p = x cos u + y sin u$; la fonction p de u satisfait alors à l'équation $pp'' + p'^2 + 2p^2 = r^2$ qui devient $t'' + 4t = 2r^2$ par la substitution $p^2 = t$.

Pour $n = 3$, on considère la surface comme enveloppe du plan

$$p = x \cos u \cos v + y \sin u \cos v + z \sin v.$$

La fonction p de u et v satisfait alors à une équation aux dérivées partielles du second ordre qui, pour $p^2 = t$, prend la forme :

$$t''_{vv} + \sec^2 v \cdot t''_{uu} - tg\, v \cdot t'_v + 6\, t = 2\, r^2.$$

En particulier, si $r^2 = A + B + C$, les intégrales de cette équation représentées par les quadriques rapportées à leurs axes sont :

$$t = p^2 = (A\cos^2 u + B\sin^2 u) \cos^2 v + C\sin^2 v.$$

Les autres intégrales sont les équations tangentielles de ces mêmes quadriques après une rotation quelconque autour de leur centre.

(Voir « Commentarii Mathematici Helvetici », tome 13.)

7. Alexander Ostrowski (Basel). — *Über einige Differentialtransformationen im dreidimensionalen Raum.*

Eine Transformation

$$\xi = f(x, y_1, y_2, y_1', y_2'),\ \eta_1 = g_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2'),\ \eta_2 = g_2(x, y, y_2, y_1', y_2'),$$

wo y_1, y_2 unbestimmte Funktionen von x sind, heisst *reversibel,* wenn sich aus den Transformationsgleichungen mit Hilfe der Differentiationen und Eliminationen Ausdrücke von x, y_1, y_2 durch ξ, η_1, η_2, $\frac{d\eta_1}{d\xi}$, $\frac{d\eta_2}{d\xi}$, herleiten lassen. Während ähnlich definierte Transformationen im Falle *einer* abhängigen Variabel mit Lieschen Berührungstransformationen übereinstimmen, handelt es sich im vorliegenden Falle um eine neue Art von Differentialtransformationen, deren Bestimmung und Diskussion die Untersuchungen des Verfassers gewidmet sind. Eine ausführliche Darstellung erscheint in den *„Commentarii Mathematici Helvetici“* unter dem Titel :

„Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions.“

8. Rolin Wavre (Genève). — *Sur le mouvement avec frottement de n sphères concentriques et le passage à la limite.*

Voir le compte rendu de la séance dans « l'Enseignement Mathématique ».

9. Ambrogio Longhi (Lugano). — *Sulle involuzioni ellittiche appartenenti ad una curva ellittica.*

L'Autore espone alcune sue ricerche di geometria sulle curve ellittiche, stabilendo, fra altri, i teoremi seguenti.

Data una curva $\mathfrak{C}$ di genere $p = 1$ e di modulo generale :

a) La condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza birazionale di due involuzioni ellittiche γ^1_α, γ^1_β appartenenti a $\mathfrak{C}$, è che, essendo Δ il minimo comune multiplo dei loro ordini α e β, si abbia $\Delta : \alpha = \varrho^2$ e $\Delta : \beta = \sigma^2$, con ϱ e σ interi, e che i gruppi dei punti ϱ-upli di tutte le serie lineari $g^{\varrho-1}_{\alpha\varrho}$ composte (su $\mathfrak{C}$) con γ^1_α, come pure i gruppi dei punti σ-upli delle $g^{\sigma-1}_{\beta\sigma}$ composte con γ^1_β, riempiano una medesima involuzione γ^1_Δ.

b) Le involuzioni ellittiche, primitive o no, di dato ordine n, esistenti su $\mathfrak{C}$, sono in numero eguale alla somma di tutti i divisori di n.

c) La condizione necessaria e sufficiente affinchè esista su $\mathfrak{C}$ qualche r-upla di involuzioni ellittiche birazionalmente identiche e di ordini assegnati $n_1, n_2, \ldots, n_r$ è che siano quadrati di numeri interi i quozienti $n_i : \delta$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$, ove δ indica il massimo comun divisore degli ordini stessi. Soddisfatta questa condizione, il numero di tali r-uple di involuzioni eguaglia la somma di tutti i divisori di δ.

