Sektion für Mathematik

Autor(en): [s.n.]

Objekttyp: AssociationNews

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Band (Jahr): 123 (1943)

PDF erstellt am: 05.08.2024

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Sonntag, 29. August 1943

Präsident: Prof. Dr. PAUL BUCHNER (Basel)
Sekretär: Prof. Dr. MAX GUT (Herrliberg)

1. BENO ECKMANN (Lausanne). — *Über monothetische Gruppen.*

Wenn es in einer topologischen Gruppe G ein Element a gibt, dessen Potenzen in G überall dicht liegen, so nennt man die Gruppe nach van Dantzig *monothetisch,* und man sagt auch, sie sei von a erzeugt; eine solche Gruppe ist natürlich Abelsch. Für diskrete Gruppen bedeutet monothetisch dasselbe wie zyklisch.

Ist G eine kompakte Abelsche Gruppe, so kann man die Charaktere von G zu Hilfe ziehen (d. h. die stetigen homomorphen Abbildungen von G in die multiplikative Gruppe K der komplexen Zahlen vom Betrage 1; der Charakter, der durchwegs $= 1$ ist, soll der triviale heissen) und leicht zeigen: *Wenn es in G ein Element a gibt, derart dass für alle nicht-trivialen Charaktere f von G $f(a) \neq 1$ ist, dann ist G monothetisch, nämlich von a erzeugt.*

Mit diesem Kriterium kann man z. B. beweisen, dass das direkte Produkt T^n von n Kreisdrehungsgruppen (oder n Gruppen K), das sogenannte n-dimensionale Toroid, monothetisch ist; ein Element dieser Gruppe ist durch n Winkel $2\pi a_1, \ldots, 2\pi a_n$, also durch n reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ (mod. 1) gegeben, und wenn man diese so wählt, dass sie inkommensurabel sind (mod. 1), so erhält man ein erzeugendes Element von T^n. Dies ist nichts anderes als der bekannte «Kroneckersche Approximationssatz»[1], für welchen unsere Methode einen neuen, besonders einfachen Beweis ergibt.

Das Kriterium lässt sich, besonders in Verbindung mit der Pontrjaginschen Charakterentheorie[2], auch auf andere kompakte Abelsche Gruppen anwenden. So sind alle *zusammenhängenden* derartigen Gruppen monothetisch, ebenso die n-adischen Gruppen, die vollständig unzusammenhängend und dem Cantorschen Diskontinuum homöomorph sind.

---

[1] Vgl. etwa J. F. Koksma, Diophantische Approximationen (Berlin 1936), S. 83.

[2] L. Pontrjagin, Topological groups (Princeton 1939), Kap. V.

Man findet ferner, in Analogie zu der Verschärfung des Kroneckerschen Satzes, die Weyl [1] angegeben hat : Die Potenzen eines erzeugenden Elementes einer kompakten monothetischen Gruppe sind in G *gleichverteilt,* d. h. liegen nicht nur überall dicht, sondern sogar überall *gleich* dicht, im Sinne der invarianten Volummessung in G. Es gilt nämlich der folgende Satz, in welchem man zum vorneherein gar nicht anzunehmen braucht, dass G Abelsch ist : *Wenn ein Element a der kompakten Gruppe G bei allen (nicht-trivialen) irreduziblen Darstellungen durch Matrizen dargestellt wird, die nicht den Eigenwert 1 haben, dann sind die Potenzen von a in der Gruppe gleichverteilt* (also überall dicht, G ist also monothetisch). Der Beweis benützt die Vollständigkeit der irreduziblen Darstellungen (Satz von Peter-Weyl); er wird natürlich einfacher im Falle einer endlichen Gruppe G, wo unser Satz auch von Interesse ist.

2. MAX GUT (Zürich). — *Zur Theorie der Strahlklassenkörper der quadratisch reellen Zahlkörper.*

Jeder absolut Abelsche Zahlkörper ist für eine geeignete natürliche Zahl m ein Unterkörper des Körpers der m-ten Einheitswurzeln, und daher wollen wir einen solchen Körper kurz einen *Kreiskörper* nennen. Ist k ein Kreiskörper, $\mathfrak{f}$ ein ganzes Ideal von k, so bezeichne $K(\mathfrak{f})$ den Strahlklassenkörper, der zur vollständigen multiplikativen Idealklassengruppe mod. $\mathfrak{f}$ von k gehört, $k(\mathfrak{f})$ den maximalen Kreiskörper, der in $K(\mathfrak{f})$ enthalten ist. Insbesondere bedeutet also $K(1)$ den *Hilbert*schen Klassenkörper von k, $k(1)$ den maximalen Kreiskörper, der im *Hilbert*schen Klassenkörper von k enthalten ist. In einer früheren Arbeit (Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklassenkörper der quadratisch imaginären Zahlkörper, Comment. Math. Helvet., vol. 15 [1942/43], p. 81) habe ich für beliebiges k den Körper $k(1)$ bestimmt. Weiter wurden dort für den Fall, dass k ein quadratisch imaginärer Körper ist, für beliebiges $\mathfrak{f}$ der Körper $k(\mathfrak{f})$ bestimmt, Sätze angegeben, die einen Einblick in die Struktur von $K(\mathfrak{f})$ ergeben, endlich diese Theorie angewandt auf die Zerfällung der Teilungsgleichungen der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen. In einer weiteren, Herrn Prof. *Carathéodory* zum 70. Geburtstag gewidmeten Arbeit, die in den Comment. Math. Helvet., vol. 16 (1943/44) erscheinen wird, habe ich die analogen Untersuchungen für quadratisch *reelle* Grundkörper k durchgeführt. In diesem Falle enthält k eine Grundeinheit, so dass die Struktur von $K(\mathfrak{f})$ im allgemeinen von wesentlich anderer Natur ist als im Falle eines quadratisch imaginären Grundkörpers.

