Un modèle mathématique de la logique peut-il se fonder sur l'intension?

D. Fachvorträge / Conférences spécialisées

1. Logik / Logique

M. Sanchez-Mazas (Genève): Un modèle mathématique de la logique peut-il se fonder sur l'intension?

Le but de cette communication est d'étudier le problème de la construction de modèles mathématiques – et, plus spécifiquement, arithmétiques – de certaines théories ou systèmes logiques, d'abord au niveau des classes et de la syllogistique, ensuite au niveau propositionnel, lorsque, dans une stricte optique leibnizienne, on donne priorité à l'aspect intensionnel, plutôt qu'à l'extensionnel.

Il serait, à mon avis, utile, dans ce cadre, de discuter de la viabilité et de l'éventuel intérêt théorique et pratique d'un type très simple de modèle arithmétique qui pourrait être utilisé non seulement dans le domaine logique pur, mais également dans l'application de la logique à l'analyse des classifications et des théories scientifiques ou même des systèmes normatifs, conçus comme des classifications déontiques (1), ainsi qu'au traitement informatique des unes et des autres. Les réflexions suivantes sont fondées sur les premiers résultats d'une recherche personnelle dans ce sens, malheureusement trop isolée et qui se veut bien modeste.

Cette recherche a été stimulée et orientée par la curiosité ressentie depuis toujours (2) de savoir si, en suivant de façon conséquente la voie marquée par Leibniz dans ses calculs logiques de base intensionnelle (3), mais en y introduisant quelques corrections importantes et en utilisant le formalisme et le symbolisme de la logique mathématique d'aujourd'hui, il n'était pas possible d'arriver à obtenir un modèle arithmétique simple, cohérent et approprié d'un système logique tout entier, comme le calcul des classes, la syllogistique ou le calcul propositionnel, ainsi qu'un système non tautologique de classes (classification), de propositions scientifiques (théorie extra-logique) ou de propositions normatives (système normatif) (4).

Les intuitions géniales de Leibniz sur les profondes analogies formelles entre la structure du nombre et celle du concept, et par là sur le pouvoir d'expression des nombres dans tous les domaines de notre raisonnement (5), ont été, pendant des siècles, une source inépuisable d'inspiration et une tentation permanente de l'esprit humain. Cet intérêt pour une pensée créatrice qui se trouve à l'origine même de toute la logique mathématique actuelle ne s'est pas éteint aujourd'hui, loin de là, et cela tout en ayant pleine conscience du caractère utopique et irréalisable de la *mathesis universalis* et du programme algorithmique leibnizien et tout en acceptant, comme un fait scientifique irréversible, l'existence des nouvelles frontières de la raison logico-mathématique révélées par les théorèmes de Gödel, Church, Kleene, Löwenheim-Skolem et d'autres, et magistralement décrites par le philosophe et logicien belge Jean Ladrière dans son livre "Les limitations internes des formalismes" (6), paru il y a vingt ans.

Il est bien connu, d'autre part, que le philosophe et mathématicien français Louis Couturat, qui fut, par ses recherches parmi les manuscrits de la Bibliothèque Royale de Hanovre (7), le véritable découvreur de la plus importante partie de l'œuvre logique de Leibniz, ainsi que le premier grand expositeur et critique de cet œuvre, avec Bertrand Russell (8), condamnait sans appel dans son livre "La logique de Leibniz", paru en 1901 (9), la préférence accordée par le philosophe allemand au point de vue de l'intension ou compréhension, qu'il tint pour responsable de l'échec du grand programme logico-mathématique leibnizien. Leibniz... – disait, en effet, Couturat – "a été constamment tiraillé entre deux tendances contraires: l'une, provenant de la tradition, qui le portait à considérer surtout les rapports de la compréhension; l'autre, plus conforme à son esprit mathématique, qui l'amenait parfois à préférer la considération de l'extension. Or – juge Couturat – celle-ci est la seule qui permette de soumettre la logique au traitement mathématique, parce que, comme on l'a déjà vu – et Couturat se fonde, pour cette dernière affirmation, sur une représentation incorrecte du syllogisme *Celarent,* selon la perspective intensionnelle (10) –, c'est la seule qui satisfasse aux conditions de l'intuition et de l'imagination" (11).

Et le philosophe français tire de son erreur une autre conclusion générale, également fausse (mais qui n'aura pas manqué d'influencer le développement ultérieur de la logique mathématique, où l'orientation extensionnelle s'est imposée de façon dominante), allant jusqu'à nier l'isomorphisme entre une structure fondée sur l'extension et la structure correspondante, fondée sur l'intension ou compréhension. Il affirme, en effet: "Les rapports de compréhension ne sont pas susceptibles de figuration géométrique comme les rapports d'extension... Et il ne suffit pas de renverser ou d'intervertir ceux-ci pour en tirer ceux-là. Leibniz s'était donc trompé en croyant que les uns étaient purement et simplement inverses des autres; nous verrons que cette erreur a entaché ses essais de Calcul logique et a contribué à les faire avorter" (12).

Or, il est clair que tout le monde ne pouvait pas être du même avis sur ce point. Ainsi, par exemple, en 1954, le grand logicien américain Nicholas Rescher, professeur à l'Université de Pittsburgh, écrivait dans un important article consacré aux calculs logiques de Leibniz et à la critique de ces calculs par Couturat: "L'on pourra difficilement surestimer la dette que tous les chercheurs contemporains intéressés par la logique de Leibniz ont envers Couturat. Cette gratitude doit, toutefois, être accompagnée de la constatation des graves carences de la conception logique du propre Couturat. En effet, le logicien français était persuadé que la perspective extensionnelle est la seule qui soit correcte en logique... Or, ce préjugé de Couturat a défiguré son exposition de Leibniz et l'a amené à lutter contre des moulins à vent. Couturat a vu, en effet, dans la logique de Leibniz, de nombreuses insuffisances dont l'origine était, à son avis, justement la perspective intensionnelle adoptée par le philosophe allemand" (13).

Il faut ajouter aussi, toutefois, que ces justes critiques de la position de Couturat affirmant que les rapports intensionnels sont par nature refractaires au traitement mathématique, n'ont pas été suivies jusqu'ici de résultats constructifs assez importants pour invalider définitivement dans la pratique les thèses du philosophe parisien. Et le logicien italien Giarretta se demandait très justement il y a cinq ans dans la revue *Pensiero:* "Pourquoi ont échoué de si nombreuses tentatives de réfuter les thèses de Couturat sur l'impossibilité d'un calcul logique intensionnel?" (14).

Or, je dois dire à ce sujet que c'est justement en adoptant la perspective intensionnelle et les suggestions de Leibniz contenues surtout dans ses essais d'avril 1679 (15), bien qu'en introduisant des modifications essentielles en ce qui concerne la traduction arithmétique de certaines opérations logiques comme la combinaison et l'alternative de caractères ainsi que la négation, que je suis arrivé à construire un type de modèle arithmétique qui me paraît utilisable dans différents domaines de la logique pure et appliquée, et dont l'emploi est simple et facile, même dans la perspective informatique (16).

La méthode d'arithmétisation des composants, des opérations et des relations logiques, dont je vais essayer de donner ici quelques exemples, pourrait être utilisée, à mon avis, dans deux domaines fort différents que nous pourrions appeler, respectivement, "le domaine tautologique" et "le domaine non tautologique". Dans le premier, elle peut constituer un instrument de simplification de la déduction ou de la vérification de la validité d'une formule logique; dans le deuxième, la méthode pourrait permettre la traduction arithmétique de certaines classifications d'une part, et de certains systèmes scientifiques ou même juridiques formalisés au niveau propositionnel d'autre part, simplifiant l'analyse logique et la recherche des conséquences logiques des uns et des autres, ainsi que leur traitement automatique ou informatique.

On sait que la construction d'un modèle pour un système formel constitue, en soi-même, une preuve suffisante de la consistance ou, si on veut, du caractère non contradictoire de ce système. A son tour, d'après le théorème bien connu de Löwenheim-Skolem-Gödel, tout système formel consistant admet un modèle ou une interprétation vraie dans le domaine des nombres naturels, ou, si on veut, à tout axiome du système mentionné on peut associer une proposition vraie concernant les nombres naturels, c'est-à-dire un théorème arithmétique (17).

D'autre part, dès que nous disposons d'un modèle arithmétique d'un calcul logique permettant d'associer à chaque formule de ce calcul une autre formule, dont la vérité ou la fausseté peut être vérifiée sans sortir de l'arithmétique, le problème de décider si une formule logique de n variables est valide ou non devient beaucoup plus simple et plus rapide que lorsque l'on utilise, selon la méthode habituelle dans le calcul propositionnel, les tables de vérité pour évaluer une telle formule, puisque dans ce dernier cas il faut procéder à 2^n substitutions de valeurs ou, si on veut, à 2^n tests ou essais différents.

Le type de modèle arithmétique de base intensionnelle que nous proposons peut être utilisé au moins à deux niveaux logiques différents, à savoir, le niveau des classes et de la syllogistique et le niveau des propositions inanalysées. Considérons successivement ces deux niveaux.

Au niveau des classes, rappelons tout d'abord les notions de base – respectivement composants, opérations ou fonctions et relations – qui, dans la perspective intensionnelle, correspondent aux notions homologues de la perspective extensionnelle (Tab. 1):

Tab. 1 Interprétation extensionnelle et intensionnelle d'un calcul des classes.

Notions	Perspective extensionnelle	Perspective intensionnelle
Classes a, b, c, ...	Ensemble des éléments possédant un certain caractère ou propriété (Exemple: les hommes)	Propriété ou caractère possédé par un certain ensemble d'éléments (Exemple: homme)
$a \cap b$	Intersection des ensembles a et b (Exemple: les animaux raisonnables)	Combinaison des caractères a et b (Exemple: animal raisonnable)
$a \cup b$	Réunion des ensembles a et b (Exemple: les animaux et les végétaux)	Alternative des caractères a et b (Exemple: animal ou végétal)
V	Classe totale (inclut toutes les classes)	Caractère universel (est contenu dans tous les caractères)
Λ	Classe vide (est incluse dans toutes les classes, mêmes disjointes)	Caractère irréel (ou faux) (contient tous les caractères, même opposés)
$\bar{a}$	Classe complémentaire de a telle que: $\begin{cases} a \cup \bar{a} = V \text{ (totale)} \\ a \cap \bar{a} = \Lambda \text{ (vide)} \end{cases}$ (Exemple: l'ensemble des non hommes)	Caractère opposé à a tel que: $\begin{cases} a \cup \bar{a} = V \text{ (universel)} \\ a \cap \bar{a} = \Lambda \text{ (irréel)} \end{cases}$ (Exemple: le caractère non homme)
$a \subseteq b$	a est incluse dans b	a contient b
$a = b$	a est égal à b (a inclut b et b inclut a)	a est égal à b (a contient b et b contient a)

A la considération extensionnelle de la classe, où l'accent est mis sur l'ensemble des éléments qui lui appartiennent et qui peuvent être désignés de n'importe quelle manière, même simplement ostensive, comme dans le cas de la classe formée par ce stylo et ces lunettes, correspond une considération intensionnelle, où la classe est identifiée essentiellement au caractère qui la définit, par exemple "triangle rectangle", sans qu'aucune référence directe et explicite aux objets ou individus auxquels ce caractère s'applique ou pourrait s'appliquer ne soit nécessaire.

Aux opérations extensionnelles d'intersection, de réunion et de complémentarité de classes, correspondent, respectivement, dans la perspective intensionnelle, les opérations de combinaison, alternative et opposition de caractères; à la constante logique extensionnelle dénommée "classe totale", et qui contient toutes les classes, correspond la constante intensionnelle que nous appelons "caractère universel", et qui est contenu dans tous les caractères; à l'autre constante logique extensionnelle, dénommée "classe vide", et contenue dans toutes les classes, correspond la constante intensionnelle que nous appelons "caractère irréel" – il correspond au "terminus falsus" (terme faux) ou "non-ens" (non-être) de Leibniz (18) – et qui contient tous les caractères, mêmes opposés, comme "rectangle" et "non-rectangle"; finalement, à la relation *la classe a est incluse (extensionnellement) dans la classe b,* par exemple "la classe des hommes est incluse dans la classe des mammifères", correspond la relation *le caractère a contient (intensionnellement) le caractère b,* par exemple "le caractère homme contient le caractère mammifère".