Del teorema *a)* è caso particolarissimo, per $\beta = 1$, un altro del Torelli[1] : mentre il teorema *b)* costituisce un notevole complemento

[1] R. Torelli, *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 21[1] [5], 1912, p. 457.)

ad un risultato del CASTELNUOVO[1] sul conteggio delle involuzioni ellittiche *primitive,* di dato ordine, appartenenti a $\mathfrak{C}$.

Il lavoro completo dell' Autore è in corso di stampa nelle Memorie della R. Accademia d'Italia.

10. MAX GUT (Zürich). — *Mittel aus Dirichlet-Reihen.*

Da die Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers k von unendlich hohem Grade abzählbar sind, kann man immer eine unendliche Folge von algebraischen Zahlkörpern von endlichem Grade $k_1, k_2, \ldots, k_i, k_{i+1}, \ldots$ so finden, dass für jedes $i \geqq 1$ der Körper k_{i+1} eine echte Erweiterung von k_i und $\lim_{=\infty} k_i = k$ ist. Insbesondere bedeute im folgenden k spezieller immer einen solchen Körper von unendlich hohem Grade, der auf folgende Weise erzeugt werden kann: Man numeriere alle rationalen Primzahlen in irgendeiner Reihenfolge, und es bedeute p_j die $j$te Zahl dieser Folge. Es sei k_1 beliebig gewählt, aber für alle $i \geqq 1$ der Körper k_{i+1} so, dass alle Primideale von k_i, welche eine Primzahl $p \leqq p_i$ teilen, in k_{i+1} voll zerfallen. Es sei n_i der Grad von k_i und $\zeta_i(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion von k_i. In einem Beitrag zur *Furtwängler-Festschrift* („Monatshefte für Mathematik und Physik", 48. Band, Seite 153, 1939) hatte ich gezeigt, dass unter diesen Voraussetzungen, falls $\Re(s) > 1$ ist, die Folge der Funktionen $\sqrt[n_i]{\zeta_i(s)}$, wo für reelles s die reelle Determination der Wurzel genommen wird, gegen eine bestimmte, für $\Re(s) > 1$ nirgends verschwindende analytische Grenzfunktion $Z(s)$ konvergiert. Ist q eine feste Primzahl, so erzeugt insbesondere die Gesamtheit aller absolutzyklischen Körper vom Grade q einen solchen Körper k. Auf Grund der Primidealzerlegung in k kann man dann die Grenzfunktion $Z_q(s)$ sofort explizite angeben.

Da nun $Z_q(s)$ im wesentlichen nichts anderes ist als der Limes des geometrischen Mittels sämtlicher L-Reihen des rationalen Zahlkörpers, deren Charakter die Eigenschaft hat, dass seine $q$te Potenz für jede natürliche Zahl als Argument entweder gleich 1 oder 0 ist, so stellt sich sofort das Problem, dieses Mittel auch ohne die Theorie der algebraischen Zahlkörper von unendlich hohem Grade zu bestimmen. In einem Beitrag zur *Fueter-Festschrift* (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 85. Band, Seite 214, 1940) habe ich gezeigt, dass man auf Grund der Theorie der gewöhnlichen quadratischen Zahlkörper allein im Falle $q = 2$ den Limes für gleiche geeignete Teilfolgen nicht nur des geometrischen, sondern auch des arithmetischen und harmonischen Mittels aller L-Reihen vermöge eines einfachen Hilfssatzes bestimmen kann. Dieses Lemma gestattet ausserdem, derartige Mittel für weitere Typen von solchen Dirichlet-Reihen

[1] G. Castelnuovo, *Geometria sulle curve ellittiche.* (Atti della R. Acc. di Torino, 24, 1888, p. 13.)

mit reellen Restcharakteren zu bestimmen, wie sie in speziellen Fällen besonders von Euler und Cesaro betrachtet wurden.