3. HUGO HADWIGER (Bern). — *Ein Überdeckungssatz des R_n.* — Kein Manuskript eingegangen.

---

[1] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. Bd. 77 (1916), S. 313 ff.

4. Rolin Wavre (Genève). — *Les hermitiens limites d'hermitiens réguliers.* — Pas reçu de manuscrit.

5. Willy Scherrer (Bern). — *Zum Problem der Trägheit in der Wellenmechanik.* — Kein Manuskript eingegangen.

6. C. Habicht (Schaffhausen). — *Über Lösungen von algebraischen Gleichungssystemen.* — Kein Manuskript eingegangen.

7. Walter Nef (Zürich). — *Hyperkomplexe Methoden zur Integration partieller Differentialgleichungen.*

Auf einer (n-1)-dimensionalen Fläche R seien die Werte

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \psi_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

der Ableitungen eines Integrals der hyperbolischen oder ultrahyperbolischen Differentialgleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} = o \qquad (\varkappa_j = \pm 1) \tag{1}$$

gegeben. Gesucht ist Φ in einer noch zu beschreibenden Umgebung U von R.

Wir führen eine Cliffordsche Algebra ein, in welcher n Basisgrössen $e_1, \ldots, e_n$ liegen, die den Relationen genügen :

$$e_j^2 = \varkappa_j \ (j = 1, \ldots, n), \ e_j e_k = -e_k e_j \ (j, k = 1, \ldots, n, j \neq k).$$

Eine Funktion $\quad w = f(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j \, (x_1, \ldots, x_n) \, e_j$

der Variabeln $\quad z = \sum_{j=1}^{n} x_j \, e_j$

heisst regulär, wenn $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} e_k = o$

ist. Man kann beweisen, dass für jedes Integral Φ von (1) die Funktion

$$w = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} e_j$$

regulär ist. Hiervon gilt auch die Umkehrung. Die Randwertaufgabe ist also gelöst, wenn wir in U eine reguläre Funktion finden können, die auf R die Randwerte

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \, e_j$$

annimmt.

Nun sei R eine (n-1)-dimensionale Hyperfläche und U eine Umgebung von R von der Art, dass jeder erzeugende Strahl des charakteristischen Kegels irgendeines Punktes von U genau einen Schnittpunkt mit R gemeinsam hat und so, dass der zwischen der Spitze des *ch. K.* und dem Schnittpunkt mit R gelegene Teil des Strahls ganz zu U gehört. Dann gilt, wenn $f(z)$ eine in U und auf R reguläre Funktion ist, für jeden Punkt z von U:

$$f(z) = A \int_{S(z)} f(\zeta)\, d\Sigma\, \frac{\overline{(\zeta - z)}}{|\zeta - z|^{n-1}} + B \int_{K(z)} do\, f(\zeta)\, \frac{(\zeta - z)\,\overline{(\zeta - z)}}{\|\zeta - z|^{n+1}}. \qquad (2)$$

Dabei ist $S(z)$ der Durchschnitt des zu z gehörigen *ch. K.* mit R und $K(z)$ das zwischen $S(z)$ und R gelegene Stück des *ch. K.* A und B sind Konstanten. Umgekehrt ist jede Funktion $f(z)$, die der letzten Gleichung genügt, regulär. Die von uns gesuchte Funktion ist also eine Lösung der linearen Integralgleichung

$$f(z) = J(z) + B \int_{K(z)} do\, f(\zeta)\, \frac{(\zeta - z)\,\overline{(\zeta - z)}}{|\zeta - z|^{n+1}}, \qquad (3)$$

wenn wir setzen:

$$J(z) = A \int_{S(z)} \psi\, d\Sigma\, \frac{\overline{(\zeta - z)}}{|\zeta - z|^{n-1}}.$$

Wenn die Lösung $f(z)$ von (3) auf R mit ψ übereinstimmt, so ist $f(z)$ zugleich eine Lösung von (2), also regulär und die Aufgabe ist gelöst. Stimmt die Lösung $f(z)$ von (3) auf R nicht mit ψ überein, so ist die Aufgabe nicht lösbar.