Nous construisons, sur cette base intensionnelle, un modèle arithmétique (19) du système logique L, constitué par la logique des classes et la syllogistique, en établissant entre ce système logique L et une structure mathématique M une correspondance biunivoque C, en vertu de laquelle:

1) aux constantes et variables de caractère de L (lettres minuscules) on associe dans M respectivement des nombres entiers – qui seront premiers ou composés selon que les caractères auxquels ils sont associés sont simples ou complexes – et des variables prenant leurs valeurs dans l'ensemble des nombres entiers (lettres majuscules correspondantes); plus spécialement, on associera:

a) au caractère universel de L, qui est contenu dans tous les caractères de L, le nombre 1 (unité ou nombre vide), qui est diviseur de tous les nombres de M et, plus précisément, leur plus grand commun diviseur;
b) au caractère irréel de L, qui contient tous les caractères de L, le nombre plein $\emptyset$ de M, qui est multiple de tous les nombres de M et, plus précisément, leur plus petit commun multiple.

2) aux opérations ou fonctions logiques de L, dont les arguments sont des caractères, on associe dans M des opérations ou fonctions arithmétiques, dont les arguments sont des nombres entiers; plus spécialement, on associera:

a) à la combinaison de deux caractères a, b, le plus petit commun multiple de leurs nombres caractéristiques respectifs A, B (au lieu de leur produit, comme proposait Leibniz);
b) à l'alternative de deux caractères a, b, le plus grand commun diviseur de leurs nombres caractéristiques respectifs A, B;
c) au caractère $\bar{a}$ (non-a), opposé à un caractère a, le nombre $\bar{A}$ (non-A), qui est le quotient $\emptyset/A$ de la division du nombre plein $\emptyset$ par le nombre A.

3) aux propositions de L, exprimant des relations logiques entre des caractères et/ou des fonctions de caractère, on associe dans M des équations ou inéquations exprimant des relations arithmétiques entre des nombres et/ou des fonctions arithmétiques; plus spécialement, on associera:

a) à la relation *le caractère a contient le caractère b,* la relation *le nombre A est multiple du nombre B* ou, si on veut, *B divise A,* exprimée par une des deux équations suivantes:

   [A, B] ¿ A (plus petit commun multiple de A et B égal à A)
   (A, B) = B (plus grand commun diviseur de A et B égal à B);

b) à la relation *le caractère a est égal au caractère b,* la relation *le nombre A est égal au nombre B,* exprimée par l'équation A = B.

La correspondance entre le système logique intensionnel L et son modèle arithmétique M peut être schématisée de la façon suivante: voir tab. 2.

Dans ces conditions, la structure M est un modèle arithmétique:

Tab. 2 Correspondance entre le système logique L et son modèle arithmétique M.

Système logique intensionnel L	Structure arithmétique M qui sert de modèle au système logique intensionnel
Caractères simples:	Nombres premiers:
$a_1, a_2, \ldots, a_n$	$A_1, A_2, \ldots, A_n$
Caractères quelconques:	Nombres entiers:
$a, b, c, \ldots$	$A, B, C, \ldots$
Combinaison de a et b:	Plus petit commun multiple de A et B:
$a \cap b$	$[A, B]$
Alternative de a et b:	Plus grand commun diviseur de A et B:
$a \cup b$	(A, B)
Caractère universel: V	Nombre vide (unité): 1
V est contenu dans tous les caractères de L, en étant contenu dans tous les caractères simples de L	1 est facteur de tous les nombres de M, en étant facteur de tous les nombres premiers de M
$V = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$	$1 = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$
Caractère irréel: Λ	Nombre plein: $\emptyset$
Λ contient tous les caractères de L, en contenant tous les caractères simples de L	$\emptyset$ est multiple de tous les nombres de M, en étant multiple de tous les nombres premiers de M
$\Lambda = a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_n$	$\emptyset = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$
Caractère opposé à a: $\bar{a}$	Nombre opposé à A: $\bar{A}$. $\bar{A} =_{df} \emptyset / A$
$\left\{\begin{array}{l} a \cap \bar{a} = \Lambda \\ a \cup \bar{a} = V \\ \bar{\bar{a}} = a \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{l} [A, \bar{A}] = \emptyset \\ (A, \bar{A}) = 1 \\ \bar{\bar{A}} = A \end{array}\right\}$
Le caractère a contient le caractère b:	Le nombre A est multiple du nombre B:
$\left\{\begin{array}{l} a \subseteq b \\ a \cap b = a \\ a \cup b = b \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{l} B \mid A \text{ (B divise A)} \\ [A, B] = A \\ (A, B) = B \end{array}\right\}$
Le caractère a est égal au caractère b:	Le nombre A est égal au nombre B:
$a = b$	$A = B$
$(a{=}b) =_{df} (a \subseteq b).(b \subseteq a)$ (20)	$(A{=}B) =_{df} (B \mid A).(A \mid B)$

a) de la logique des classes, dans la mesure ou à chaque théorème de cette logique reste associée dans M, en vertu de la correspondance C, une équation arithmétiquement vraie, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables, et réciproquement;
b) de la syllogistique, dans la mesure où à chaque antécédent syllogistique, constitué par une proposition unique (dans le cas des inférences immédiates) ou par un couple de prémisses (dans le cas des modes syllogistiques proprement dits) et admettant comme conséquence une nouvelle proposition, logiquement déductible de la (des deux) première(s) – ou de celle(s)-ci et d'une condition d'existence pour les inférences immédiates et les modes syllogistiques conditionnellement valides (21) –, reste associé dans M, en vertu de la

correspondance C, respectivement une équation ou un système d'équations et/ou inéquations, admettant, comme conséquence arithmétique, une nouvelle équation ou inéquation, associée par C à la conclusion ou conséquence logique de la (des) prémisse(s) précitée(s).

Une construction entièrement analogue est prévue pour fournir un modèle arithmétique de base intensionnelle (22) au calcul propositionnel.

Regardons maintenant les choses de plus près, à commencer par l'expression arithmétique des propositions, ou si on veut, les équations et inéquations associées à chaque type de proposition formulable dans la logique des classes.

Signalons, pour commencer, que les quatre espèces de propositions catégoriques d'Aristote, énoncées traditionnellement sous des formes comme les suivantes:
"tout triangle équilatéral est équiangle" (universelle affirmative);
"aucun homme n'est pierre" (universelle négative);
"quelque tueur est salarié" (particulière affirmative); et
"quelque politicien n'est pas menteur" (particulière négative)
sont formalisées dans la perspective intensionnelle respectivement de la façon suivante:
"le caractère *triangle équilatéral* contient le caractère *équiangle";*
"le caractère *homme* contient le caractère *non-pierre";*
"le caractère *tueur* ne contient pas le caractère *non-salarié";* et
"le caractère *politicien* ne contient pas le caractère *menteur".*

On peut comprendre déjà qu'à côté des propositions ayant comme image, dans le modèle arithmétique, des équations (ce sont les propositions universelles, exprimant que le caractère-prédicat ou son opposé est contenu dans le caractère-sujet), il y a aussi d'autres propositions ayant comme image, dans le modèle arithmétique, des inéquations. Ce sont les propositions particulières exprimant que le caractère-prédicat ou son opposé n'est pas contenu dans le caractère-sujet.

Dans le tableau 3 on constatera qu'à chaque proposition catégorique d'Aristote restent associées dans le modèle arithmétique 6 équations ou inéquations, de présentation différente, mais arithmétiquement équivalentes; réciproquement, la même équation ou inéquation peut rester associée à des propositions catégoriques de présentation différente, mais exprimant la même relation logique. En reprenant l'exemple de Church (23), qui se réfère à Aristote: la proposition affirmant que le caractère *homme* contient le caractère *animal* est logiquement équivalente à la proposition affirmant que le caractère *non-animal* contient le caractère *non-homme:* Asp $\leftrightarrow$ A$\overline{ps}$.

On constatera aussi que 3 des 6 équations ou inéquations associées à chaque espèce de proposition catégorique contiennent le plus grand commun diviseur des deux nombres caractéristiques associés respectivement au

Tab. 3 Equations et inéquations associées aux différentes propositions catégoriques

Proposition N°-Formule	*Valeur de* (S,P) *et de* [S,P]	*Valeur de* (S,$\bar{P}$) *et de* [S,$\bar{P}$]	*Valeur de* ($\bar{S}$,P) *et de* [$\bar{S}$,P]	*Valeur de* ($\bar{S}$,$\bar{P}$) *et de* [$\bar{S}$,$\bar{P}$]	*Proposition Formule-N°*
1. {Asp, A$\overline{ps}$}	(S,P)=P [S,P]=S	 [S,$\bar{P}$]=∅	($\bar{S}$,P)=1	($\bar{S}$,$\bar{P}$)=$\bar{S}$ [$\bar{S}$,$\bar{P}$]=$\bar{P}$	{Es$\bar{p}$, E$\bar{p}$s} 1.

2.	Esp		$(S,\bar{P})=\bar{P}$	$(\bar{S},P)=\bar{S}$	$(\bar{S},\bar{P})=1$	$As\bar{p}$	2.
	Eps	$[S,P]=\emptyset$	$[S,\bar{P}]=S$	$[\bar{S},P]=P$		$Ap\bar{s}$	
3.	Isp		$(S,\bar{P})<\bar{P}$	$(\bar{S},P)<\bar{S}$	$(\bar{S},\bar{P})>1$	$Os\bar{p}$	3.
	Ips	$[S,P]<\emptyset$	$[S,\bar{P}]>S$	$[\bar{S},P]>P$		$Op\bar{s}$	
4.	Osp	$(S,P)<P$		$(\bar{S},P)>1$	$(\bar{S},\bar{P})<\bar{S}$	$Is\bar{p}$	4.
	$O\bar{p}\bar{s}$	$[S,P]>S$	$[S,\bar{P}]<\emptyset$		$[\bar{S},\bar{P}]>\bar{P}$	$I\bar{p}s$	

Définition de chaque proposition catégorique:	*Perspective extensionnelle:*	***Perspective intensionnelle:***
$Asp =_{df} s \subseteq p$	Tout s est p	Le caractère s contient le caractère p
$Esp =_{df} s \subseteq \bar{p}$	Aucun s n'est p	Le caractère s contient le caractère $\bar{p}$ (non-p)
$Isp =_{df} \overline{(s \subseteq \bar{p})}$	Quelque s est p	Le caractère s ne contient pas le caractère $\bar{p}$ (non-p)
$Osp =_{df} \overline{(s \subseteq p)}$	Quelque s n'est pas p	Le caractère s ne contient pas le caractère p

sujet et au prédicat de la proposition, tandis que les 3 autres contiennent le plus petit commun multiple des deux nombres en question.

Passons maintenant à la syllogistique et commençons par les 36 lois de l'inférence immédiate. Toutes ces lois ont la forme d'une implication dont l'antécédant et le conséquent sont des propositions catégoriques d'Aristote. Parmi ces lois, 24 sont universellement valides et ne dépendent pas d'une condition d'existence, à savoir: les 8 lois de la contradiction, les 8 lois de l'obversion, les 4 lois de la conversion simple, et les 4 lois de la conversion par contraposition.

A l'antécédent et au conséquent de chacune des 24 formules exprimant ces 24 lois sont associées dans le modèle arithmétique respectivement une équation ou inéquation qui figure comme antécédent et une équation ou inéquation qui figure comme conséquent d'une implication arithmétique vraie, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables. En vertu du modèle, il est donc possible de démontrer la validité de ces 24 lois en s'appuyant sur les lois de l'arithmétique.

