Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 142 (1962)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, den 8. September 1962

Präsident: Prof. Dr. B. ECKMANN (Zürich)
Sekretär: Prof. Dr J. DE SIEBENTHAL (Lausanne)

1. S. PICCARD (Neuchâtel). – *Sur les ensembles de Souslin.*

Supposons le plan euclidien référé à un système d'axes rectangulaires Oxy. Soit a_n, $n = 1, 2, \ldots$, une suite dénombrable de nombres réels, soit d_n la droite d'équation $y = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, soit M_n un ensemble linéaire mesurable B dont le support est la droite d_n et soit $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. L'ensemble C est aussi mesurable B. C est un crible plan, dans le sens de N. Lusin, d'un ensemble de Souslin E dont Ox est le support et qui est l'ensemble des points $(x, 0)$ de Ox, tels que la perpendiculaire en $(x, 0)$ à Ox coupe C en un ensemble de points P_x qui n'est pas bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points. Soit $\mathcal{E}$ le complémentaire de E par rapport à Ox et soient $\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{E}_\alpha$ et $E = \bigcup_{\alpha<\Omega} E_\alpha$ les décompositions en constituantes des ensembles $\mathcal{E}$ et E, faites à partir du crible C. On sait que toutes les constituantes de $\mathcal{E}$ et de E sont des ensembles mesurables B et qu'il y a une infinité indénombrable de constituantes non vides si E n'est pas mesurable B.

Pour étudier la décomposition de E et celle de $\mathcal{E}$ en constituantes, N. Lusin a introduit la notion de crible dérivé. Soit $M_n^0 = M_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $C^0 = C$. Soit à présent α un nombre ordinal quelconque > 0 et $< \Omega$ et supposons que nous ayons déjà défini les ensembles M_n^ξ – sous-ensembles mesurables B de M_n – et le crible C^ξ qui en est la réunion, quel que soit le nombre ordinal $\xi < \alpha$. Si le nombre ordinal α est de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$, désignons par $C_n^{\alpha^*}$ la partie du crible C^{α^*} formée de tous les points de cet ensemble d'ordonnée $< a_n$, soit $(C_n^{\alpha^*})_{d_n}$ la projection orthogonale de cet ensemble sur la droite d_n. Posons $M_n^\alpha = M_n^{\alpha^*} \cap (C_n^{\alpha^*})_{d_n}$, $R_n^\alpha = M_n^{\alpha^*} - (C_n^\alpha)_{d_n}$ et soit $C^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\alpha$. Et si α est de seconde espèce, posons $M_n = \bigcap_{\xi<\alpha} M_n^\xi$ et $C^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\alpha$. Par définition, C^α est le crible dérivé d'ordre α de C. C^α crible le même ensemble de Souslin E que C, mais il décompose de la façon suivante E et $\mathcal{E}$ en constituantes analytiques: $E = \bigcup_{\beta<\Omega} E_\beta^\alpha$, $\mathcal{E} = \bigcup_{\beta<\Omega} \mathcal{E}_\beta^\alpha$, où $E_0^\alpha = \bigcup_{0\leq\beta\leq\alpha} E_\beta$, $E_{\alpha+\gamma} = E_\gamma^\alpha$, $\mathcal{E}_0^\alpha = \bigcup_{0\leq\beta\leq\alpha} \mathcal{E}_\beta$, $\mathcal{E}_{\alpha+\gamma} = \mathcal{E}_\gamma^\alpha$ quel que soit le nombre ordinal $\gamma > 0$ et $< \Omega$. A tout nombre ordinal α de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$ correspond une suite dénombrable d'ensembles R_n^α, $n = 1, 2, \ldots$, tels que $C^\alpha - C^{\alpha^*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n^\alpha$.

Et, si α est de seconde espèce, on a $C^\alpha - C = \bigcup_{\xi<\alpha} \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n^\xi$. Quels que soient les nombres ordinaux α et β $(0 < \alpha < \beta < \Omega)$, on a $C^\alpha \supset C^\beta$, $C^\beta = C^\alpha \cap C^\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n^\alpha \cap M_n^\beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\beta$ puisque $M_n^\beta \subset M_n^\alpha$ quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, ce qui est conforme à la définition du crible C^β. Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$, le crible dérivé C^α se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles linéaires mesurables B de supports parallèles à Ox.