11. JOHANN JAKOB BURCKHARDT (Zürich). — *Ein geometrischer Beweis des Satzes von Minkowski über konvexe Körper mit Mittelpunkt.*

Das Referat befasst sich mit einem geometrischen Beweis eines Satzes von Minkowski, wonach ein konvexer Körper K, der sich einfach und lückenlos aus zentrierten Körpern, den Bausteinen, zusammensetzt, selbst einen Mittelpunkt besitzt. Man vergleiche hierzu die Arbeit im Festband für Herrn Prof. R. Fueter (Beiblatt zur Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Nr. 32, Jahrgang 85, 1940, Seiten 149 bis 154). Der Beweis verläuft in zwei Schritten :

1. Jeder betrachtete Körper K ist von Paaren kongruenter und parallel liegender Vielecke F und $\overline{F}$ begrenzt. Um dies zu zeigen, verwendet man ein Spiegelungsverfahren, das auf F und $\overline{F}$ eine Einteilung in Vielecke v und $\overline{v}$ derart hervorruft, dass jedes $\overline{v}$ kongruent und parallel gelegen zu einem v ist. Falls sich die v nur auf eine Weise zu einem konvexen Vieleck F zusammensetzen lassen, gilt dies auch für die $\overline{v}$, und die Behauptung ist bewiesen. Falls dies aber nicht zutrifft, muss man die Bausteine passend abändern, um diesen Fall zu erreichen. Dabei sind gewisse Ausnahmefälle gesondert zu behandeln.

2. Um hieraus zu beweisen, dass K einen Mittelpunkt hat, darf man annehmen, K sei nicht begrenzt von Vielecken mit lauter Paaren paralleler gleich langer Seiten, denn sonst hat K nach einem Satz von A. D. Alexandroff bereits einen Mittelpunkt. k_1 sei eine Seite von F, zu der es keine parallele und gleich lange Seite in F gibt. Man projiziert K in Richtung von k_1 auf eine zu k_1 schiefe Ebene, wodurch man ein konvexes Polygon P erhält. Aus der Konvexität von P folgt : Hätte K keinen Mittelpunkt, so gäbe es auf K eine gerade Anzahl zu k_1 paralleler und gleich langer Kanten k_2, k_3, ... Nimmt man an, dass weder eine Strecke k_i noch eine daraus durch Spiegelung am Mittelpunkt des zugehörigen Bausteines erhaltene Strecke zugleich Kante mehrerer Bausteine ist, so folgt leicht, dass es zu k_1 nur ein Bild auf K geben kann. Es ist daher unmöglich, dass es auf K eine gerade Anzahl zu k_1 paralleler und gleich langer Kanten gibt. Ist die Annahme über die Lage der k_i nicht erfüllt, so kann man sie im allgemeinen durch Abänderung der Bausteine herbeiführen, wobei wiederum gewisse Ausnahmefälle gesondert zu betrachten sind. Durch diesen zweiten Schritt ist eine Lücke in der Arbeit im Festband Fueter ausgefüllt.

12. PIERRE HUMBERT (Lausanne). — *Réduction des formes quadratiques indéfinies dans un corps algébrique fini.*

Les résultats démontrés par M. Siegel dans son mémoire intitulé : « Einheiten quadratischer Formen[1] » s'étendent en prenant pour

[1] Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der hansischen Universität, Bd. 13, 3/4 (1940).

domaine de rationalité un corps algébrique fini K. On démontre qu'il existe seulement un nombre fini de classes de formes quadratiques à coefficients entiers dans K et dont la norme du déterminant est donnée. Dans le cas où K est totalement réel, une forme quadratique dans K dont les conjuguées ne sont pas toutes définies positives possède une infinité d'unités, c'est-à-dire de substitutions à coefficients entiers dans K, de déterminant unité laissant cette forme invariante.