Les 12 autres lois de l'inférence immédiate, dont la validité dépend d'une condition d'existence, sont les suivantes: les 4 lois de la subalternation, les 2 lois de la contrariété, les 2 lois de la sous-contrariété, les 4 lois de la conversion partielle.

La condition d'existence, qui prend la forme d'une proposition particulière dont le sujet et le prédicat sont l'un et l'autre le terme dont l'existence est une condition de la validité de la loi, figure, à côté de l'antécédent, comme une deuxième prémisse. Arithmétiquement, la déduction prend la forme d'un système de deux équations ou/et inéquations qui admet, comme conséquence arithmétique, une troisième équation ou inéquation, associée dans le modèle arithmétique à la conclusion logique des deux prémisses. (Voir tab. 4).

Tab. 4 Démonstration arithmétique des 36 lois des inférences immédiates de la logique classique

A. Lois universellement valides (dont la validité ne dépend pas d'une condition d'existence)

Nº	Formule logique		Démonstration arithmétique	
	I. Lois de la contradiction			
1.	$Asp \rightarrow \overline{Osp}$	$Asp \leftrightarrow \overline{Osp}$	$(S,P) = P \rightarrow \overline{(S,P) < P}$	$(S,P) = P \leftrightarrow \overline{(S,P) < P}$
2.	$\overline{Osp} \rightarrow Asp$		$\overline{(S,P) < P} \rightarrow (S,P) = P$	
3.	$Esp \rightarrow \overline{Isp}$	$Esp \leftrightarrow \overline{Isp}$	$(S,\bar{P}) = \bar{P} \rightarrow \overline{(S,\bar{P}) < \bar{P}}$	$(S,\bar{P}) = \bar{P} \leftrightarrow \overline{(S,\bar{P}) < \bar{P}}$
4.	$\overline{Isp} \rightarrow Esp$		$\overline{(S,\bar{P}) < \bar{P}} \rightarrow (S,\bar{P}) = \bar{P}$	
5.	$Isp \rightarrow \overline{Esp}$	$Isp \leftrightarrow \overline{Esp}$	$(S,\bar{P}) < \bar{P} \rightarrow \overline{(S,\bar{P}) = \bar{P}}$	$(S,\bar{P}) < \bar{P} \leftrightarrow \overline{(S,\bar{P}) = \bar{P}}$
6.	$\overline{Esp} \rightarrow Isp$		$\overline{(S,\bar{P}) = \bar{P}} \rightarrow (S,\bar{P}) < \bar{P}$	
7.	$Osp \rightarrow \overline{Asp}$	$Osp \leftrightarrow \overline{Asp}$	$(S,P) < P \rightarrow \overline{(S,P) = P}$	$(S,P) < P \leftrightarrow \overline{(S,P) = P}$
8.	$\overline{Asp} \rightarrow Osp$		$\overline{(S,P) = P} \rightarrow (S,P) < P$	
	II. Lois de l'obversion			
9.	$Asp \rightarrow Es\bar{p}$	$Asp \leftrightarrow Es\bar{p}$	$(\bar{S},P) = 1 \rightarrow (\bar{S},\bar{\bar{P}}) = 1$	$(\bar{S},P) = 1 \leftrightarrow (\bar{S},\bar{\bar{P}}) = 1$
10.	$Es\bar{p} \rightarrow Asp$		$(\bar{S},\bar{\bar{P}}) = 1 \rightarrow (\bar{S},P) = 1$	
11.	$Esp \rightarrow As\bar{p}$	$Esp \leftrightarrow As\bar{p}$	$(\bar{S},P) = \bar{S} \rightarrow (\bar{S},\bar{\bar{P}}) = \bar{S}$	$(\bar{S},P) = \bar{S} \leftrightarrow (\bar{S},\bar{\bar{P}}) = \bar{S}$
12.	$As\bar{p} \rightarrow Esp$		$(\bar{S},\bar{\bar{P}}) = \bar{S} \rightarrow (\bar{S},P) = \bar{S}$	
13.	$Isp \rightarrow Os\bar{p}$	$Isp \leftrightarrow Os\bar{p}$	$(\bar{S},P) < \bar{S} \rightarrow (\bar{S},\bar{\bar{P}}) < \bar{S}$	$(\bar{S},P) < \bar{S} \leftrightarrow (\bar{S},\bar{\bar{P}}) < \bar{S}$
14.	$Os\bar{p} \rightarrow Isp$		$(\bar{S},\bar{\bar{P}}) < \bar{S} \rightarrow (\bar{S},P) < \bar{S}$	
15.	$Osp \rightarrow Is\bar{p}$	$Osp \leftrightarrow Is\bar{p}$	$(\bar{S},P) > 1 \rightarrow (\bar{S},\bar{\bar{P}}) > 1$	$(\bar{S},P) > 1 \leftrightarrow (\bar{S},\bar{\bar{P}}) > 1$
16.	$Is\bar{p} \rightarrow Osp$		$(\bar{S},\bar{\bar{P}}) > 1 \rightarrow (\bar{S},P) > 1$	
	III. Lois de la conversion simple			
17.	$Esp \rightarrow Eps$	$Esp \leftrightarrow Eps$	$(\bar{S},\bar{P}) = 1 \rightarrow (\bar{P},\bar{S}) = 1$	$(\bar{S},\bar{P}) = 1 \leftrightarrow (\bar{P},\bar{S}) = 1$
18.	$Eps \rightarrow Esp$		$(\bar{P},\bar{S}) = 1 \rightarrow (\bar{S},\bar{P}) = 1$	
19.	$Isp \rightarrow Ips$	$Isp \leftrightarrow Ips$	$(\bar{S},\bar{P}) > 1 \rightarrow (\bar{P},\bar{S}) > 1$	$(\bar{S},\bar{P}) > 1 \leftrightarrow (\bar{P},\bar{S}) > 1$
20.	$Ips \rightarrow Isp$		$(\bar{P},\bar{S}) > 1 \rightarrow (\bar{S},\bar{P}) > 1$	

N°	Formule logique		Démonstration arithmétique	
	IV. Loîs de la conversion par contraposition			
21.	$Asp \rightarrow A\overline{ps}$	$Asp \leftrightarrow A\overline{ps}$	$(S,P) = P \rightarrow (\bar{P},\bar{S}) = \bar{S}$	$(S,P) = P \leftrightarrow (\bar{P},\bar{S}) = \bar{S}$
22.	$A\overline{ps} \rightarrow Asp$		$(\bar{P},\bar{S}) = \bar{S} \rightarrow (S,P) = P$	
23.	$Osp \rightarrow O\overline{ps}$	$Osp \leftrightarrow O\overline{ps}$	$(S,P) < P \rightarrow (\bar{P},\bar{S}) < \bar{S}$	$(S,P) < P \leftrightarrow (\bar{P},\bar{S}) < \bar{S}$
24.	$O\overline{ps} \rightarrow Osp$		$(\bar{P},\bar{S}) < \bar{S} \rightarrow (S,P) < P$	

B. Lois conditionnellement valides (dont la validité dépend d'une condition d'existence)

N°	Formule logique	Démonstration arithmétique
	V. Lois de la subalternation	
25.	$Asp \cdot Iss \rightarrow Isp$	$(\bar{S},\bar{P}) = \bar{S} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow (\bar{S},\bar{P}) > 1$
26.	$Esp \cdot Iss \rightarrow Osp$	$(\bar{S},P) = \bar{S} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow (\bar{S},P) > 1$
27.	$\overline{Isp} \cdot Iss \rightarrow \overline{Asp}$	$\overline{(\bar{S},\bar{P}) > 1} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow \overline{(\bar{S},\bar{P}) = \bar{S}}$
28.	$\overline{Osp} \cdot Iss \rightarrow \overline{Esp}$	$\overline{(\bar{S},P > 1} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow \overline{(\bar{S},P) = \bar{\bar{S}}}$
	VI. Lois de la contrariété	
29.	$Asp \cdot Iss \rightarrow \overline{Esp}$	$(\bar{S},\bar{P}) = \bar{S} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow \overline{(\bar{S},\bar{P}) = 1}$
30.	$Esp \cdot Iss \rightarrow \overline{Asp}$	$(\bar{S},\bar{P}) = 1 \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow \overline{(\bar{S},\bar{P}) = \bar{S}}$
	VII. Lois de la sous-contrariété	
31.	$\overline{Osp} \cdot Iss \rightarrow Isp$	$\overline{(\bar{S},\bar{P}) < \bar{S}} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow (\bar{S},\bar{P}) > 1$
32.	$\overline{Isp} \cdot Iss \rightarrow Osp$	$\overline{(\bar{S},\bar{P}) > 1} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow (\bar{S},\bar{P}) < \bar{S}$
	VIII. Lois de la conversion partielle	
33.	$Asp \cdot Iss \rightarrow Ips$	$(\bar{S},\bar{P}) = \bar{S} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow (\bar{P},\bar{S}) > 1$
34.	$Esp \cdot Ipp \rightarrow Ops$	$(S,\bar{P}) = \bar{P} \cdot \bar{P} > 1 \rightarrow (\bar{P},S) > 1$
35.	$\overline{Ips} \cdot Iss \rightarrow \overline{Asp}$	$\overline{(\bar{P},\bar{S}) > 1} \cdot \bar{S} > 1 \rightarrow \overline{(\bar{S},\bar{P}) = \bar{S}}$
36.	$\overline{Ops} \cdot Iss \rightarrow \overline{Esp}$	$\overline{(\bar{P},S) > 1} \cdot \bar{P} > 1 \rightarrow \overline{(S,\bar{P}) = \bar{\bar{P}}}$

Passons maintenant à la démonstration arithmétique des différents modes syllogistiques. Dans notre premier exemple (Tab. 5), nous avons, à gauche, le schéma logique du mode syllogistique *CESARE,* de la deuxième figure, que nous pourrions lire de la façon suivante:

Aucun p n'est m
Tout s est m
donc Aucun s n'est p

A droite du tableau, en haut, nous avons les deux équations associées dans le modèle arithmétique aux deux prémisses du syllogisme. Ces deux équations forment un système qui admet comme conséquence, l'équation correspondante à la conclusion du syllogisme.

Dans la chaîne des égalités, sous la ligne horizontale, chaque passage d'un membre au membre suivant est effectué soit en vertu d'une des équations associées aux prémisses (premier, troisième et dernier passages), soit par l'application de la propriété associative de l'opération plus grand commun diviseur. L'égalité entre le premier membre de la chaîne – à savoir, plus grand commun diviseur du complément de S et de P – et le dernier – à savoir, le complément du nombre S – constitue l'équation associée à la conclusion du syllogisme.

Pour tous les modes syllogistiques, on opère d'une manière analogue, en appliquant, le cas échéant, en plus de la propriété associative du plus grand commun diviseur, d'autres propriétés arithmétiques simples.

Dans notre deuxième exemple (Tab. 6), nous montrons comment s'effectue la déduction arithmétique du mode syllogistique *FERISON,* de la troisième figure. Dans notre troisième exemple (Tab. 7), nous passons à la déduction arithmétique d'un syllogisme indirect, à savoir *BAMALIP,* de la quatrième figure, dont la validité dépend d'une condition d'existence, en l'occurrence Ipp, que nous pouvons lire "quelque p est p", c'est-à-dire, en

Tab. 5 Démonstration arithmétique d'un syllogisme direct de la deuxième figure: mode CESARE.

Prémisses et conclusion	Equations et/ou inéquations associées	
$\vdash$ Epm	$(P, \overline{M}) = \overline{M}$	Système d'équations associé au système de prémisses
$\vdash$ Asm	$(\overline{S}, \overline{M}) = \overline{S}$	
-----	----------	
$\vdash$ Esp	$(\overline{S}, P) \underset{2}{=} ((\overline{S}, \overline{M}), P) \underset{a}{=} (\overline{S}, (P, \overline{M})) \underset{1}{=} (\overline{S}, \overline{M}) \underset{2}{=} \overline{S}$	

Explication des symboles d'égalité:

$\underset{1}{=}$ signifie: égal d'après l'équation associée à la majeure (première prémisse);

$\underset{2}{=}$ signifie: égal d'après l'équation associée à la mineure (deuxième prémisse);

$\underset{a}{=}$ signifie: égal d'après les lois ou théorèmes arithmétiques du plus grand commun diviseur (propriété associative, commutative, etc.).

termes extensionnels, "il y a au moins un objet p" et, en termes intensionnels, "le caractère p n'est pas irréel".