8. A. HÄUSERMANN (Zürich). — *Über die Berechnung singulärer Moduln bei Ludwig Schläfli.*

In diesem Referat wurde auf bisher völlig unbekannte allgemeine und numerische Resultate des Berner Mathematikers *L. Schläfli* (1814 bis 1895) im Gebiet der singulären Moduln hingewiesen. — Auf Anregung von Herrn Prof. *Fueter* wurde der Nachlass *Schläflis* noch einmal gesichtet und alle Manuskripte sorgfältig zusammengestellt, die allgemeine Betrachtungen und numerische Berechnungen von singulären Moduln (sing. Mod.), von Modulargleichungen (Mod.gl.) und von Modularfunktionen (Mod.funkt.) enthielten. Das erste Aussondern geschah mit dem neuen Sachkatalog von Herrn Prof. *Burckhardt.* Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der auf den Herbst erscheinenden Inaugural-Dissertation des Referenten ausführlich dargestellt. — Ausgangspunkt für *Schläfli* war das eingehende Studium der Abhandlung von *Hermite* « Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré » (Paris, 1859). Die ältesten der ausgewählten Manuskripte von *Schläfli* (aus dem Sommer 1867) sind nur Kontrollen und Ergänzungen (Beweise) der *Hermite*schen Arbeit. Ein Beleg ist das wiederaufgefundene Heft A. Aber schon in den Heften D, E löst er sich sukzessive von seinem Vorbild und geht eigene Wege. — Ein Teil von *Jouberts* Berechnungen (1860) war ihm bekannt; hingegen scheint *Kroneckers* Arbeit (1862, Berlin. Berichte) sein Schaffen nicht beeinflusst zu haben. — Gemeinsam mit *Hermite* ist : *a)* das Verwenden der Mod.funkt. φ, χ, ψ ; *b)* Ordnung $n = 1$ für die Transformation dieser Mod.funkt. (er berechnet somit Moduln der Kongruenzgruppe 2. Stufe); *c)* Benützen der Mod.gl.; *d)* Verwenden der Relation der Mod.funkt. bei gleichen Argumenten. — Verschieden aber ist : *a)* das Berechnungs*ziel : Schläfli* will die sing. Mod. für alle Diskriminanten $D = 1, 2, 3, 4 \ldots$ bestimmen, während *Hermite* nur gewisse Klassen von D berechnet; *b)* die Berechnungs*art :* Wahl der Argumente der Mod.funkt. (bei *Hermite* nicht aufgezeichnet), Aufsuchen und Eliminieren der « fremden » Faktoren, d. h. von Polynomen, die nicht zu D gehören (fehlt bei *Hermite* vollständig), Auflösen des ausgewählten Polynoms nach allen Moduln und Invarianten (bei *Hermite* nur Aufsuchen der Zahlinvariante a), Bestimmen aller sing. Moduln, die zu einem D gehören (von *Hermite* nicht betrachtet).

Die verschiedenen Methoden sind in der Diss. genau behandelt. Hier sei nur auf die Ergebnisse hingewiesen : *a)* im Sommer 1867 bewies er die Transformationsformeln der Mod.funkt. von *Hermite.* Diesen Beweis und eine Serie neuer Mod.gl. veröffentlichte er 1870, als einzige Abhandlung im Gebiet der sing. Mod.; *b)* im Herbst 1867 entdeckte er die Diskontinuitätsbereiche der Mod.funkt., was ihn auf die sog. Dedekindsche Modulfigur führte. Diese beschrieb er also zehn Jahre vor dem Brief von Dedekind (durch Text, Bild und Datum belegt); *c)* im Frühling 1868 stiess er auf den Begriff der Klasseninvarianten im Sinne von H. Weber, berechnete diese ausführlich, genau 20 Jahre vor der Publikation der Weberschen Definition; *d)* im ganzen hat er 45 Diskr. (grösste $D = 63$) bestimmt, und zwar meist sowohl die einzelnen Moduln, die Klassengleichung als auch die Klasseninvarianten. Von diesen 45 Ergebnissen sind 20 Neuberechnungen gegenüber seinen Vorgängern *Hermite, Joubert* und *Kronecker; e)* die allgemeinen Betrachtungen der Mod.funkt., die Herleitungen der Mod.-gl. und die Ableitungen der Transformationsformeln sind — obwohl *Hermite* die Anregung gab — durchaus selbständig, neuartig und exakter als die skizzenhafte Darstellung von *Hermite.*

Mögen diese Resultate eine eventuelle Veröffentlichung der Manuskripte als nützlich erscheinen lassen.

Es hat noch gesprochen : Edith Müller, Zürich.