

**Zeitschrift:** Schweizerische pädagogische Zeitschrift

**Band:** 35 (1925)

**Heft:** 5

**Artikel:** Die Grundlagen der Euklidischen Geometrie im Unterricht : 2. Teil

**Autor:** Merz, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-788521>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

legung. Darum wäre es verderblich, blindlings nachzusagen, was andere verkündeten, Firnis, der genau besehen, gar schnell verblasst. Wer nicht auf Grund seiner ganzen Lebensanschauung eine bestimmte Methode als richtig erkennt und durchführt, kann auch nicht mit seiner ganzen Persönlichkeit für seinen Unterricht einstehen. Wer nicht auch den ganzen zu vermittelnden Stoff nach einer bestimmten Weltanschauung zu bewerten vermag, wird nie dazu kommen, eine richtige Stoffauswahl zu treffen.

Es wäre die Aufgabe einer wissenschaftlichen Methodik, diese Zusammenhänge: Weltanschauung, Stoffauswahl und -Behandlung folgerichtig zu untersuchen und sie in Verbindung zu bringen mit der natürlichen Veranlagung des Menschen, des Lehrers, somit zur Psychologie des Lehrerberufes.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit kann nicht sein, hier schon Ausblicke zu geben. Eines geht aber ohne weiteres hervor: Eine wissenschaftliche Methodik muss weitausholen können. Es genügt keineswegs, dass man spezielle Methodik treibt. Erkenntnistheorie, Psychologie und Pädagogik sind — wie schon weiter oben bemerkt — die Grundlagen, deren es unbedingt bedarf. An den wissenschaftlichen Methodiker werden also hohe Anforderungen gestellt. Ein weiterer Grund, dass der Methodik an den Hochschulen grosse Beachtung zu schenken ist.

---

## Die Grundlagen der Euklidischen Geometrie im Unterricht.

Von Dr. K. Merz, Professor in Chur.

### II.

6. **Parallele Gerade.** Die Bedeutung paralleler Geraden für das Zeichnen liegt in ihrer leichten Konstruierbarkeit durch Verschiebung eines Dreiecks längs einer Geraden. Ihre gegenseitige Lage beruht also auf der Bewegung starrer Körper, und sie muss sich also auch aus dem Grundsatz der Übertragbarkeit der Strecke ableiten lassen. Es ist also methodisch ein Fehler, wenn schon einleitend von parallelen Geraden gesprochen wird, die einander nicht schneiden können, denn dabei bezieht man sich auf allgemein der Erfahrung schon bei vielen Gelegenheiten entnommene ungenaue Kenntnisse, die auch ohne genaue konstruktive Begründung bereits geläufig sind. Mit der schon gewonnenen Erkenntnis über die Kongruenz der Dreiecke ist es aber möglich, die Entstehung paralleler Geraden durch Konstruktion zu zeigen.

Parallele Gerade entstehen, in Nachbildung des praktischen Zeichnens, durch Verschiebung eines Dreiecks, das mit einer Seite in einer Geraden  $t$  liegt, längs dieser Geraden, d. h. man zeichnet an der Trans-