Il est facile de constater que l'équation $(\bar{S}, P) = \bar{S}$, obtenue comme conséquence arithmétique nécessaire du système d'équations associée aux prémisses, est associée dans le modèle à la proposition Esp, conclusion légitime des prémisses, d'après le mode CESARE.

Tab. 6 Démonstration arithmétique d'un syllogisme direct de la troisième figure: mode FERISON

Prémisses et conclusion	Equations et/ou inéquations associées	
⊦ Emp	$(\bar{M}, P) = \bar{M}$	Système d'équations/ inéquations associé au système de prémisses
⊦ Ims	$(\bar{M}, \bar{S}) > 1$	
- - - - -	- - - - - - - - - -	
⊦ Osp	$(\bar{S}, P) \underset{a}{=} (\bar{S}, M, P)(\bar{S}, \bar{M}, P) \underset{a}{=}$ $\underset{a}{=} (\bar{S}, M, P)((\bar{M}, P), \bar{S}) \underset{1}{=}$ $\underset{1}{=} (\bar{S}, M, P)(\bar{M}, \bar{S}) \underset{2}{>} 1$	

Tab. 7 Démonstration arithmétique d'un syllogisme indirect de la quatrième figure: mode BAMALIP

Prémisses et conclusion	Equations et/ou inéquations associées	
⊦ Apm	$(\bar{P}, \bar{M}) = \bar{P}$	Système d'équations associé au système de prémisses
⊦ Ams	$(\bar{M}, \bar{S}) = \bar{M}$	
⊦ Ipp	$(\bar{P}, \bar{P}) = \bar{P} > 1$	Inéquation associée à la condition d'existence ou non irréalité de p (troisième prémisse)
- - - - -	- - - - - - - - - -	
⊦ Isp	$(\bar{S}, \bar{P}) \underset{1}{=} (\bar{S}, (\bar{P}, \bar{M})) \underset{a}{=} (\bar{P}, (\bar{M}, \bar{S})) \underset{1}{=}$ $\underset{1}{=} \bar{P} \underset{e}{>} 1$	

Explication du nouveau symbole d'inégalité introduit dans cet exemple:

$\underset{e}{>} 1$ signifie: plus grand que 1 d'après l'inéquation associée à la condition d'existence.

Cette arithmétisation de la syllogistique est, à notre connaissance, la première du genre, permettant, comme nous le résumons dans Tab. 8, la démonstration arithmétique des 15 modes directs et des 9 modes indirects, c'est-à-dire des 24 modes traditionnels qui sont tous traduits en systèmes d'équations et/ou inéquations. On peut ajouter que les modes non traditionnels, comme Garderönt, Helenï, Liberö et Noverï, du logicien allemand Albert Menne (24), etc., peuvent également être démontrés par voie arithmétique sans difficulté. Finalement, cette arithmétisation permet de résoudre le problème de la décidabilité de la syllogistique, c'est-à-dire le problème de décider, pour chaque forme syllogistique arbitrairement donnée, si elle est valide ou concluante, ou si elle ne l'est pas. Ce problème, qui préoccupa à tel point le grand logicien polonais, Jan Lukasiewicz, probablement le meilleur connaisseur de la syllogistique après Aristote, qu'il décida de lui consacrer le plus intéressant des chapitres de son ouvrage capital "La syllogistique d'Aristote dans la perspective de la logique formelle moderne" (25), reste réduit pour nous à un simple problème de vérification arithmétique. Ainsi par exemple, notre méthode permet de prouver que l'expression que Lukasiewicz signale dans le livre cité comme indécidable, que nous pourrions lire "si *quelque a est b,* alors, si *non tout a est b,* alors *tout b est a"* est fausse, comme Lukasiewicz affirme, mais en se déclarant incapable de prouver cette affirmation (26). (Voir tab. 8 et 9).

Dans les tableaux qui suivent, nous montrons qu'il est possible de construire pour le *calcul propositionnel* un modèle arithmétique entièrement analogue à celui que nous avons construit pour le calcul des classes et la syllogistique.

Pour ce faire, nous associerons aux variables propositionnelles des variables numériques (prenant leurs valeurs dans un ensemble de nombres entiers), aux constantes élémentaires des nombres premiers, à la proposition nécessairement vraie (tautologie) le nombre vide 1 (l'unité), à la proposition nécessairement fausse (contradiction) le nombre plein $\emptyset$, défini comme le plus petit commun multiple de tous les nombres du réseau ou, si on veut, comme le produit de tous les nombres premiers du réseau, à la conjonction p.q de p et q le plus petit commun multiple [P, Q] des nombres caractéristiques respectifs P et Q, à la disjonction pvq de p et q le plus grand commun diviseur (P, Q) de ces nombres. Finalement, aux relations logiques $p \rightarrow q$ (p implique q) et $p \leftrightarrow q$ (p est équivalente à q) seront associées dans le modèle, respectivement, la relation arithmétique $Q \mid P$ (Q divise P ou P est divisible par Q) et $P = Q$ (P est égal à Q) (Tab. 10).

Dans le Tab. 11, on montre les relations arithmétiques associées dans le modèle à toutes les relations logiques binaires dérivées des fondamentales.

Dans le Tab. 12, on applique le modèle à la démonstration arithmétique de quelques célèbres groupes d'axiomes pour le calcul propositionel, à savoir, ceux de Church (1951),Hilbert-Ackermann(1928) et Lukasiewicz (1924), ainsi que les postulats de Kleene.

Nous dirons pour terminer que, étant donné l'*isomorphisme,* déjà signalé, entre le type de modèle arithmétique que nous venons d'exposer et les modèles constitués par des réseaux binaires de nombres caractéristiques, tous les programmes informatiques que nous avons construits sur la base de ces derniers pour effectuer dans l'ordinateur la déduction automatique des conséquences logiques de n'importe quel système scientifique ou normatif formalisé d'après les perspectives indiquées – par exemple, les programmes *"CALCULUS RATIOCINATOR"* et *"CALCULUS CONSEQUENTIARUM",* qui vont être publiés très prochainement – pourront être utilisés dans ce contexte (27).

Tab. 8 Démonstration arithmétique des 24 modes classiques du syllogisme catégorique

A. Syllogismes universellement valides (dont la validité ne dépend pas d'une condition d'existence)

Figure, N° et nom du mode	Formule logique	Expression arithmétique des prémisses	Expression arithmétique de la conclusion
I. 1. Barbara	Amp.Asm → Asp	$(\bar{M},\bar{P})=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})=\bar{S}$	$\rightarrow (\bar{S},\bar{P})\underset{2}{=}((\bar{S},\bar{M}),\bar{P})\underset{a}{=}(\bar{S},(\bar{M},\bar{P}))\underset{1}{=}(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{=}\bar{S}$
I. 2. Celarent	Emp.Asm → Esp	$(\bar{M},P)=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})=\bar{S}$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{2}{=}((\bar{S},\bar{M}),P)\underset{a}{=}(\bar{S},(\bar{M},P))\underset{1}{=}(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{=}\bar{S}$
I. 3. Darii	Amp.Ism → Isp	$(\bar{M},\bar{P})=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})>1$	$\rightarrow (\bar{S},\bar{P})\underset{d}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{S},\bar{M},\bar{P})\underset{a}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{S},(\bar{M},\bar{P}))\underset{1}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{>}1$
I. 4. Ferio	Emp.Ism → Osp	$(\bar{M},P)=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})>1$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{d}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{a}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},(\bar{M},P))\underset{1}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{>}1$
II. 5. Cesare	Epm.Asm → Esp	$(P,\bar{M})=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})=\bar{S}$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{2}{=}((\bar{S},\bar{M}),P)\underset{a}{=}(\bar{S},(P,\bar{M}))\underset{1}{=}(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{=}\bar{S}$
II. 6. Camestres	Apm.Esm → Esp	$(P,M)=M\ .\ (\bar{S},M)=\bar{S}$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{2}{=}((\bar{S},M),P)\underset{a}{=}(\bar{S},(P,M))\underset{1}{=}(\bar{S},M)\underset{2}{=}\bar{S}$
II. 7. Festino	Epm.Ism → Osp	$(P,\bar{M})=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})>1$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{d}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{a}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},(P,\bar{M}))\underset{1}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{>}1$
II. 8. Baroco	Apm.Osm → Osp	$(P,M)=M\ .\ (\bar{S},M)>1$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{d}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{a}{=}(\bar{S},(P,M))(\bar{S},\bar{M},P)\underset{1}{=}(\bar{S},M)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{2}{>}1$
III. 9. Datisi	Amp.Ims → Isp	$(\bar{M},\bar{P})=\bar{M}\ .\ (\bar{M},\bar{S})>1$	$\rightarrow (\bar{S},\bar{P})\underset{d}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{S},\bar{M},\bar{P})\underset{a}{=}(\bar{S},M,\bar{P})((\bar{M},\bar{P}),\bar{S})\underset{1}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{M},\bar{S})\underset{2}{>}1$
III.10. Ferison	Emp.Ims → Osp	$(\bar{M},P)=\bar{M}\ .\ (\bar{M},\bar{S})>1$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{d}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{a}{=}(\bar{S},M,P)((\bar{M},P),\bar{S})\underset{1}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{M},\bar{S})\underset{2}{>}1$
III.11. Disamis	Imp.Ams → Isp	$(\bar{M},\bar{P})>1\ .\ (\bar{M},\bar{S})=M$	$\rightarrow (\bar{S},\bar{P})\underset{d}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{S},\bar{M},\bar{P})\underset{a}{=}(\bar{S},M,\bar{P})((\bar{M},\bar{S}),\bar{P})\underset{2}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{M},\bar{P})\underset{1}{>}1$
III.12. Bocardo	Omp.Ams → Osp	$(\bar{M},P)>1\ .\ (\bar{M},\bar{S})=\bar{M}$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{d}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{a}{=}(\bar{S},M,P)((\bar{M},\bar{S}),P)\underset{2}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{M},P)\underset{1}{>}1$
IV.13. Calemes	Apm.Ems → Esp	$(P,M)=M\ .\ (M,\bar{S})=\bar{S}$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{2}{=}((M,\bar{S}),P)\underset{a}{=}((P,M),\bar{S})\underset{1}{=}(M,\bar{S})\underset{2}{=}\bar{S}$
IV.14. Fresison	Epm.Ims → Osp	$(P,\bar{M})=\bar{M}\ .\ (\bar{M},\bar{S})>1$	$\rightarrow (\bar{S},P)\underset{d}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{a}{=}(\bar{S},M,P)((P,\bar{M}),\bar{S})\underset{1}{=}(\bar{M},\bar{S})\underset{2}{>}1$
IV.15. Dimatis	Ipm.Ams → Isp	$(\bar{P},\bar{M})>1\ .\ (\bar{M},\bar{S})=\bar{M}$	$\rightarrow (\bar{S},\bar{P})\underset{d}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{S},\bar{M},\bar{P})\underset{a}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{P},(\bar{M},\bar{S}))\underset{2}{=}(\bar{P},\bar{M})\underset{1}{>}1$

B. Syllogismes conditionnellement valides (dont la validité dépend d'une condition d'existence)

B.1. Syllogismes à conclusion attenuée

I.16. Barbari	Amp.Asm.Iss → Isp	$(\bar{M},\bar{P})=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})=\bar{S}\ .\ \bar{S}>1$	$\rightarrow (\bar{S},\bar{P})\underset{2}{=}((\bar{S},\bar{M}),\bar{P})\underset{a}{=}(\bar{S},(\bar{M},\bar{P}))\underset{1}{=}(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{=}\bar{S}\underset{e}{>}1$

