

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.
Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société
Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative
= Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Band: 141 (1961)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, den 23. September 1961

Präsident: Prof. Dr. H. JECKLIN (Zürich)

Sekretär: Prof. Dr. J. DE SIEBENTHAL (Lausanne)

1. S. PICCARD (Neuchâtel). — *Théorie des groupes.*

Systemes irréductibles d'éléments d'un groupe. Les groupes fondamentaux, leurs bases et leurs éléments fondamentaux.

Soit G un groupe multiplicatif d'ordre quelconque, fini ou infini, soit A un ensemble d'éléments de G et soit G^* le sous-groupe (propre ou non) de G qu'il engendre. Nous disons que l'ensemble A est irréductible si, quel que soit le sous-ensemble fini $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ de A comprenant un nombre k d'éléments, il n'existe, dans G^* , aucun sous-ensemble $[b_1, b_2, \dots, b_l]$ formé d'un nombre $l < k$ éléments du groupe G^* et tel que l'ensemble $(A - [a_1, a_2, \dots, a_k]) \cup [b_1, b_2, \dots, b_l]$ soit encore générateur de G^* .

Nous disons que le groupe G est fondamental s'il possède au moins un système irréductible d'éléments générateurs et nous appelons base d'un groupe fondamental tout système irréductible de ses éléments générateurs. Tout groupe d'ordre fini, tout groupe qui possède des systèmes finis d'éléments générateurs, tout groupe libre, tout groupe quasi libre sont des groupes fondamentaux. Mais il existe aussi une infinité de groupes non fondamentaux. Ainsi le groupe $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$ de transformations des nombres entiers dont les éléments sont toutes les substitutions (paires) d'un nombre fini quelconque d'entiers quelconques n'est pas fondamental.

Nous disons qu'un élément d'un groupe fondamental G est fondamental s'il fait partie d'une base au moins de ce groupe. Tout groupe fondamental possède aussi bien des éléments fondamentaux que des éléments qui ne le sont pas. En particulier l'élément neutre du groupe n'est pas fondamental. Tout groupe cyclique est fondamental. S'il est d'ordre infini et se compose de toutes les puissances entières d'un élément a , il n'a que deux éléments fondamentaux a et a^{-1} . S'il est d'ordre fini n et se compose des éléments $a^1, a^2, \dots, a^n = 1$, quel que soit l'entier m ($1 \leq m < n$) premier avec n , l'élément a^m est fondamental. Si le groupe G est libre, tout élément libre de G est fondamental et, si G est quasi libre, tout élément quasi libre de G est fondamental et il n'y en a pas d'autres. Quel que soit l'entier $n > 1$, tout élément $\neq 1$ du groupe symétrique \mathfrak{S}_n et du groupe alterné \mathfrak{A}_n de degré n est fondamental, à la seule exception près des trois doubles transpositions du groupe \mathfrak{S}_4 qui ne font partie d'aucune base de ce groupe.

Soit G un groupe fondamental ou non et soit G^* un sous-groupe de G . Nous disons que G^* est un sous-groupe fondamental de G si G^* possède

des systèmes irréductibles d'éléments générateurs. Tout groupe G d'ordre >1 possède des sous-groupes fondamentaux parmi lesquels figurent les sous-groupes cycliques engendrés par ses divers éléments d'ordre >1 . Tout sous-groupe d'ordre >1 d'un groupe fondamental n'est pas forcément fondamental. Ainsi le groupe non fondamental \mathfrak{A} cité plus haut est un sous-groupe du groupe quasi libre engendré par les deux transformations des nombres entiers $a = (\dots, -3, -1, 0, 1, 3, \dots)$ et $b = (\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots)$. L'union et l'intersection de deux sous-groupes fondamentaux d'un groupe G peuvent être dépourvus de base, de sorte que l'ensemble des sous-groupes fondamentaux d'un groupe G n'a en général pas une structure de treillis.

Nous disons qu'un groupe fondamental G est décomposé en produit quasi libre de ses sous-groupes fondamentaux G_λ , $\lambda \in A$, et nous écrivons $G = \prod_{\lambda \in A}^{**} G_\lambda$ si, quelle que soit la base A_λ du groupe G_λ , l'ensemble $A = \bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda$ constitue une base de G . Tout groupe fondamental est susceptible d'une telle décomposition. En particulier il est le produit quasi libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de l'une quelconque de ses bases. Les facteurs G_λ , $\lambda \in A$, sont appelés les facteurs quasi libres de G . Tout élément fondamental d'un facteur quasi libre G_λ est aussi un élément fondamental du groupe G . Aucun élément fondamental d'un facteur quasi libre G_λ ne peut faire partie du groupe engendré par tous les autres facteurs de la décomposition de G en produit quasi libre dont fait partie le facteur G_λ .