versalen  $t$  mit  $AB$  in  $t$  das Dreieck  $ABC$  und dazu in entsprechender Lage ein kongruentes  $A_1B_1C_1$  mit  $A_1B_1$  in  $t$ , dann wird  $A_1C_1 \parallel AC$  bezeichnet oder diese Seiten verlängert  $p \parallel g$  (Fig. 1). Durch diese kongruenten Dreiecke sind zugleich gleichliegende Winkel in  $A$  und  $A_1$  als gleich bedingt und ebenso daraus folgend Wechselwinkel. Man kann also auch, da die Winkelabtragungen bereits konstruiert wurden, die parallelen Geraden durch Winkelgleichheit bestimmen: Wenn zwei Gerade  $g$  und  $p$  mit einer sie schneidenden Transversalen  $t$  gleiche gleichliegende oder Wechselwinkel bilden, so heissen  $g$  und  $p$  zwei parallele Gerade. Diese Erklärung stützt sich dabei auf die durch Abtragen der Winkel auszuführende Konstruktion. Parallel sein oder Gleichheit gleichliegender Winkel spricht bisher, nach der ausgeführten Weise, die nämliche Tatsache in der gegenseitigen Lage der beiden Geraden  $p$  und  $g$  aus. Wie sich diese bei fortgesetzter Verlängerung zueinander verhalten, ist noch nicht in Betracht gezogen worden. Auch entsteht die Frage, ob die Aufgabe, durch  $A_1$  zu  $g$  eine Parallele zu ziehen, nur eine Lösung habe, da doch von  $P$  aus beliebig viele  $t$  nach  $g$  möglich sind.

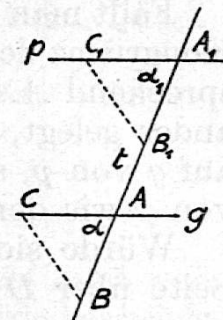


Fig. 1.

Daher ist der Begriff der parallelen Geraden noch dahin zu vervollständigen, dass ihre gegenseitige Lage auch unabhängig von den Winkeln an einer Transversalen dargelegt wird, was durch die Bestimmung ihres gegenseitigen Abstandes zu erzielen ist.

Man zeichne (Fig. 2) zum Dreieck  $ABC$  das kongruente  $DCB$  durch Abtragen der Seiten, wodurch sie auch in den entsprechenden Winkeln übereinstimmen und es wird dadurch  $BD \parallel AC$  und  $CD \parallel AB$ . Diese Figur löst also vier Aufgaben: durch eine der Ecken  $B$  oder  $C$  des Parallelogramms eine Parallele zu den Seiten zu legen die von der bezüglichen Gegenecke ausgehen. Das nämliche gilt auch für  $AD$  als Transversale:  $p$  ist die Parallele durch  $D$  zu  $g$ , wie auch  $g$  die durch  $A$  zu  $p$  ist. Die Parallele durch  $B$  oder durch  $D$  zu  $AC$  fallen in die eine Gerade  $BD$  zusammen.

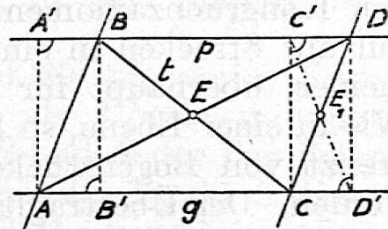


Fig. 2.

Hier lässt sich auch beweisen, dass  $AD$  und  $BC$  einander in  $E$  halbieren.

Lässt man  $A$  sich auf  $g$  bewegen, Fig. 3, nach  $A_1, A_2, A_3$ , so entstehen durch die vorige Konstruktion  $D_1D_2D_3 \dots$  auf  $p$  wegen Kongruenz von  $BA_1A_2A_3 \dots$  mit  $CD_1D_2D_3 \dots$ .  $AD$  beschreibt ein Büschel um  $E$  und kann jede Richtung einnehmen. Mit jedem dieser Strahlen bilden  $g$  und  $p$  jeweils gleiche Winkel. Sind also zwei Gerade  $p$  und  $g$  zueinander parallel konstruiert worden, mit Hülfe einer Transversalen  $BC$ , so sind sie auch zueinander parallel in bezug auf alle Strahlen, die durch die Mitte  $E$  von  $BC$  gelegt werden können. Die beiden Parallelen  $p$  und  $g$  sind also eindeutig und vertauschbar aufeinander bezogen, bezüglich aller Strahlen durch  $E$  als Transversalen. Alle ihre Punkte liegen zentrisch symmetrisch bezüglich  $E$  (abgesehen vorläufig vom unendlich fernen).