I.17. Celaront	**Emp.Asm.Iss → Osp**	$(\bar{M},P)=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})=\bar{S}\ .\ \bar{S}>1 \rightarrow (\bar{S},P)\underset{2}{=}((\bar{S},\bar{M}),P)\underset{a}{=}(\bar{S},(\bar{M},P))\underset{1}{=}(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{=}\bar{S}\underset{e}{>}1$
II.18. Cesarop	**Epm.Asm.Iss → Osp**	$(P,\bar{M})=\bar{M}\ .\ (\bar{S},\bar{M})=\bar{S}\ .\ \bar{S}>1 \rightarrow (\bar{S},P)\underset{2}{=}((\bar{S},\bar{M}),P)\underset{a}{=}(\bar{S},(P,\bar{M}))\underset{1}{=}(\bar{S},\bar{M})\underset{2}{=}\bar{S}\underset{e}{>}1$
II.19. Camestrop	**Apm.Esm.Iss → Osp**	$(P,M)=M\ .\ (\bar{S},M)=\bar{S}\ .\ \bar{S}>1 \rightarrow (\bar{S},P)\underset{2}{=}((\bar{S},M),P)\underset{a}{=}(\bar{S},(P,M))\underset{1}{=}(\bar{S},M)\underset{2}{=}\bar{S}\underset{e}{>}1$
IV.20. Calemop	**Apm.Ems.Iss → Osp**	$(P,M)=M\ .\ (M,\bar{S})=\bar{S}\ .\ \bar{S}>1 \rightarrow (\bar{S},P)\underset{2}{=}((M,\bar{S}),P)\underset{a}{=}((P,M),\bar{S})\underset{1}{=}(M,\bar{S})\underset{2}{=}\bar{S}\underset{e}{>}1$
B.2. Syllogismes à conclusion pleine utilisant la conversion partielle		
III.21. Darapti	**Amp.Ams.Imm → Isp**	$(\bar{M},\bar{P})=\bar{M}\ .\ (\bar{M},\bar{S})=\bar{M}\ .\ \bar{M}>1 \rightarrow (\bar{S},\bar{P})\underset{d}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{S},\bar{M},\bar{P})\underset{a}{=}(\bar{S},M,\bar{P})((\bar{M},\bar{P}),\bar{S})\underset{1}{=}(\bar{S},M,\bar{P})(\bar{M},\bar{S})\underset{2}{=}(\bar{S},M,\bar{P})\bar{M}\underset{e}{>}1$
III.22. Felapton	**Emp.Ams.Imm → Osp**	$(\bar{M},P)=\bar{M}\ .\ (\bar{M},\bar{S})=\bar{M}\ .\ \bar{M}>1 \rightarrow (\bar{S},P)\underset{d}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{a}{=}(\bar{S},M,P)((\bar{M},P),\bar{S})\underset{1}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{M},\bar{S})\underset{2}{=}(\bar{S},M,P)\bar{M}\underset{e}{>}1$
IV.23. Bamalip	**Apm.Ams.Ipp → Isp**	$(\bar{P},\bar{M})=\bar{P}\ .\ (\bar{M},\bar{S})=\bar{M}\ .\ \bar{P}>1 \rightarrow (\bar{S},\bar{P})\underset{1}{=}(\bar{S},(\bar{P},\bar{M}))\underset{a}{=}(\bar{P},(\bar{M},\bar{S}))\underset{2}{=}(\bar{P},\bar{M})\underset{1}{=}\bar{P}\underset{e}{>}1$
IV.24. Fesapo	**Epm.Ams.Imm → Osp**	$(P,\bar{M})=\bar{M}\ .\ (\bar{M},\bar{S})=\bar{M}\ .\ \bar{M}>1 \rightarrow (\bar{S},P)\underset{d}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{S},\bar{M},P)\underset{a}{=}(\bar{S},M,P)((P,\bar{M}),\bar{S})\underset{1}{=}(\bar{S},M,P)(\bar{M},\bar{S})\underset{2}{=}(\bar{S},M,P)\bar{M}\underset{e}{>}1$

Explication des symboles et expressions arithmétiques

$\bar{X}$ nombre complémentaire du nombre X, défini de la façon suivante: $\bar{X} =_{df} \emptyset/X$

Or, comme $\emptyset$ est défini à son tour comme le plus petit commun multiple de tous les nombres du réseau considéré ou, ce qui revient au même, comme le produit de tous les nombres premiers $P_1, \ldots, P_s$ du réseau ($\emptyset =_{df} P_1 x \ldots x P_s$), $\bar{X}$ est égal au produit de tous les nombres premiers du réseau qui ne sont pas des facteurs de X.

(X,Y) plus grand commun diviseur des nombres X et Y

$F \underset{1}{=} G$ F est égal à G d'après l'expression arithmétique de la 1ère prémisse

$F \underset{1}{>} 1$ F est plus grand que 1 d'après l'expression arithmétique de la 1ère prémisse

$F \underset{2}{=} G$ F est égal à G d'après l'expression arithmétique de la 2ème prémisse

$F \underset{2}{>} 1$ F est plus grand que 1 d'après l'expression arithmétique de la 2ème prémisse

$F \underset{e}{>} 1$ F est plus grand que 1 d'après l'expression arithmétique de la condition d'existence (adoptée comme 3ème prémisse)

$F \underset{d}{=} G$ F est égal à G en vertu de la loi de décomposition du plus grand commun diviseur: $(X,Y)=(X,Y,Z)(X,Y,\bar{Z})$

$F \underset{a}{=} G$ F est égal à G en vertu de la propriété associative et/ou commutative du plus grand commun diviseur

$F \underset{m}{=} G$ F est égal à G en vertu de la définition du plus grand commun diviseur

(où X, Y et Z sont des nombres quelconques et F et G des expressions arithmétiques quelconques)

Tab. 9 Le modèle arithmétique fondé sur la caractéristique numérique de Leibniz comme méthode de décision pour la syllogistique.
·Réfutation par voie arithmétique d'une formule syllogistique que Lukasiewicz pose comme exemple d'expression invalide mais indécidable dans son système axiomatique.

1. Expression syllogistique indécidable dans le système axiomatique de Lukasiewicz:

   1.1. en notation polonaise: CIrsCNArsAsr

   1.2. en notation ordinaire: $\text{Irs} \rightarrow (\overline{\text{Ars}} \rightarrow \text{Asr})$ ou $\text{Irs} \cdot \overline{\text{Ars}} \rightarrow \text{Asr}$

2. Schémas syllogistiques qui correspondent aux expressions 1.:

$$\begin{array}{lcl} \vdash \text{Irs} \;\cdot & & \vdash \text{Irs} \\ \vdash \text{Ars} & \text{ou} & \vdash \text{Ors} \\ \hline \vdash \text{Asr} & & \vdash \text{Asr} \end{array}$$

3. Conditions arithmétiques qui seraient nécessaires et suffisantes pour prouver, d'après notre modèle arithmétique de la syllogistique, la *validité* des schémas 2. et des expressions 1.:

$$\begin{array}{l} [R,S] < \emptyset \\ [R,S] > R \\ \hline [S,R] = S \end{array}$$

Système d'inéquations correspondant aux prémisses

Equation correspondant à la conclusion, qui devrait être, dans l'hypothèse de la *validité* de 2., une conséquence du système d'inéquations précédent, pour n'importe quelles valeurs de R et S.

4. Conditions arithmétiques qui seraient nécessaires et suffisantes pour prouver, d'après notre modèle arithmétique de la syllogistique, l'*invalidité* des schémas 2. et des expressions 1.:

$$\begin{cases} [R,S] < \emptyset \\ [R,S] > R \\ [R,S] > S \end{cases}$$

Système d'inéquations qui devrait admettre au moins une solution dans l'hypothèse de l'*invalidité* de 2.

Or, pour que le système 4. ait au moins une solution, il suffit que le nombre plein $\emptyset$ ait au moins trois facteurs premiers A_1, A_2 et A_3:

$$\emptyset = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots$$

et d'attribuer alors à R et S les valeurs $R = A_1$ et $S = A_2$ pour que le système 4. soit satisfait.

Tab. 10 Un nouveau modèle arithmétique du calcul propositionnel, fondé sur la caractéristique numérique de Leibniz. Aux variables, constantes, opérations, relations et expressions *logiques* du calcul propositionnel sont associées dans le modèle arithmétique des variables constantes, opérations, relations et expressions *arithmétiques* de la façon suivante:

	Calcul propositionnel	**Modèle arithmétique**
Variables:	p, q, r, . . .	P, Q, R, . . . (variables numériques, prenant leurs valeurs dans un ensemble de nombres entiers)
Constantes élémentaires:	$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$	$\begin{cases} P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \\ 2, 3, 5, \ldots \end{cases}$ (nombres premiers)
Constantes limites:	t (tautologie)	1 (unité)
	f (contradiction)	$\emptyset$, *nombre plein,* défini de la façon suivante: $\emptyset = P_1 . P_2 . \ldots . P_n$ (produit de tous les nombres premiers du réseau)
Opérations:	$\bar{p}$ (négation de p)	$\bar{P}$, définie de la façon suivante: $\bar{P} = \emptyset / P$
	p v q (disjonction de p et q)	(P, Q) (plus grand commun diviseur de P et Q)
	p.q (conjonction de p et q)	[P, Q] (plus petit commun multiple de P et Q)
	$p \supset q$ (conditionnelle)	$(\bar{P}, Q)$
Relations:	$p \rightarrow q$ (implication)	$(\bar{P}, Q) = 1$ ou $Q \mid P$ (P est divisible par Q) (ou Q divise P)
	$p \leftrightarrow q$ (équivalence)	$P = Q$
	$\vdash p$ ou $p \leftrightarrow t$	$P = 1$

Cette correspondance entre le calcul propositionnel et son modèle arithmétique fournit une méthode de décision pour les formules du calcul propositionnel fondée sur le principe suivant: *La condition nécessaire et suffisante pour que une formule p du calcul propositionnel soit une thèse de ce calcul (tautologie) est que la formule arithmétique P associée à p dans le modèle prenne la valeur 1 (unité) pour n'importe quelle valeur de ses variables.*

Tab. 11 Expression arithmétique des relations logiques binaires entre propositions

Relation logique	Sous forme d'implication ou d'équivalence	Relation arithmétique correspondante	Conditions arithmétiques équivalentes		
$\vdash$ pvq	$\bar{p} \rightarrow q$	$(P, Q) = 1$	$Q \mid \bar{P}$	et	$P \mid \bar{Q}$
$\vdash$ $q \supset p$	$\bar{p} \rightarrow \bar{q}$	$(P, \bar{Q}) = 1$	$\bar{Q} \mid \bar{P}$	et	$P \mid Q$
$\vdash$ $p \supset q$	$p \rightarrow q$	$(\bar{P}, Q) = 1$	$Q \mid P$	et	$\bar{P} \mid \bar{Q}$
$\vdash$ p/q	$p \rightarrow \bar{q}$	$(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$	$\bar{Q} \mid P$	et	$\bar{P} \mid Q$
$\vdash$ p		$(P, Q)\,(P, \bar{Q}) = 1$	$P = 1$	et	$\bar{P} = \emptyset$
$\vdash$ q		$(P, Q)\,(\bar{P}, Q) = 1$	$Q = 1$	et	$\bar{Q} = \emptyset$
$\vdash$ $p \equiv q$	$p \leftrightarrow q$	$(P, \bar{Q})\,(\bar{P}, Q) = 1$	$P = Q$	et	$\bar{Q} = \bar{P}$
$\vdash$ pwq	$p \leftrightarrow \bar{q}$	$(P, Q)\,(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$	$P = \bar{Q}$	et	$Q = \bar{P}$
$\vdash$ $\bar{q}$		$(P, \bar{Q})\,(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$	$\bar{Q} = 1$	et	$Q = \emptyset$
$\vdash$ $\bar{p}$		$(\bar{P}, Q)\,(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$	$\bar{P} = 1$	et	$P = \emptyset$
$\vdash$ p.q		$(P, Q)\,(P, \bar{Q})\,(\bar{P}, Q) = 1$	$P = 1$	et	$Q = 1$
$\vdash$ $p.\bar{q}$		$(P, Q)\,(P, \bar{Q})\,(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$	$P = 1$	et	$Q = \emptyset$
$\vdash$ $\bar{p}.q$		$(P, Q)\,(\bar{P}, Q)\,(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$	$P = \emptyset$	et	$Q = 1$
$\vdash$ $\bar{p}.\bar{q}$		$(P, \bar{Q})\,(\bar{P}, Q)\,(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$	$P = \emptyset$	et	$Q = \emptyset$

$(X, Y) =_{df}$ plus grand commun diviseur de X et Y
$Y \mid X =_{df}$ Y divise X
$\bar{X} =_{df} \emptyset / X$
$\emptyset = (P, Q)\,(P, \bar{Q})\,(\bar{P}, Q)\,(\bar{P}, \bar{Q})$
$\emptyset$ est le nombre caractéristique de la proposition nécessairement fausse f

Tab. 12 Démonstration arithmétique de quelques systèmes d'axiomes célèbres du calcul propositionnel
Démonstration arithmétique des quatre axiomes de Hilbert-Ackermann (1928) pour le calcul propositionnel

Premier axiome de Hilbert-Ackermann: pvp $\rightarrow$ p

Démonstration: $(\overline{(P, P)}, P) = (\bar{P}, P) = 1$ q.e.d.

