Sektion für Mathematik

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **142 (1962)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, den 8. September 1962

Präsident: Prof. Dr. B. ECKMANN (Zürich)
Sekretär: Prof. D^r J. DE SIEBENTHAL (Lausanne)

1. S. PICCARD (Neuchâtel). – *Sur les ensembles de Souslin.*

Supposons le plan euclidien référé à un système d'axes rectangulaires Oxy. Soit a_n, $n = 1, 2, \ldots$, une suite dénombrable de nombres réels, soit d_n la droite d'équation $y = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, soit M_n un ensemble linéaire mesurable B dont le support est la droite d_n et soit $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. L'ensemble C est aussi mesurable B. C est un crible plan, dans le sens de N. Lusin, d'un ensemble de Souslin E dont Ox est le support et qui est l'ensemble des points $(x, 0)$ de Ox, tels que la perpendiculaire en $(x, 0)$ à Ox coupe C en un ensemble de points P_x qui n'est pas bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points. Soit $\mathcal{E}$ le complémentaire de E par rapport à Ox et soient $\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{E}_\alpha$ et $E = \bigcup_{\alpha<\Omega} E_\alpha$ les décompositions en constituantes des ensembles $\mathcal{E}$ et E, faites à partir du crible C. On sait que toutes les constituantes de $\mathcal{E}$ et de E sont des ensembles mesurables B et qu'il y a une infinité indénombrable de constituantes non vides si E n'est pas mesurable B.

Pour étudier la décomposition de E et celle de $\mathcal{E}$ en constituantes, N. Lusin a introduit la notion de crible dérivé. Soit $M_n^0 = M_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $C^0 = C$. Soit à présent α un nombre ordinal quelconque > 0 et $< \Omega$ et supposons que nous ayons déjà défini les ensembles M_n^ξ – sous-ensembles mesurables B de M_n – et le crible C^ξ qui en est la réunion, quel que soit le nombre ordinal $\xi < \alpha$. Si le nombre ordinal α est de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$, désignons par $C_n^{\alpha^*}$ la partie du crible C^{α^*} formée de tous les points de cet ensemble d'ordonnée $< a_n$, soit $(C_n^{\alpha^*})_{d_n}$ la projection orthogonale de cet ensemble sur la droite d_n. Posons $M_n^\alpha = M_n^{\alpha^*} \cap (C_n^{\alpha^*})_{d_n}$, $R_n^\alpha = M_n^{\alpha^*} - (C_n^\alpha)_{d_n}$ et soit $C^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\alpha$. Et si α est de seconde espèce, posons $M_n = \bigcap_{\xi<\alpha} M_n^\xi$ et $C^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\alpha$. Par définition, C^α est le crible dérivé d'ordre α de C. C^α crible le même ensemble de Souslin E que C, mais il décompose de la façon suivante E et $\mathcal{E}$ en constituantes analytiques: $E = \bigcup_{\beta<\Omega} E_\beta^\alpha$, $\mathcal{E} = \bigcup_{\beta<\Omega} \mathcal{E}_\beta^\alpha$, où $E_0^\alpha = \bigcup_{0\leq\beta\leq\alpha} E_\beta$, $E_{\alpha+\gamma} = E_\gamma^\alpha$, $\mathcal{E}_0^\alpha = \bigcup_{0\leq\beta\leq\alpha} \mathcal{E}_\beta$, $\mathcal{E}_{\alpha+\gamma} = \mathcal{E}_\gamma^\alpha$ quel que soit le nombre ordinal $\gamma > 0$ et $< \Omega$. A tout nombre ordinal α de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$ correspond une suite dénombrable d'ensembles R_n^α, $n = 1, 2, \ldots$, tels que $C^\alpha - C^{\alpha^*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n^\alpha$.

Et, si α est de seconde espèce, on a $C^\alpha - C = \bigcup_{\xi<\alpha} \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n^\xi$. Quels que soient les nombres ordinaux α et β $(0 < \alpha < \beta < \Omega)$, on a $C^\alpha \supset C^\beta$, $C^\beta = C^\alpha \cap C^\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n^\alpha \cap M_n^\beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\beta$ puisque $M_n^\beta \subset M_n^\alpha$ quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, ce qui est conforme à la définition du crible C^β. Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$, le crible dérivé C^α se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles linéaires mesurables B de supports parallèles à Ox.