Fällt man ferner  $BB'$  senkrecht zu  $g$  und  $CC'$  zu  $p$ , so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke  $BB'A$  und  $CC'D$ , dass  $BB' = CC'$  ist und entsprechend  $AA' = DD'$ . Hat man also zwei Gerade  $p$  und  $g$  so zueinander gelegt, dass  $B$  auf  $p$  den gleichen Abstand von  $g$  hat, wie  $C$  auf  $g$  von  $p$ , so hat jeder Punkt  $A$  auf  $g$  auch den gleichen Abstand von  $p$  wie der zentrisch symmetrische  $D$  (bezüglich  $E$ ) von  $g$ .

Würde sich also bei fortgesetzter Verlängerung nach der einen Seite über  $D$  hinaus  $p$  zu  $g$  nähern, so müsste sich ebenso über  $A$  hinaus  $g$  zu  $p$  nähern und würden  $p$  und  $g$  sich schneiden, so müsste dieses beidseitig geschehen, was dem Grundsatz über die Bestimmung einer Geraden widerspricht, denn so hätten  $p$  und  $g$  zwei Punkte gemeinsam und müssten identisch sein. Die beiden Parallelen  $p$  und  $g$  können einander also nicht schneiden. Diese Eigenschaft gilt für jede Lage von  $B$  ausserhalb  $g$ . Wird also  $g$  längs einer festen Transversalen  $t$  so verschoben, dass  $g$  mit  $t$  beständig gleiche Winkel bildet,

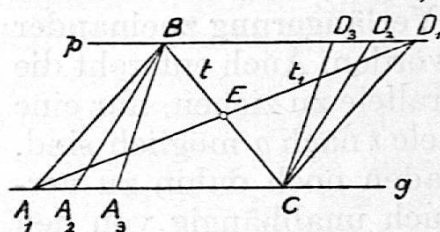


Fig. 3.

so stellt  $g$  in seinen verschiedenen Lagen lauter Gerade dar, die einander im Endlichen nicht schneiden. Die Gleichheit dieser Winkel ist dabei eine Vereinfachung der Bezeichnung der Verschiebung einer starren Figur, wozu als Hilfslinie eine Verbindungsstrecke zwischen den Schenkeln dient.

Zwischen irgend zweien dieser Schar von Parallelen besteht nun zentrische Symmetrie in bezug auf die Mitte  $E$  ihres Abschnittes auf  $t$ . Von dieser besonderen Lage von  $E$  sich los zu machen, ist nun die schliessliche Schwierigkeit, welche das Parallelenaxiom noch bietet. Es zeigt sich hier recht deutlich seine Unabhängigkeit von den Kongruenzaxiomen. Diese wurden bisher als selbstverständlich nur auf Strecken in einer Ebene angewendet. Sie gelten aber allgemeiner, überhaupt für Flächen mit konstanter Krümmung. Wie in einer Ebene, so können auch in solchen Flächen Dreiecke begrenzt von Bogenstücken geodätischer Kurven beliebig verschoben werden. Der Übertragbarkeit der Strecke entspricht dann eine solche geodätischer Kurvenbogen. Wird also ein Dreieck aus drei gegebenen Seiten gezeichnet, so wird es auch auf der Fläche konstanter Krümmung in gleicher Art entstehen, als wenn wir in einer Ebene zeichnen. Diese kann angenähert als eine besondere Art jener Flächen mit sehr geringer Krümmung angenommen werden, so dass die Euklidische Geometrie in einem begrenzten Gebiet mit beliebiger Genauigkeit gilt.