Deuxième axiome de Hilbert-Ackermann: p $\rightarrow$ qvp

Démonstration: $(\bar{P}, (Q, P)) = (\bar{P}, Q, P) = 1$ q.e.d.

Troisième axiome de Hilbert-Ackermann: pvq $\rightarrow$ qvp

Démonstration: $(\overline{(P, Q)}, (Q, P)) = (\overline{(P, Q)}, (P, Q)) = 1$ q.e.d.

Quatrième axiome de Hilbert-Ackermann: $(p \rightarrow q) \rightarrow (rvp \rightarrow rvq)$

Démonstration: $(\overline{(\bar{P}, Q)}, (\overline{(R, P)}, (R, Q))) = (\overline{(R, \bar{P}, Q)}$
$\overline{(\bar{R}, \bar{P}, Q)}, \overline{(R, P, Q)\,(R, P, \bar{Q})},$
$(R, P, Q)\,(R, \bar{P}, Q)) = 1$ q.e.d.

Démonstration arithmétique des trois axiomes de Lukasiewicz (1924) **pour le calcul** propositionnel

Premier axiome de Lukasiewicz: $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

Démonstration:
$\overline{((\bar{P}, Q)}, \overline{((\bar{Q}, R)}, (\bar{P}, R))) = \overline{((\bar{P}, Q, R) (\bar{\bar{P}}, Q, \bar{R}),}$
$\underline{((Q, R) (Q, \bar{R}) (\bar{Q},} \bar{R}), (\bar{P}, Q, R) (\bar{\bar{P}}, \bar{Q}, R))) =$
$((\bar{\bar{P}}, Q, R) (\bar{\bar{P}}, Q, \bar{R}), ((P, Q, R) (\bar{P}, Q, R) (P, Q, \bar{R})$
$\underline{(\bar{P}, Q, \bar{R}) (P, \bar{Q}, \bar{R})} (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}), (\bar{P}, Q, R) (\bar{P}, \bar{Q}, R))) =$
$((\bar{\bar{P}}, Q, R) (\bar{\bar{P}}, Q, \bar{\bar{R}}), (\bar{P}, Q, R)) = 1$ q.e.d.

Deuxième axiome de Lukasiewicz: $p \to (\bar{p} \to q)$

Démonstration: $(\bar{P}, (\bar{\bar{\bar{P}}}, Q)) = (\bar{P}, \bar{\bar{\bar{P}}}, Q) = (\bar{P}, P, Q) = 1$ q.e.d.

Troisième axiome de Lukasiewicz: $(\bar{p} \to p) \to p$

$(\overline{(\bar{\bar{P}}, P)}, P) = (\overline{(P, P)}, P) = (\bar{P}, P) = 1$ q.e.d.

Démonstration arithmétique des trois axiomes de Church (1951) **pour le calcul propo-sitionnel**

Premier axiome de Church: $p \to (q \to p)$

Démonstration: $(\bar{P}, (\bar{Q}, P)) = (\bar{P}, \bar{Q}, P) = 1$ q.e.d.

Deuxième axiome de Church: $(p \to (q \to m)) \to ((p \to q) \to (p \to m))$

Démonstration:
$\overline{((\bar{\bar{P}}, (\bar{Q}, M)}, \overline{((\bar{P}, Q)}, (\bar{P}, M)) = \overline{(\underline{(\bar{P}, \bar{Q}, M),}}$
$((P, Q) (P, \bar{Q}) (\bar{P}, \bar{Q}), (\bar{P}, M)) = ((\bar{P}, \bar{Q}, M),$
$((P, Q, M) (P, Q, \bar{M}) (P, \bar{Q}, M) (P, \underline{\bar{Q}, \bar{M}) (\bar{\bar{P}},} \bar{Q}, M)$
$(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{M}), (\bar{P}, Q, M) (\bar{P}, \bar{Q}, M)) = \overline{((\bar{P}, \bar{Q}, M),}$
$(\bar{P}, \bar{Q}, M)) = 1$ q.e.d.

Troisième axiome de Church: $((p \to f) \to f) \to p$

Démonstration:
$(\overline{(\overline{(\bar{\bar{P}}, \emptyset)}, \emptyset)}, P) = (\overline{(\bar{\bar{P}}, \emptyset)}, P) = (\overline{(P, \emptyset)}, P) =$
$(\bar{P}, P) = 1$ q.e.d.

Démonstration arithmétique des postulats de Kleene pour le calcul propositionnel

Postulat 1a. de Kleene: $p \to (q \to p)$

Démonstration: $(\bar{P}, (\bar{Q}, P)) = (\bar{P}, \bar{Q}, P) = 1$ q.e.d.

Postulat 1b. de Kleene: $(p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$

Démonstration:
$\overline{((\bar{P}, Q)}, \overline{((\bar{P}, (\bar{Q}, R))}, (\bar{P}, R))) = \overline{((\bar{\bar{P}}, Q, R)}$
$(\bar{\bar{P}}, Q, \bar{R}), (((\bar{P}, Q, R) (\bar{P}, Q, \bar{R}) (\bar{P}, \bar{Q}, R) (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}),$
$(P, \bar{Q}, R) (\bar{P}, \bar{Q}, R)), (\bar{P}, R))) = ((\bar{\bar{P}}, Q, R)$
$(\bar{\bar{P}}, Q, \bar{R}), ((\bar{P}, \bar{Q}, R), (\bar{P}, Q, R) (\bar{P}, \bar{Q}, R))) =$
$((\bar{\bar{P}}, Q, R) (\bar{P}, Q, \bar{\bar{R}}), (\bar{P}, Q, R)) = 1$ q.e.d.

Postulat 3 de Kleene: $p \to (q \to p.q)$

Démonstration:
$(\bar{P}, (\bar{Q}, (P, Q) (P, \bar{Q}) (\bar{P}, Q))) = ((\bar{P}, Q) (\bar{P}, \bar{Q}),$
$((P, \bar{Q}) (\bar{P}, \bar{Q}), (P, Q) (P, \bar{Q}) (\bar{P}, Q))) = ((\bar{P}, Q)$
$(\bar{P}, \bar{Q}), (P, \bar{Q})) = 1$ q.e.d.

Postulat 4a. de Kleene: $p.q \to p$

$(\overline{(P, Q) (P, \bar{Q}) (\bar{P}, Q)}, P) = ((\bar{P}, \bar{Q}), P) = (\bar{P}, \bar{Q}, P) =$
1 q.e.d.

Postulat 4b. de Kleene: p.q → q

Démonstration: $(\overline{(P, Q)\ (P, \bar{Q})\ (\bar{P}, Q)}, Q) = ((\bar{P}, \bar{Q}), Q) =$
$(\bar{P}, \bar{Q}, Q) = 1$ q.e.d.

Postulat 5a. de Kleene: p → pvq.

Démonstration: $(\bar{P}, (P, Q)) = (\bar{P}, P, Q) = 1$ q.e.d.

Postulat 5b. de Kleene: q → pvq

Démonstration: $(\bar{Q}, (P, Q)) = (\bar{Q}, P, Q) = 1$ q.e.d.

Postulat 6 de Kleene: (p → r) → ((q → r) → (pvq → r))

Démonstration: $(\overline{(\bar{P}, R)}, (\overline{(\bar{Q}, R)}, (\overline{\overline{(P, Q)}, R}))) =$
$(\overline{(\bar{P}, Q, R)\ (\bar{P}, \bar{Q}, R)}, \overline{(P, \bar{Q}, R)\ (\bar{P}, \bar{Q}, R)}, \overline{(P, Q, R)}$
$\overline{(P, Q, \bar{R})}, (P, Q, R)\ (P, \bar{Q}, R)\ (\bar{P}, Q, R)\ (\bar{P}, \bar{Q}, R))$
$= 1$ q.e.d.

Notes

1) Voir, à ce sujet, notre article "Modèles arithmétiques pour l'informatique juridique", contribution à un volume collectif d'imminente parution – on trouvera la référence dans la bibliographie sous SANCHEZ-MAZAS, 1978 –. Dans cet article, nous appliquons un modèle arithmétique isomorphe à celui que nous présentons ici au traitement automatique des systèmes normatifs, définis précisément comme des classifications déontiques de conjonctions de conditions et faits/actions.

2) Notre premier essai d'arithmétisation des relations logiques conçues dans la perspective intensionnelle de Leibniz date de plus d'un quart de siècle (voir SANCHEZ-MAZAS, 1952). Dans cet essai, nous proposions déjà d'associer à la combinaison de deux concepts (nous disions: "la première espèce commune à deux genres") le plus petit commun multiple de leurs nombres caractéristiques et à l'alternative de deux concepts (nous disions: "le dernier genre commun à deux espèces") le plus grand commun diviseur de ces nombres.

3) Il s'agit essentiellement des calculs logiques proposés ou développés par Leibniz (toujours partiellement) dans les essais suivants, publiés dans le livre "Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre" par Louis Couturat, Paris, Félix Alcan, 1903:
   - Elementa Characteristicae universalis (p. 42–49);
   - Elementa Calculi (p. 49–57);
   - Calculi universalis Elementa (p. 57–66);
   - Calculi universalis investigationes (p. 66–70);
   - Modus examinandi consequentias per numeros (p. 70–77);
   - Regulae ex quibus de bonitate consequentiarum formisque et modis syllogismorum categoricorum judicari potest, per numeros (p. 77–84);
   - Calculus consequentiarum (p. 84–89);
   - Regulae quibus observatis de bonitate consequentiarum per numeros judicari potest (p. 89–92);
   - Sur les nombres caractéristiques (p. 245–247);
   - Notes de Calcul logique (p. 324–326).

4) Pour des essais précédents dans cette direction voir, en plus de l'article déjà cité dans la note 2, notre brochure de 1955 et notre livre de 1963; quant aux modèles proposés dans notre thèse de 1973 et nos travaux de 1972, ils représentent des variantes très éloignées de l'actuelle; finalement, nos communications de 1977 à

Paris et à Hannover se trouvent dans la même ligne que la présente communication, mais présentent des aspects et des résultats différents et complémentaires de ceux qui figurent ici.

5) L'affirmation la plus significative dans ce contexte nous paraît la suivante: "Si l'on pouvait trouver des caractères ou signes propres à exprimer toutes nos pensées, aussi nettement et exactement que l'arithmétique exprime les nombres . . . on pourrait faire en toutes les matières *autant qu'elles sont sujettes au raisonnement* (c'est Leibniz qui souligne) tout ce qu'on peut faire en Arithmétique ... Car toutes les recherches qui dépendent du raisonnement se feraient par la transposition de ces caractères et par une espèce de calcul" (Préface à la Science Générale, dans LEIBNIZ, Opuscules, p. 153–157).