Il existe, comme on sait, des ensembles de Souslin non mesurables B qui admettent, de même que leurs complémentaires, des décompositions en constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$ dont aucune n'est vide, quel que soit l'indice $\alpha < \Omega$. Le crible plan au moyen duquel se fait cette décomposition est appelé universel, car, quel que soit l'ensemble linéaire dénombrable D, il existe au moins une parallèle à Oy qui coupe un tel crible en un ensemble de points semblable à D. On sait que si un ensemble de Souslin E n'est pas mesurable B, son complémentaire $\mathcal{E}$ n'est pas un ensemble de Souslin.

Soit E un ensemble linéaire de Souslin non mesurable B, soit $\mathcal{E}$ son complémentaire et soit C un crible plan qui décompose E et $\mathcal{E}$ en constituantes: $E = \bigcup_{\alpha<\Omega} E_\alpha$, $\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{E}_\alpha$.

Supposons qu'aucune des constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$ n'est vide, quel que soit $\alpha < \Omega$.

La proposition suivante a lieu: Quels que soient les nombres ordinaux α et β, tels que $0 < \alpha < \beta < \Omega$, il existe un crible plan C^* qui crible l'ensemble E et qui décompose E et $\mathcal{E}$ en constituantes de la façon suivante: $E = \bigcup_{\lambda<\Omega} E_\lambda^*$, $\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda<\Omega} \mathcal{E}_\lambda^*$, où $E_\lambda^* = E_\lambda$ et $\mathcal{E}_\lambda^* = \mathcal{E}_\lambda$ quel que soit $\lambda < \alpha$, $E_\alpha^* = E_\alpha \cup E_{\alpha+1} \cup \ldots \cup E_\beta$, $\mathcal{E}_\alpha^* = \mathcal{E}_\alpha \cup \mathcal{E}_{\alpha+1} \cup \ldots \cup \mathcal{E}_\beta$, $E_{\alpha+\lambda}^* = E_{\beta+\lambda}$, $\mathcal{E}_{\alpha+\lambda}^* = E_{\beta+\lambda}$ quel que soit $\lambda > 0$ et $< \Omega$.

L'opération de dérivation d'un crible a pour effet de réunir en une seule certaines constituantes de E ainsi que de son complémentaire et de changer les indices des constituantes de façon qu'à tout indice $\alpha < \Omega$ corresponde toujours une constituante non vide.

On peut se poser divers problèmes au sujet de la décomposition en constituantes d'un ensemble de Souslin et de son complémentaire.

Problème 1. Existe-t-il pour tout ensemble de Souslin non mesurable B un crible qui le décompose en constituantes de telle façon que quel que soit l'indice $\alpha < \Omega$, la constituante d'indice α aussi bien de E que de son complémentaire soit non vide ?

Problème 2. Si pour une indice donné $\alpha < \Omega$, la constituante d'indice α de E est non vide, peut-il exister un autre crible qui décompose E en constituantes de façon que la constituante d'indice α soit vide ?

2. S. Piccard (Neuchâtel). – *Un problème de la théorie des groupes*[1].

[1] Paraîtra dans l'«Enseignement Mathématique».

3. Hch. Matzinger (Zürich). – *Zum Begriff der uniformen Struktur.* Ausführliche Arbeit in Vorbereitung, Diss. ETH.

4. H. Bieri (Bern). – *Ein Extremalproblem und seine Lösung mit allereinfachsten Mitteln.*

5. J. Sutter (Aarau). – *Konstruktion hyperbolischer Riemannscher Flächen durch Asymmetrie.* – Ausführliche Arbeit in Vorbereitung, Diss. ETH.

6. B. Zwahlen (Zürich). – *Über die Eigenwerte einer Summe von Hermetischen Operatoren.* – Ausführliche Arbeit in Vorbereitung, Diss. ETH.

7. B. Scarpellini (Genf). – *Unentscheidbare Probleme in der Analysis.* – Ausführliche Arbeit in Vorbereitung.