Die Figur 3 mit den symmetrisch zu  $E$  gelegenen  $p$  und  $g$  wird also auf der Kugelfläche zu einem Zweieck, gebildet von zwei Halbkreisen  $p$  und  $g$  und die Abstände  $AA' = DD'$  nehmen beständig ab bis zu den beiden Schnittpunkten der grössten Kreise  $p$  und  $g$ . Wird (Fig. 4)  $BC$  senkrecht zu  $g$  und  $p$  gelegt, so ist  $BC$  der sphärische Abstand zwischen  $p$  und  $g$  und eine Symmetrielinie des Kugelzweiecks. Das Rechteck  $BCGP$  wird zu einem sphärischen Viereck mit drei rechten Winkeln und einem stumpfen, z. B. bei  $P$ , wenn  $PG$  senkrecht zu  $CG$  angenommen wird. Daher rührt die Unmöglichkeit, nur aus den Kon-

gruenzaxiomen allein den vierten Winkel bei  $P$  als rechten zu erhalten. Entsprechend wird auf einer Fläche konstanter negativer Krümmung der vierte Winkel ein spitzer<sup>1)</sup>; die Abstände  $AA' = DD'$  nehmen bei Entfernung von  $E$  immer mehr zu und  $p$  und  $g$  entfernen sich voneinander, als Gerade der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie.

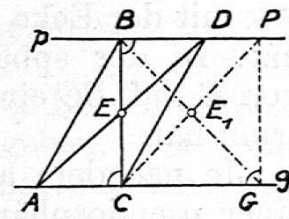


Fig. 4.

Enklidisch gesprochen muss also das Rechteck überbestimmt werden, um die gekrümmten Flächen auszuschliessen und, wie beabsichtigt, in der Ebene zu bleiben. Man könnte also festsetzen, der vierte Winkel in  $BCGP$  bei  $P$  sei auch noch ein rechter, wodurch der Fläche, in welcher die Symmetrie um  $E$  für  $g$  und  $p$  besteht, die Krümmung verunmöglicht wird. Oder um die Übertragbarkeit der Strecke nochmals anzuwenden, sei  $PG = BC$  noch gesetzt zu den drei rechten Winkeln bei  $B$ ,  $C$  und  $G$ . Dadurch entsteht ein zweiter Symmetriepunkt  $E_1$  im Schnittpunkt der Diagonalen dieses Rechtecks und die gleichen Abstände zwischen  $p//g$  lassen sich auf beliebig viele Punkte dieser Geraden übertragen.

An Stelle des üblichen Parallelenaxioms tritt also das Ergebnis: Der geometrische Ort aller Punkte mit gleichem Abstand von einer Geraden, auf deren nämlicher Seite, ist wiederum eine Gerade<sup>2)</sup>.

Der Punkt  $E$  verliert in der Ebene seine besondere Bedeutung, die er bei den krummen Flächen hatte, er kann irgendeine Lage auf der Mittelparallelen einnehmen (vorbehalten die Stetigkeitsfrage). Man gelangt also auch zur Eindeutigkeit der Parallelenkonstruktion und zu dem Satze: irgend welche Transversale bildet entsprechend gleiche Winkel mit parallelen Geraden, wenn diese als solche überall gleichen Abstandes vorausgesetzt werden in der Euklidischen Ebene.

Um nachträglich dieses Verfahren noch auf die allgemeine Figur 2 anzuwenden, müsste zu  $BB' = CC'$  noch als Überbestimmung  $DD' = CC'$  gesetzt werden, d. h. zwei Punkte  $B$  und  $D$  der Parallelen  $p$  müssen den gleichen Abstand von  $g$  haben, wie ein Punkt  $C$  dieser Geraden von  $p$ , damit eine Krümmung der Fläche vermieden wird. Damit entsteht in der Mitte von  $CD$  ein zweites Symmetriezentrum  $E_1$  und  $p//g$  wird eindeutig, während auf den genannten krummen Flächen, für die beiden Fälle der nichteuklidischen Geometrie, für jedes  $E$ , d. h. für jede Annahme von  $BC$  als Transversale eine besondere Gerade  $p$ , die geodätische Linie ist, entsteht, also die angenommene Konstruktion mittels kongruenter Dreiecke  $BCD$  zu jedem Drei-

<sup>1)</sup> Die Hypothesen des stumpfen und spitzen Winkels bei Saccherie (1733) und Lambert (1766). (Stäckel und Engel.)