Soit G un groupe fondamental, soit $G = \prod_{\lambda \in A}^{**} G_\lambda$ sa décomposition en produit quasi libre de ses sous-groupes fondamentaux G_λ , soit γ_λ un sous-groupe fondamental quelconque de G_λ , quel que soit $\lambda \in A$, et soit γ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des éléments des groupes γ_λ . Ce groupe γ n'est pas nécessairement le produit quasi libre des groupes γ_λ . En effet, soit, par exemple, G le groupe abélien engendré par les trois substitutions $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (3, 4) (5, 6, 7)$, $a_3 = (8, 9) (10, 11, 12) (13, 14, 15, 16, 17)$. Ce groupe G , d'ordre 360, est le produit quasi libre des groupes cycliques g_1, g_2, g_3 engendrés par a_1, a_2 et a_3 . Soit $\gamma_1 = g_1$, soit γ_2 le sous-groupe cyclique de G_2 engendré par la substitution $(5, 6, 7) = a_2^2$ et soit γ_3 le sous-groupe cyclique de G_3 engendré par la substitution $(13, 14, 15, 16, 17) = a_3^2$. Désignons par γ le sous-groupe de G , produit de γ_1, γ_2 et γ_3 . Le groupe γ est cyclique, donc à base d'ordre 1, et par suite il n'est pas le produit quasi libre de γ_1, γ_2 et γ_3 .

Si g est un sous-groupe fondamental de G , il n'est pas toujours possible de décomposer G en produit quasi libre dont g soit l'un des facteurs. Un élément fondamental a de G qui fait partie d'un sous-groupe fondamental g de G n'est pas nécessairement un élément fondamental de g . Quelle que soit la base A d'un groupe fondamental G et quel que soit le sous-ensemble A^* de A , le sous-groupe G^* de G engendré par A^* est fondamental et tout élément fondamental de G^* est aussi un élément fondamental de G .

2. C. TANNER (London). — *La symétrie locale des ensembles et fonctions arbitraires.*¹

3. H. P. KÜNZI (Zürich). — *Betrachtungen zur nichtlinearen Programmierung.* — Kein Referat erhalten.

4. D. KOLLER. — *Prüfung der Normalität einer Verteilung.*

5. K. VOSS (Zürich). — *Flächen mit vorgegebenen Hauptkrümmungen.*

6. J. HERSCH (Genève). — *Une interprétation du principe de Rayleigh-Poincaré et d'une méthode Weinstein-Aronszajn-Bazley à l'aide d'hyperquadratiques associées.*¹

7. H. R. SCHWARZ (Zürich). — *ALGOL, die internationale Formelsprache.*¹

8. B. SCARPELLINI. — *Probleme der Axiomatisierbarkeit in der unendlichwertigen Logik.*

9. S. PICCARD (Neuchâtel). — *Un problème de la théorie des ensembles. La décomposition d'un ensemble analytique (de Suslin) et d'un complémentaire analytique en constituantes à partir d'un crible et à partir d'un système déterminant d'ensembles mesurables B .*

Soit E un ensemble de Suslin, appelé analytique par Lebesgue et Lusin. E est, comme on sait, l'ensemble des valeurs d'une fonction multivalente réelle d'une variable réelle $f(t)$ définie dans le domaine fondamental D ($0 < t < 1$), discontinue en une infinité dénombrable de points de ce domaine. On sait qu'il existe, d'une part, un ensemble plan C , tel que si le plan est référé à un système d'axes rectangulaires Oxy et si Ox est le support de E , quel que soit le point $(x, 0)$ de E , la perpendiculaire en ce point à Ox coupe C en un ensemble infini de points R_x , ensemble qui n'est pas bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses différents points. Le complémentaire \mathcal{E} de E par rapport à la droite Ox , appelé complémentaire analytique, est l'ensemble des points de Ox , tels que l'ensemble correspondant R_x est bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points. Un tel ensemble C est appelé un crible et on dit que E est criblé par C . N. Lusin a montré que tout ensemble linéaire criblé par un ensemble plan mesurable B est analytique et que tout ensemble analytique linéaire E peut être criblé au moyen d'un crible C formé de la réunion d'une infinité dénombrable de segments du plan des xy , parallèles à l'axe des x —support de l'ensemble analytique linéaire considéré.

¹ Paraîtront dans l'«Enseignement Mathématique».

Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$, on appelle constituante \mathcal{E}_α de \mathcal{E} l'ensemble des points $(x, 0)$ de \mathcal{E} tels que l'ensemble correspondant R_x , bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses éléments, est du type α . On appelle constituante E_α de E l'ensemble des points $(x, 0)$ de E , tels que l'ensemble correspondant R_x est la réunion de deux ensembles disjoints E_x^1 et E_x^2 jouissant des propriétés suivantes. E_x^1 est bien ordonné d'après la grandeur des ordonnées de ses points et du type α ; l'ensemble E_x^2 qui est toujours infini, n'est pas bien ordonné suivant le même critère et ne possède pas d'élément dont l'ordonnée soit inférieure à celle de tout autre point de R_x^2 , alors que l'ordonnée de tout point de R_x^2 est supérieure à celle de tout point de R_x^1 . Chacun des ensembles E et \mathcal{E} est entièrement décomposé en ses constituantes qui sont des ensembles mesurables B sans points communs deux à deux. Cette décomposition est unique, à partir d'un crible C donné. Mais il existe, pour tout ensemble analytique non mesurable B une infinité indénombrable d'ensembles plans qui le criblent et qui le décomposent, ainsi que son complémentaire, d'une infinité indénombrable de façons différentes en constituantes.