13. Félix Fiala, présenté par M. H. Hopf. — *Sur les surfaces ouvertes à courbure positive.*

Nous allons indiquer, en attendant un exposé plus complet,[1] comment nous avons pu généraliser *l'inégalité isopérimétrique* du plan euclidien

$$L^2 \geqq 4\,\pi\,A \tag{1}$$

où L désigne la longueur d'une courbe fermée $\mathfrak{F}$ et A l'aire comprise à l'intérieur de $\mathfrak{F}$. Pour les *surfaces analytiques ouvertes à courbure non négative* (p. ex. paraboloïde elliptique) nous avons pu établir la formule

$$L^2 \geqq 2\,A \int k\, ds \tag{2}$$

où $\int k\, ds$ représente l'intégrale de la courbe géodésique k le long de $\mathfrak{F}$. L'égalité n'a lieu que si la surface est un plan euclidien et la courbe $\mathfrak{F}$ un cercle.

En tenant compte du signe de la courbure et en désignant par C l'intégrale de cette courbure étendue à toute la surface on obtient

$$L^2 \geqq 2\,A\,(2\,\pi - C) \tag{3}$$

Nous avons réussi à montrer que cette formule ne peut pas être améliorée en général; dans ce but nous avons introduit la notion de *vrai cercle,* défini comme le lieu des points dont la plus courte distance à un point fixe est constante.

C'est sur une généralisation de la notion de vrai cercle que repose la démonstration de la formule (2) : nous avons défini la *vraie parallèle* à distance p de la courbe $\mathfrak{F}$ comme le lieu des points dont la plus courte distance à la courbe $\mathfrak{F}$ est égale à p (p est compté positivement vers l'extérieur de $\mathfrak{F}$, négativement vers l'intérieur). L'étude des vraies parallèles est naturellement basée sur une connaissance approfondie de la famille des lignes géodésiques normales à la courbe $\mathfrak{F}$. Soit $L\,(p)$ la longueur de la vraie parallèle à distance p de $\mathfrak{F}$. Nous avons montré que $L\,(p)$ est une fonction continue de p et dérivable sauf éventuellement pour une suite divergente de valeurs de p. L'aire A s'exprime alors comme

$$\int_{\overline{p}}^{0} L\,(p)\, dp$$

où $\overline{p}$ est une constante négative dépendant de $\mathfrak{F}$. Une inégalité pour la dérivée de $L\,(p)$ provenant du signe de la courbure conduit à la démonstration.

[1] Voir aussi une note parue dans les C. R. 209 (1939), p. 821—823.

14. Karl Merz (Chur). — *Vielfache Kreuzhauben.*

Auf ein gerades Prisma über einem regelmässigen $2n$ Eck wird eine anschliessende gerade Pyramide gesetzt. Durch diese werden ihre n Diagonalflächen als Schnittflächen gelegt, wodurch sie in $2n$ Teilpyramiden zerfällt, von denen n herausgenommen werden, so dass dadurch n Lücken zwischen den n bleibenden Teilpyramiden oder Zellen entstehen. An Flächen bleiben an der entstehenden Kreuzhaube: 1. die n Schnittflächen, durchgehend als je eine Fläche gezählt, die einander in der n-fachen Strecke durchdringen, an welcher die n Teilpyramiden aneinanderstossen, wodurch an jeder dieser Schnittflächen zwei Halbflächen zu unterscheiden sind; 2. n Seitenflächen der ursprünglichen Pyramide, die je zwei aufeinanderfolgende Halbflächen verbinden; 3. n Zwischenflächen zwischen je zwei Zellen, in der ursprünglich gemeinsamen Fläche von Prisma und Pyramide gelegen, während die Grundflächen unter den n Teilpyramiden zu tilgen sind, so dass hier n Löcher entstehen, abwechselnd mit den n Zwischenflächen; 4. $2n$ Seitenflächen des Prismas; und 5. die Grundfläche des Prismas, mit der die Kreuzhaube abgeschlossen werden kann. Damit sind $f = 5n + 1$ Flächen vorhanden, $e = 4n + 2$ Ecken und $k = 10n$ Kanten, wobei die n-fache Strecke nicht mitzählt. Daraus wird die Charakteristik $c = e - k + f = 3 - n$ und die Zusammenhangzahl also $h = n$. Zu jeder Zusammenhangzahl $h > 1$ besteht somit eine geschlossene Kreuzhaube mit der Seitenflächenzahl $2n = 2h$ des Prismas, das als Sockel die Kreuzhaube mit ihren n Zellen trägt, die an der n-fachen Strecke zusammenstossen. Nach dieser sei die Kreuzhaube auch als n-fach bezeichnet, womit die gewöhnliche Kreuzhaube zur 2fachen wird, mit ihrer Doppelstrecke und den zwei Zellen.