<sup>2)</sup> Damit berührt sich diese Betrachtung mit den Bemühungen Saccheris (1733), das Parallelenaxiom streng zu beweisen, der sich auf Christoph Schlüssel, bekannt als Clavius (1574), bezieht und dessen bezügliche Figur schon 1680 bei Giordano da Bitonto vorkommt. Letzterer erkannte zuerst, dass parallele Gerade nur dann als äquidistante erklärt werden können, wenn das Vorhandensein solcher Geraden erwiesen ist. Saccheri nimmt als Axiom den vorhin genannten geometrischen Ort an, den er aber durch Bewegung eines Lotes, das die Abstände darstellt, entstehen lässt. (Stäckel und Engel.)

eck mit der Ecke  $B$  und einer Seite  $AC$  auf  $g$  keine eindeutige Lösung hat. In der sphärischen Geometrie entsteht damit für jede Lage von  $E$  auf  $BC$  ein anderes Zweieck über  $g$ , das  $E$  als Symmetriezentrum hat.

Je nachdem also Fig. 3 in der Ebene, auf der Kugel oder auf einer pseudosphärischen Fläche ausgeführt wird, gehört sie der euklidischen Geometrie an oder einer der beiden nichteuklidischen. Sie bildet also ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung dieser drei Arten der Geometrie und führt zur Notwendigkeit der Setzung eines weiteren Axioms, ausser den Kongruenzaxiomen, um diese Geometrien voneinander zu scheiden.

Von Interesse ist es nun, von diesem Gesichtspunkt aus den Satz 16 in Euklids Elementen zu betrachten, weil er die Grundlage zu seiner Erklärung der Parallelen bildet und auch von Hilbert<sup>1)</sup> an die Spitze der Axiomgruppe IV gesetzt wurde, trotzdem er nicht rein auf Kongruenzaxiome zurückgeführt wird, sondern auch auf die Anschauung, dass ein Teil eines Winkels kleiner sein muss als der ganze Winkel, nämlich der Aussenwinkel bei  $C$  des Dreiecks  $ABC$  (Fig. 2) ist aus der Kongruenz der Dreiecke  $ABE$  und  $CDE$  grösser als ein Innenwinkel, hier der bei  $B$ . Dieser Satz gilt ausser für ebene, nur für sphärische Dreiecke mit spitzen Winkeln, ist  $ABC$  ein solches mit drei rechten Winkeln, so besteht Gleichheit und für noch grössere Winkel kehrt die Ungleichung um, der Punkt  $D$  kommt nicht mehr innerhalb des Aussenwinkels zu liegen. Euklid setzte unbewusst in diesem Satz die gezeichnete Lage von  $D$  voraus, die auch noch für Flächen geringer Krümmung bezüglich  $BC$  gilt. Durch diese einseitige Fassung des Satzes wird also schon eine Folge des Parallelenaxioms vorweggenommen, was entschieden in den Grundlagen vermieden werden sollte. Statt dessen könnte also, unter sonstiger Beibehaltung von Hilberts Axiomgruppen, die hier dargelegte und durch Konstruktion erhaltene zentrische Symmetrie verwendet werden. Damit wird die Bestimmung der Parallelen auch auf den Raum übertragbar. In der Axiomgruppe der Kongruenz tritt dagegen durch die Übertragbarkeit der Strecke eine grosse Vereinfachung ein, besonders durch die einheitliche Beweisart der Kongruenzsätze der Dreiecke.

\* \* \*

Meine verehrten Kollegen möchte ich bitten, in ihrem Unterricht diese Grundlagen zu verwerten, um zu erfahren, wie weit sie in einem Lehrbuch der Planimetrie als einleitender Abschnitt ihren Anforderungen entsprechen könnten.

---

<sup>1)</sup> Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 1913.