Il existe, comme on sait, des ensembles de Souslin non mesurables B qui admettent, de même que leurs complémentaires, des décompositions en constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$ dont aucune n'est vide, quel que soit l'indice $\alpha < \Omega$. Le crible plan au moyen duquel se fait cette décomposition est appelé universel, car, quel que soit l'ensemble linéaire dénombrable D, il existe au moins une parallèle à Oy qui coupe un tel crible en un ensemble de points semblable à D. On sait que si un ensemble de Souslin E n'est pas mesurable B, son complémentaire $\mathcal{E}$ n'est pas un ensemble de Souslin.

Soit E un ensemble linéaire de Souslin non mesurable B, soit $\mathcal{E}$ son complémentaire et soit C un crible plan qui décompose E et $\mathcal{E}$ en constituantes: $E = \bigcup_{\alpha<\Omega} E_\alpha$, $\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{E}_\alpha$.

Supposons qu'aucune des constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$ n'est vide, quel que soit $\alpha < \Omega$.

La proposition suivante a lieu: Quels que soient les nombres ordinaux α et β, tels que $0 < \alpha < \beta < \Omega$, il existe un crible plan C^* qui crible l'ensemble E et qui décompose E et $\mathcal{E}$ en constituantes de la façon suivante: $E = \bigcup_{\lambda<\Omega} E_\lambda^*$, $\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda<\Omega} \mathcal{E}_\lambda^*$, où $E_\lambda^* = E_\lambda$ et $\mathcal{E}_\lambda^* = \mathcal{E}_\lambda$ quel que soit $\lambda < \alpha$, $E_\alpha^* = E_\alpha \cup E_{\alpha+1} \cup \ldots \cup E_\beta$, $\mathcal{E}_\alpha^* = \mathcal{E}_\alpha \cup \mathcal{E}_{\alpha+1} \cup \ldots \cup \mathcal{E}_\beta$, $E_{\alpha+\lambda}^* = E_{\beta+\lambda}$, $\mathcal{E}_{\alpha+\lambda}^* = E_{\beta+\lambda}$ quel que soit $\lambda > 0$ et $< \Omega$.

L'opération de dérivation d'un crible a pour effet de réunir en une seule certaines constituantes de E ainsi que de son complémentaire et de changer les indices des constituantes de façon qu'à tout indice $\alpha < \Omega$ corresponde toujours une constituante non vide.

On peut se poser divers problèmes au sujet de la décomposition en constituantes d'un ensemble de Souslin et de son complémentaire.

Problème 1. Existe-t-il pour tout ensemble de Souslin non mesurable B un crible qui le décompose en constituantes de telle façon que quel que soit l'indice $\alpha < \Omega$, la constituante d'indice α aussi bien de E que de son complémentaire soit non vide ?

Problème 2. Si pour une indice donné $\alpha < \Omega$, la constituante d'indice α de E est non vide, peut-il existe un autre crible qui décompose E en constituantes de façon que la constituante d'indice α soit vide ?

2. S. Piccard (Neuchâtel). – *Un problème de la théorie des groupes*[1].

[1] Paraîtra dans l'«Enseignement Mathématique».

3. HCH. MATZINGER (Zürich). – *Zum Begriff der uniformen Struktur*. Ausführliche Arbeit in Vorbereitung, Diss. ETH.

4. H. BIERI (Bern). – *Ein Extremalproblem und seine Lösung mit allereinfachsten Mitteln.*

5. J. SUTTER (Aarau). – *Konstruktion hyperbolischer Riemannscher Flächen durch Asymmetrie.* – Ausführliche Arbeit in Vorbereitung, Diss. ETH.

6. B. ZWAHLEN (Zürich). – *Über die Eigenwerte einer Summe von Hermetischen Operatoren.* – Ausführliche Arbeit in Vorbereitung, Diss. ETH.

7. B. SCARPELLINI (Genf). – *Unentscheidbare Probleme in der Analysis.* – Ausführliche Arbeit in Vorbereitung.