6) LADRIERE, Jean, 1957.

7) Le résultat de ces recherches est l'œuvre LEIBNIZ, Opuscules, que Couturat publia en 1903, c'est-à-dire, deux ans après la parution de son livre "La Logique de Leibniz" dans lequel il exploite ses importantes découvertes.

8) RUSSELL, Bertrand, 1900 et 1908 pour la traduction française.

9) COUTURAT, Louis, 1901.

10) Il n'est pas difficile de constater l'erreur de Couturat lorsqu'il essaye de représenter le syllogisme *Celarent,* selon la perspective intensionnelle, pour montrer que cette perspective n'est pas susceptible de figuration géométrique. En effet:
Soient trois termes, par exemple animal, homme et pierre, symbolisés respectivement par les lettres 'a', 'h' et 'p' et interprétables soit en extension, comme des classes d'individus, soit en intension, comme des concepts composés de caractères.
Si nous désignons par 'Eap' l'universelle négative (aucun animal n'est pierre) et par 'Aha' l'universelle affirmative (tout homme est animal) figurant comme prémisses d'un syllogisme du mode Celarent, ainsi que par 'Ehp' l'universelle négative (aucun homme n'est pierre) figurant comme conclusion de ce syllogisme, alors la formule suivante:

$$Eap.Aha \rightarrow Ehp$$

sera l'expression symbolique de ce syllogisme.
Prenons maintenant, d'abord le point de vue extensionnel, puis l'intensionnel.

1. Dans la perspective extensionnelle, le syllogisme précité peut être interprété de la façon suivante:

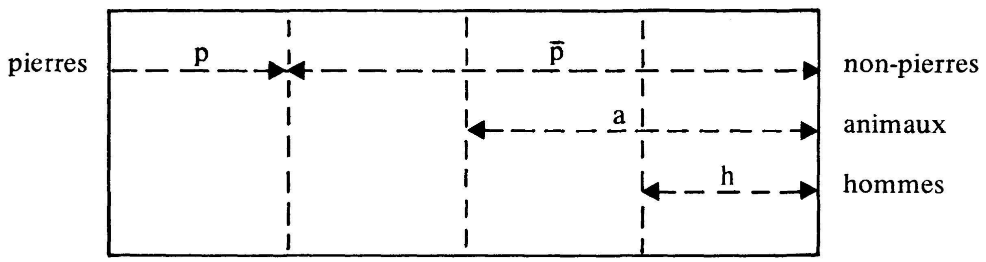
Eap $a \subseteq \bar{p}$ la classe des animaux est incluse dans la classe des non-pierres (exclue de la classe des pierres)

Aha $h \subseteq a$ la classe des hommes est incluse dans la classe des animaux

donc:

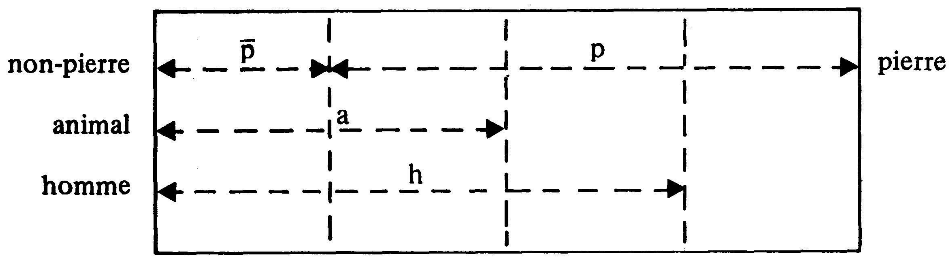
Ehp $h \subseteq \bar{p}$ la classe des hommes est incluse dans la classe des non-pierres (exclue de la classe des pierres)

Représentation géométrique correcte, qui correspond à celle de Couturat à la page 28 de sa "Logique de Leibniz":

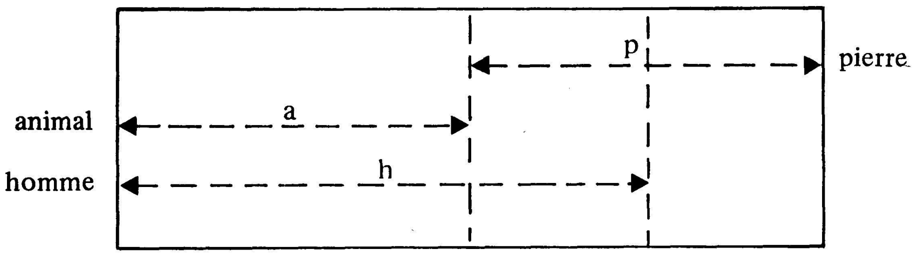


2. Dans la perspective intensionnelle, le même syllogisme peut être interprété de la façon suivante:
Eap $\bar{p} \subseteq a$ le caractère non-pierre est inclus dans le caractère animal
Aha $a \subseteq h$ le caractère animal est inclus dans le caractère homme

donc:
Ehp $\bar{p} \subseteq h$ le caractère non-pierre est inclus dans le caractère homme
Représentation géométrique correcte, qui ne correspond pas à celle de Couturat à la page 31 de sa "Logique de Leibniz":



Représentation géométrique incorrecte, qui correspond à celle de Couturat à la page 31 de sa "Logique de Leibniz":



On constatera, en effet, en ouvrant cette page 31 et en observant la fameuse figure dans laquelle Couturat (probablement sans suivre Leibniz, puisqu'il n'y a aucune référence à ce sujet) construit le schéma par lequel il croit, par erreur, représenter les prémisses de *Celarent,* en intension, que l'universelle négative *nul C n'est D* est représentée exactement comme en extension, c'est-à-dire en imposant aux termes C et D la condition d'être disjoints. Or, s'il est vrai qu'en extension l'interprétation de l'universelle négative *nul C n'est D* (aucun animal n'est pierre) est la suivante: "aucun individu n'appartient à la fois à la classe des C (animaux) et à la classe des D (pierres)", ou, si on veut, "les classes C et D (animaux et pierres) sont disjointes", il n'est pas moins vrai qu'en intension, l'interprétation de la même universelle négative est la suivante: "le caractère C (animal) contient le caractère non-D (non-pierre)"; mais cela ne signifie nullement que C (animal) en tant que composé de caractères, soit nécessairement disjoint de D (pierre); ainsi, dans notre exemple, les caractères "animal" et "pierre", tout en satisfaisant à la condition de l'universelle négative (aucun animal n'est pierre), ne sont pas, pourtant, intensionnellement disjoints, puisqu'ils ont des caractères communs (sont des corps, ont un poids, ont une couleur, etc.); à la disjonction extensionnelle ne correspond donc pas nécessairement la disjonction intensionnelle, comme le croit Couturat, à en juger par sa représentation géométrique de l'universelle négative, selon la perspective intensionnelle, dans la figure mentionnée. Or, il est, à notre avis, assez étonnant, étant donnée l'importance des conséquences que le philosophe français tire de son erreur, que celle-ci n'ait pas été signalée, dans toute sa gravité, par les logiciens qui l'ont suivi, et cela pendant trois quarts de siècle!

11) "La Logique de Leibniz", p. 32

12) Ibid.

13) Nicholas Rescher, "Leibniz's interpretation of his logical calculi", The Journal of Symbolic Logic, Vol. 19 (1954), p. 1–13. Le texte en question se trouve à la p. 1.

14) Pierdaniele Giarretta, "L'intensionalismo logico leibniziano", Pensiero, Vol. 1 (1973), p. 89–103. Voir p. 92.

15) Il s'agit des opuscules énumérés dans la note 3. C'est en me basant précisément sur la méthode des deux nombres caractéristiques associées à chaque concept, exposée dans ces opuscules, que j'ai construit mes premiers modèles arithmétiques des calculs intensionnels d'inspiration leibnizienne, dans ma brochure de 1955 et mon livre de 1963. La méthode des deux nombres caractéristiques a été d'ailleurs étudiée et perfectionnée par le logicien allemand Christian Thiel dans sa communication au III^{e} Congrès Leibniz (Hannover 12–17 novembre 1977) "Leibnizens Definition der logischen Allgemeingültigkeit und des arithmetischen Kalkül". Or, lorsque dans la discussion qui suivit son exposé, j'ai dit à Thiel qu'à mon avis un seul nombre caractéristique pour chaque concept était largement suffisant pour construire un modèle arithmétique satisfaisant dans la perspective de Leibniz – chose que j'ai démontré à Hannover dans ma communication du lendemain – il ne voulait pas me croire!

16) Voir, à ce sujet, dans mon travail SANCHEZ-MAZAS 1978, les deux programmes "CALCULUS RATIOCINATOR" et "CALCULUS CONSEQUENTIARUM" que j'ai construits en me basant sur un modèle arithmétique strictement isomorphe à celui que je présente dans ces pages.

17) Voir, à ce sujet, WANG, Hao, 1951.

18) "Cui inest A non-A est non Ens seu terminus falsus" (Voir "Fundamenta Calculi Logici", dans "Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre" par Louis Couturat, Paris, Félix Alcan, 1903, p. 421). Leibniz entend par là que si un concept contient en même temps deux caractères opposés ou contradictoires comme animal et non-animal, alors ce concept est faux, dans le sens qu'il correspond au non-être.

19) Le modèle arithmétique que nous construisons ici, et qui est fondé sur les nombres premiers – suivant une tradition qui va de Leibniz à Kurt Gödel – sera appelé "réseau primaire de nombres caractéristiques", pour le distinguer de l'autre type de modèle que nous avons également construit sur la base des puissances de 2, et que nous appelons "réseau binaire de nombres caractéristiques" (ce dernier est utilisé dans notre article SANCHEZ-MAZAS 1978 pour l'informatique juridique).

Tout réseau binaire R_D (à D dimensions) de nombres caractéristiques est isomorphe à un réseau primaire de nombres caractéristiques du même nombre de dimensions, défini comme l'ensemble des 2^D diviseurs d'un nombre $\emptyset$ ($\emptyset = P_1 x P_2 x \ldots x P_D$, où P_1, P_2, etc. sont des nombres premiers distincts deux à deux; le nombre $\emptyset$ n'est donc multiple d'aucun carré, cube, etc. d'un nombre premier). $\emptyset$ peut être défini dans ce contexte comme le plus petit commun multiple des 2^D nombres du réseau (dont 1 et $\emptyset$). L'isomorphisme entre les deux types de réseau est défini par la correspondance suivante:

Réseau binaire $B_0, B_1, \ldots, B_{D-1}$ $2^0, 2^1, \ldots, 2^{D-1}$ (nombres binaires élémentaires ou puissances de 2)	$\leftrightarrow$	Réseau primaire $P_0, P_1, \ldots, P^{D-1}$ 2, 3, ..., (nombres premiers)
composition binaire	$\leftrightarrow$	divisibilité

plus grand composant binaire commun	$\leftrightarrow$	plus grand commun diviseur
plus petit composé binaire commun	$\leftrightarrow$	plus petit commun multiple
complémentaire absolu d'un nombre Q:		complémentaire absolu d'un nombre Q:
$\bar{Q} = Z - Q$	$\leftrightarrow$	$\bar{Q} = \emptyset / Q$
nombre vide: 0 (zéro)	$\leftrightarrow$	nombre vide: 1 (unité)
nombre hypersaturé ou plein Z:		nombre hypersaturé ou plein $\emptyset$:
$Z = B_0 + \ldots + B^{D-1} = 2^{D-1}$	$\leftrightarrow$	$\emptyset = P_0 x P_1 \ldots x P^{D-1}$

Du fait de cet isomorphisme, chaque loi d'un réseau binaire de nombres caractéristiques correspond à une loi analogue d'un réseau primaire de nombres caractéristiques. Le lecteur pourra donc se familiariser avec les lois d'un réseau du premier type en évoquant les lois analogues des réseaux du deuxième type, qui sont les lois ordinaires de la divisibilité des nombres entiers, bien qu'élargies et compliquées par l'introduction de la notion de nombre complémentaire $\bar{Q}$ d'un nombre caractéristique Q.