Das einfachste Netz einer vielfachen Kreuzhaube wird erhalten, indem an die in einem rechteckigen Streifen aneinandergesetzten Seitenflächen des Prismas, an dem einen Rand der $2n$ Strecken, abwechselnd angefügt werden die gleichschenkligen Dreiecke der n Seitenflächen der Pyramiden und der n Zwischenflächen. Dann sind die Halbflächen noch je zwei an jene Seitenflächen anzusetzen. Die Aufklappungen erfolgen alle nach der nämlichen Seite, wodurch dann je zwei gegenüberliegende Halbflächen zu einer Schnittfläche zusammenstossen. Für n ungerade findet dies mit den nämlichen Netzseiten statt, und die Kreuzhaube wird in diesen Fällen dadurch zweiseitig. Eine Zelle liegt je einer Lücke gegenüber, und die beiden Halbflächen einer Zelle gehen gegenüberliegend in die Halbflächen einer Lücke über. Schnitt- und Seitenflächen bilden aneinander fortgesetzt Verschlingungen durch die vielfache Strecke. Dagegen werden für n gerade die Kreuzhauben einseitig. Je zwei Halbflächen einer Zelle gehen über in die Halbflächen der Scheitelzelle, wobei die Halbflächen ihre Netzseiten gegeneinander wenden, so dass die vielfache Strecke zur vielfachen Wendestrecke wird. Am Netz unterscheidet man durch Schraffur die Unterseite von der Oberseite. Dann zeigt durch die Aufklappung die Kreuzhaube aussen die eine Netzseite und innen die andere, wie eine zweiseitige Fläche. Aber für n gerade liegen die Wendungen der Netzseiten in der n-fachen Strecke, in welcher Oberseite und Unterseite der einzelnen durchgehenden Schnittflächen aneinanderstossen. Für anders zusammengesetzte Netze treten die Wendestrecken auch an Kanten auf, und einzelne Flächen erscheinen als gewendet[1] (Vorweisungen).

15. MARCEL DIETHELM (Rickenbach [Schwyz]). — *Die Einführung des Differentialquotienten an der Mittelschule.*

1. Vorarbeiten.

a) Tabellarische und graphische Darstellung von zwei veränderlichen Grössen, die sich gegenseitig beeinflussen. Der Funktionsbegriff.
b) Das Steigungsmass.
c) Betrachtung eines gebrochenen Linienzuges.
d) Tangentenkonstruktionen des Kreises und der Kegelschnitte.
e) Biographien (Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler).

2. Die Einführung.

a) Geometrisch (Tangentenproblem).
b) Algebraisch (Schema für die Ableitung des Differentialquotienten).
c) Physikalisch (Der freie Fall).

---

[1] K. Merz, Kreuzhauben aus verschiedenen Netzen. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1940, Jahrgang 85, Seite 51.