D'autre part, il existe, comme on sait, pour tout ensemble analytique E , une famille dénombrable d'ensembles mesurables B formant ce qu'on appelle un système déterminant D de E et dont on peut déduire E par les opérations d'intersection et de réunion comme suit. Le système déterminant D est formé d'ensembles $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ où $n_1 n_2 \dots n_k$ est un système fini quelconque de nombres naturels, quel que soit $k=1, 2, \dots$. Quelle que soit la suite infinie de nombres naturels n_1, n_2, \dots posons $L_{n_1, n_2, \dots} = E_{n_1} \cap E_{n_1 n_2} \cap \dots$. On a $E = \bigcup_{n_1, n_2, \dots} L_{n_1, n_2, \dots}$, la réunion

s'étendant à toutes les suites infinies possibles de nombres naturels. Les ensembles $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ peuvent même être des segments vérifiant la condition $E_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}} \subset E_{n_1 n_2 \dots n_k}$, quels que soient les nombres naturels $k, n_1, n_2, \dots, n_{k+1}$. On dit que E est le noyau de D . On peut décomposer E et son complémentaire \mathcal{E} en constituantes mesurables B disjointes deux à deux comme suit. Posons $E_{n_1 n_2 \dots n_k}^0 = E_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Soit maintenant α un nombre ordinal > 0 et $< \Omega$ et supposons que nous ayons déjà défini $E_{n_1 n_2 \dots n_k}^\xi$ pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha$. Si α est de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$, posons $E_{n_1 n_2 \dots n_k}^\alpha = E_{n_1 n_2 \dots n_k}^{\alpha^*} \cap \bigcup_{n_{k+1}=1}^\infty E_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}^{\alpha^*}$.

Si α est de seconde espèce, posons $E_{n_1 n_2 \dots n_k}^\alpha = \bigcap_{\xi < \alpha} E_{n_1 n_2 \dots n_k}^\xi$ et soit, pour tout nombre ordinal α , $S^\alpha = \bigcup_{n_1=1}^\infty E_{n_1}^\alpha$ et $T^\alpha = \bigcup_{n_1, n_2, \dots, n_k} (E_{n_1, n_2, \dots, n_k}^\alpha - E_{n_1 n_2 \dots n_k}^{\alpha+1})$.

M. Sierpinski a démontré ⁽¹⁾ que $E = \bigcup_{\alpha < \Omega} (S^\alpha - T^\alpha)$. D'autre part, nous avons prouvé que, quels que soient les ensembles E_{n_1, n_2, \dots, n_k} qui forment le système déterminant D , on a les inclusions $S^\alpha - T^\alpha \subset S^\beta - T^\beta$ quels que soient les nombres ordinaux α et β qui satisfont les inégalités $\alpha < \beta < \Omega$. Et comme les ensembles $S^\alpha - T^\alpha$ sont mesurables B si les éléments de D sont mesurables B , il s'ensuit que E est décomposé, à partir de D , en constituantes $E_\alpha = (S^\alpha - T^\alpha) - \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi$, disjointes deux à deux et dont E est la réunion, alors que \mathcal{E} est décomposé en constituantes à partir de D comme suit : $\mathcal{E}^0 = \mathcal{C}S^0$, $\mathcal{E}^\alpha = \bigcap_{\xi < \alpha} S^\xi - S^\alpha$, quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$.

Il existe, pour tout ensemble analytique E non mesurable B ainsi que pour son complémentaire, une infinité indénombrable de décompositions distinctes en constituantes mesurables B . Nous avons établi les deux résultats généraux suivants :

1. Tout ensemble analytique linéaire E ainsi que son complémentaire \mathcal{E} peuvent être décomposés en constituantes mesurables B à partir d'un crible plan de façon que toutes les constituantes dont l'indice est un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ de seconde espèce soient vides. Il suffit, à cet effet, de cribler E au moyen d'un crible plan fermé, ce qui est toujours possible comme l'a démontré M. Sierpinski²;

2. Quel que soit le crible plan C formé d'un ensemble dénombrable de segments rectilignes parallèle à l'axe Ox - support d'un ensemble analytique linéaire E et de son complémentaire \mathcal{E} , on peut définir un système déterminant D dont le noyau est E et qui conduit à la même décomposition en constituantes de E et de \mathcal{E} que le crible C .

¹ W. Sierpinski: Sur une propriété des ensembles (A) , *Fundamenta Mathematicae* t. VIII, 1926, p. 362-369.

² W. Sierpinski: Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés, *Fundamenta Mathematicae* t. XVII, 1931, p. 77-91.