20) Afin de faciliter la tâche de l'imprimeur (sans être obligés, pour autant, d'utiliser la notation polonaise, qui n'est pas assez connue de tout le monde et paraît à certains moins intuitive), nous avons choisi les symboles les plus simples et généralement disponibles pour désigner les différents opérateurs du calcul propositionnel. Ainsi:

l'expression	correspond à l'expression suivante en notation polonaise	matrice de la fonction
p.q	Kpq	(1, 0, 0, 0)
pvq	Apq	(1, 1, 1, 0)
$p \supset q$	Cpq	(1, 0, 1, 1)
$p \equiv q$	Epq	(1, 0, 0, 1)
pwq	Jpq	(0, 1, 1, 0)
p/q	Dpq	(0, 1, 1, 1)

Les relations 'p implique q' et 'p est équivalente à q' seront désignées respectivement par les expressions: $p \rightarrow q$ et $p \leftrightarrow q$

21) La condition d'existence, qui est indispensable pour assurer la validité de 12 lois des inférences immédiates – à savoir, les 4 de la subalternation, les 2 de la contrariété, les 2 de la sous-contrariété et les 4 de la conversion partielle –, ainsi que de 9 modes syllogistiques – Darapti, Felapton, Bamalip, Fesapo, Barbari, Celaront, Cesarop, Camestrop et Calemop – est considérée par de nombreux logiciens actuels comme une prémisse supplémentaire. Voir, à ce sujet, D. Hilbert et W. Ackermann, "Grundzüge der theoretischen Logik", dritte, verbesserte Auflage, Berlin: Springer, 1949, p. 44–48, ainsi que W.V.O. Quine, "Méthodes de logique" (traduction de l'original anglais "Methods of Logic", Holt, Rinehart and Winston, 1950, 1959 et 1972), Paris, Armand Colin, 1973: "les quinze formes de syllogismes recensées plus haut sont les seules qui soient valides. Outre celles-ci, neuf formes méritent cependant une mention honorable. Il s'agit de formes qui, à l'instar de l'exemple des Spartiates, ont besoin d'un léger renforcement de leurs prémisses" (p. 102). Voir aussi Joseph Dopp, "Notions de logique formelle", Louvain/

Paris: Nauwelaerts, 1965: "Si on ne présupposait pas que les concepts sont vérifiés par un objet au moins, 9 modes cesseraient d'être valables, à savoir: Barbari, Celaront, Cesarop, Camestrop, Darapti, Felapton, Bamalip, Fesapo et Calemop (p. 137). Nous partageons ici le point de vue des logiciens précités.

22) La base intensionnelle de cette méthode d'arithmétisation peut être constatée en observant que le degré de composition ou richesse de facteurs du nombre caractéristique d'un caractère ou propriété, ainsi que d'une proposition augmente ou diminue en fonction de la richesse intensionnelle du caractère ou de la proposition. En effet, la richesse intensionnelle d'un caractère est exprimée par le nombre des caractères qu'il contient. Pour sa part, la richesse intensionnelle d'une proposition est exprimée par le nombre de ses conséquences logiques.
D'après cette doctrine, le sujet d'un énoncé est plus riche que le prédicat de ce dernier. Ainsi, lorsque Leibniz répetait que le prédicat est toujours contenu dans le sujet, il ne faisait qu'exprimer le point de vue intensionnel. Pour sa part, l'antécédent d'une implication est plus riche que son conséquent. Lorsque nous disons "Si quelque roi de France est chauve, alors quelque roi est chauve", l'antécédent de cette implication a plus d'intension et moins d'extension que son conséquent. Mais dans cette méthode d'arithmétisation le nombre caractéristique du sujet est toujours multiple du nombre caractéristique du prédicat et le nombre caractéristique de l'antécédent est toujours multiple du n.c. du conséquent. La priorité de la perspective intensionnelle est donc vérifiée.

23) "In one passage Aristotle characterizes a negative name such as 'non-man' as being not a name but an *ὄνομα ἀόριστον* (an infinite name...). In spite of this restriction or qualification, examples of contraposition do occur: 'If man is an animal, what is not animal is not man'... Bochenski points out that these propositions are not quantified – at least not explicitly. Yet the only reasonable understanding of them is as universal affirmative; and the contraposition them seems to be of the sort which changes a universal affirmative into a universal negative. Probably from this source, contraposition appears in Petrus Hispanus as being presumably Aristotelian. But for Petrus Hispanus, contraposition changes a universal affirmative into universal affirmative and a particular negative into a particular negative. And I shall thereafter use the term 'contraposition' in this sense" (Alonzo Church, "The history of the question of existential import of categorical propositions", Proceedings of the 1964 International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Jerusalem, August 26-September 2, 1964, published by North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964, p. 417–424. Pour le texte précité, voir p. 418–419).

24) Voir Menne, Albert, 1962

25) Voir Lukasiewicz, Jan, 1954 et 1972 pour la traduction française

26) Lukasiewicz, Jan, 1972, p. 114 et suivantes

27) Voir Sanchez-Mazas, 1978.

Blanche, Robert, 1966: Structures intellectuelles. – Paris: Vrin, 1966.
Blanche, Robert, 1972: Sur la trivalence, Logique et Analyse, 15e année, nº 59–60, septembre-décembre 1972, p. 568–582.
Bochenski, I.M., 1948: On the Categorical Syllogism, Dominican Studies (Oxford), vol. 1 (1948), p. 35–37. (réédition dans Logico-Philosophical Studies, A. Menne éd., 1962).
Castaneda, Héctor Neri, 1976: Leibniz's Syllogistico-Propositional Calculus, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 17, (1976), p. 481–500.
Church, Alonzo, 1964: The history of question of existential import of categorical propositions, Proceedings of the 1964 International Congress for Logic, Methology and Philosophy of Science, Jerusalem, August 26-September 2, 1964, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964, p. 417–424.
Couturat, Louis, 1901: La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits. – Paris: F. Alcan, 1901.
Dopp, Joseph, 1965: Notions de logique formelle. – Louvain/Paris: Nauwelaerts, 1965.
Gericke, H., 1952: Algebraische Betrachtungen zu den Aristotelischen Syllogismen, Archiv der Mathematik, vol 3 (1952), p. 421–433.
Giarretta, Pierdaniele, 1973: L'intensionalismo logico leibniziano, Pensiero, vol 1 (1973), p. 89–103.
Hilbert, D. und Ackermann, W., 1949: Grundzüge der theoretischen Logik. – 3. Aufl. – Berlin: Springer-Verlag, 1949. – (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; Bd. 27).
Kalinowski, Georges, 1967: Axiomatisation et formalisation de la théorie héxagonale de l'opposition de M. R. Blanché (Système B), Les études philosophiques, vol. 22 (1967), nº 2, p. 203–209.
Kauppi, Raili, 1960: Ueber die Leibnizsche Logik; mit besonderer Berücksichtigung des Problems der Intension und der Extension. – Helsinki: Societas Philosophica, 1960. – (Acta Philosophica Fennica, Fasc. 12, 1960).
Ladrière, Jean, 1957: Les limitations internes des formalismes: étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques. – Paris: Gauthier-Villars, 1957.
Leibniz, G.W. Opuscules: Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre par Louis Couturat. – Paris: Felix Alcan, 1903.
Lukasiewicz, Jan, 1954: Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic. – Oxford: Clarendon press, 1954.
Lukasiewicz, Jan, 1972: La syllogistique d'Aristote dans la perspective de la logique formelle moderne. – Paris: A. Colin, 1972 (traduction de la précédente).
Maretti, Enrico, 1976: Modelli algoritmici di strutture sillogistiche, Informatica e Diritto, Anno II, janvier-mars 1976, p. 51–112.
Menne, Albert, 1962: Some results of investigation on the syllogism and their philosophical consequences, Logico-Philosophical Studies, edited by Albert Menne. – Dordrecht: D. Reidel Publ. Company, 1962, p. 55–63.
Patzig, Günter, 1969: Leibniz, Frege und die sogenannte "lingua characteristica universalis", Akten des Internationalen Leibniz-Kongress, Hannover 14–19 nov. 1966, Bd III, Erkenntnislehre-Logik-Sprachphilosophie-Editionsberichte. – Wiesbaden: Steiner, 1969, p. 103–112.
Piaget, Jean, 1972: Essai de logique opératoire. – 2e éd. du Traité de logique; essai de logistique opératoire (1949); établie par Jean-Blaise Grize; Paris: Dunod, 1972.

Quine, W.V.O., 1950, 1959, 1972: Méthodes de logique (traduction de l'original anglais Methods of Logic, Holt, Rinehart and Winston, 1950, 1959 et 1972). – Paris: A. Colin, 1973.
Rescher, Nicholas, 1954: Leibniz's interpretation of his logical calculi, The Journal of Symbolic Logic, vol. 19, (1954), p. 1–13.
Russell, Bertrand, 1900: A critical exposition of the philosophy of Leibniz. London, 1900.
Russell, Bertrand, 1908: La philosophie de Leibniz, (trad. J. Ray), Paris: 1908.
Sanchez-Mazas, Miguel, 1952: Notas preliminares para la fundamentación de una Lógica Matemática comprehensiva, Theoria (Madrid), vol. 1, n° 1 (1952), p. 25–26.
Sanchez-Mazas, Miguel, 1955: Formalización de la Lógica según la perspectiva de la comprehensión. – Madrid: Departamento de Filosofia e Historia de la Ciencia del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1955. – (Cuadernos de Lógica, Epistemologia e Historia de la Ciencia; 4)
Sanchez-Mazas, Miguel, 1963: Fundamentos matemáticos de la Lógica Formal (Prix "Menendez Pelayo" 1955 du Consejo Superior de Investigaciones Científicas). – Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1963.
Sanchez-Mazas, Miguel, 1972: Calcul arithmétique des propositions, International Logic Review, n° 6 (décembre 1972), p. 222–245.
Sanchez-Mazas, Miguel, 1973: Cálculo de las Normas. – Thèse présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Neuchâtel pour obtenir le grade de Docteur ès Lettres. – Traduction de Mme Nello Sancho. – Barcelone: Ariel, 1973.
Sanchez-Mazas, Miguel, 1977a: Réfutation d'un jugement capital de Couturat sur la logique de Leibniz et la logique mathématique en général, Communication présentée au Colloque "Louis Couturat", Paris: Ecole Normale Supérieure, 8–9 juin 1977.
Sanchez-Mazas, Miguel, 1977b: La Caractéristique numérique de Leibniz comme méthode de décision, communication présentée au III[e] Congrès Leibniz, Hannover 12–17 novembre 1977 (à paraître dans les Actes du Congrès).
Sanchez-Mazas, Miguel, 1978: Modèles arithmétiques pour l'informatique juridique, dans Informatica, Logica e Diritto, numéro monographique de la revue Informatica e Diritto, Istituto per la Documentazione Giuridica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Florence (Italie), 1978 (sous presse).
Sanchez-Mazas, Miguel, En préparation: L'arithmétique du raisonnement. Réseau de nombres caractéristiques pour la classification, l'analyse des théories et le calcul logique et juridique.
Serres, Michel, 1968: Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques, 2 vols. – Paris: Presses universitaires de France.
Serres, Michel, 1969: Un tricentenaire: Problèmes du De Arte Combinatoria, 1966, Akten des Internationalen Leibniz-Kongress, Hannover, 14–19 November 1966, Bd III, Erkenntnislehre-Logik-Sprachphilosophie-Editionsberichte. Wiesbaden: Steiner, 1969, p. 113–125.
Thomas, Ivo, 1949: CS(n): An extension of CS, Dominican Studies (Oxford), vol 2 (1949), n° 2, p. 145–160.
Wang, Hao, 1951: Arithmetic models for formal systems, Methodos, vol. 3 (1951), p. 217–237.
Yost, R.M., 1954: Leibniz and philosophical analysis. – Berkeley: University of California press, 1954.